

萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

立體幾何學
直線及平面

林鶴一 尾崎敏郎著

鄭心南譯

商務印書館發行

21.6

4

21

學何幾體立
面平及線直

著者 尾崎敏郎 林鶴一
譯者 鄭心南

算學小叢書

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

37817

編主五雲王
庫文有萬

種千一集一第

面平及線直——學何幾體立

著郎敏崎尾 一鶴林

譯南心鄭

路山寶海上
館書印務商 者刷印兼行發

埠各及海上
館書印務商 所行發

版初月十年九十國民華中

五二〇分

W. B. CIVIL BROS. & CO.
CHENG SIN N...

THE COMMERCIAL PRESS LTD

Shanghai, China
1930

All Rights Reserved

目 次

第一章 直線及平面之關係	1
作圖題	8
軌跡	15
直線之軌跡	19
第一章之問題	20
第二章 垂線	22
正射影	38
量及符號	89
第二章之問題	47
第三章 二面角	60
第三章之問題	69
第四章 多面角	78
第四章之問題	89

Erw 3/26

立體幾何學

直線及平面

第一章

直線及平面之關係

1. 立體幾何學，亦稱空間幾何學者，乃論不在同一平面上之圖形之學科也。本篇所論，僅就空間圖形中直線及平面之性質而言，而不及體積。

定義 1. 平面者，乃一表面而通過於其上之任何二點所作之直線必全在於其面上者也。

如泛言平面，則其廣袤本無限際，但如僅就其一部分而言時，則可用平行四邊形或其他之直線形，但隨必要可以延長。

依平面之定義，則一直線能在平面上時，其必要而且充分之條件，爲此直線上之二點當在平面之上。

定義 2. 一直線全在平面上時，稱此平面含此直線。

一平面所不含之直線，與此平面，不能有二點共通。

定義 3. 一直線與一平面唯有一點共通時，稱此直線與此平面相交。

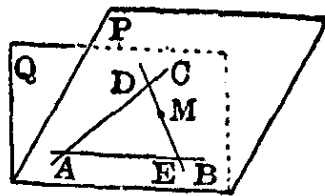
公理 1. 與一平面相交之直線，由交點所分之各部分，各在此平面之兩側。又連結在一平面兩側之二點所得之線分，必與此平面相交。

公理 2. 以平面上之一直線為軸而迴轉此平面使復歸於原位置時，則由此直線所分之平面之二部分中，其一部分當通過於空間一切之點。

2. 定理 1. 含有相交之二直線之平面有一，且限於一。

證明。 命在 A 點相交之二直線為 AB, AC ，試先證含此二直線之平面必能成立。

試想像含有 AB 之任意平面，若以 AB 為軸而迴轉時，則依公理 2，當通過於空間一切之點，故必能通過於 AC 上之一點 C ，故必有通過直線



AB 及點 C 之平面。然因 A, C 二點必在此平面上，故直線 AC 必在此平面上(定義1)。故含 AB, AC 之平面必成立。

次證如此平面僅有一個。如含有 AB, AC 之平面有二，命為 P, Q ，

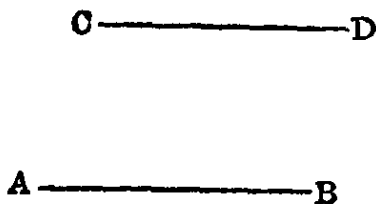
則平面 P 上任意之點 M 必在平面 Q 上。何則，如通過 M 點引直線於 P 上則可得與 AB, AC 相交之二點 D, E ，因此直線通過 Q 上 D, E 二點，故此直線當全在 Q 上。依同理凡平面 Q 上任意之點必在 P 上，故二平面 P, Q 為同一平面。即可證明此定理。

系 1. 含一直線及不在此線上一點之平面有一，且限於一。

系 2. 含不在同一直線上三點之平面有一，且限於一。

系 3. 與一直線平行而通過不在此線上之一點之直線有一，且限於一。

證明。通過一點 C 而與直線 AB 平行之直線 CD ，在含有直線 AB 及點 C 之平面上（依平面幾何學平行線之定義 AB, CD 平行者，此二線在同一平面上而不相遇之謂也）然此平面限於一，故直線 CD 在此唯一之平面上，與定直線 AB 平行而通過定點 C 。故有一且限於一。



系 4. 含平行二直線之平面有一，且限於一。

3. 前節之定理及系（除 3 外）可略述如次：

- (i) 相交二直線 (AB, CD)
- (ii) 一直線 (AB) 及不在此線上之一點 C
- (iii) 不在同一直線上之三點 (A, B, C)

(iv) 平行二直線 (AB, CD)

決定一平面。

依 (i) (ii) (iii) (iv) 所決定之平面，通例略記
如次：

- (i) 平面 (AB, CD). (ii) 平面 (AB, C).
(iii) 平面 (A, B, C). (iv) 平面 (AB, CD).

問 題

1. 每二個相交之三直線，在同一平面上，否則僅交於一點。
2. 二平行線及與此各相交之任意直線在同一平面上。
3. 每二個相互平行之三直線，與同一直線相交，則此等直線悉在同一平面上。
4. 每三個俱不在同一直線上之四點，決定若干平面？
5. 連結不在一平面上二直線上之點所得之直線，必不平行。

4 二直線相互位置之關係。

二直線相互之位置有二，只限此二。

- (i) 在同一平面上。
(ii) 不在同一平面上。

(i) 可更分為二，

- (a) 二直線相交
(b) 二直線平行

此外無他道。

故如謂二直線不平行亦不交時，則必為(ii)之位置。即含此二直線

之一與他直線上一點之平面，必於此點與他直線相交。

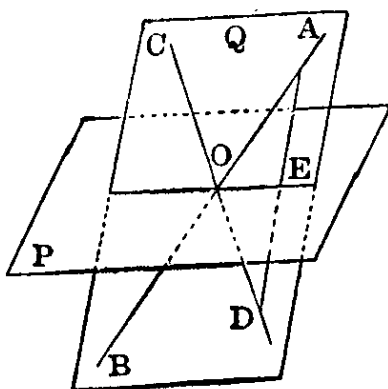
注意。欲證空間上二直線為平行時，僅證此二直線不相交，尚不充分，非證此二直線在同一平面上不可。

5. 定理 2. 共含有同一之點 O 而不一致之二平面 P, Q ，必共含有通過此點之一直線。且不共含有不在此直線上之點。

證明。試先證 P, Q 共含有通過 O 點之一直線。通過平面 Q 上之點 O 引二直線 AB, OD 。

(i) 如此二直線中有一在平面 P 上，則 P, Q 共含有此直線。

(ii) 如此二直線俱不在 P 上，則必各與平面 P 相交，故此二直線各由平面 P 分為在兩側之二部分(公理 1)。今命 OA, OD 為由直線 $ABCD$ 所決定之平面 P 所分在其兩側之部分，則此二線分上任意二點， D 在平面 P 之兩側。故依公理 1 直線 AD 與 P ，必在 O 以外之一點相交，如命此點為 E ，則 O, E 二點俱在平面 P 與 Q 上，故直線 OE 在兩平面上(定義 1)，即二平面 P, Q 共含有直線 OE 。



次證二平面 P, Q 不共含有不在此直線上之點。使 P, Q 共含有不在 OE

上之點，則由定理 1 系 1，當為同一平面，與假設相反，不能成立。

故可證明此定理。

定義 4. 二平面共含有一直線而不一致時稱此二

平面相交，此共有線稱爲此二平面之交線。

問題。 三角形之三邊，與任意之平面相交時，則三交點在一直線上。

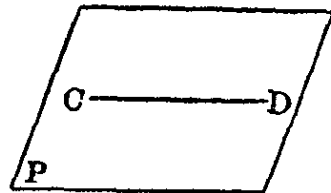
6. 定理 3. 含平行二直線 (AB, CD) 中之一 CD 而不含其他 AB 之平面 P, 與 AB 不交。

證明。 設平面 P 與直線 AB 相交，命此交點爲 E, 則

$$\begin{aligned} \text{平面 } P &\equiv \text{平面}(CD, E) \\ &\equiv \text{平面}(CD, AB) \end{aligned}$$

即平面 P 含有 AB, 反於
假設, 故平面 P 與直線 AB
不交。

A ————— B



注意。 上述證明與前定理全無關係, 如應用前定理, 可得證明如下:

試作含有平行直線 AB, CD 之平面 Q, 則 Q 與 P, 於直線 CD 相交, 不共含有不在 CD 上之點 (定理 2)。然 AB 在 Q 上, 故不在 CD 上之點不與 P 交, 又與 CD 直線平行故 CD 線上之點亦不與 P 交, 故可證明此定理。

定義 5. 一直線不含一平面上任何一點時, 稱此直線與此平面平行。

系 1. 一直線與不含此直線之平面上任意直線平行時, 與此平面平行。

7. 一直線與一平面之位置關係。

此關係不外三種如次：

- (i) 直線含於平面(定義2)。
- (ii) 直線與平面相交(定義3)。
- (iii) 直線與平面平行(定義4)。

8. 定理 4. 一直線(AB)與平面(P)平行時,則含此直線之平面(Q)與前平面(P)之交線(CD)與此直線(AB)平行。

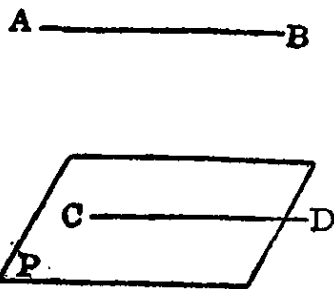
證明。 直線 AB 與 P 平行,故與 P 上之直線 CD 不交,且與 CD 在同一平面 Q 上,故 AB,CD 互相平行(參看第 6 節之圖)。

(記號) 直線與平面之記號間夾有 // 時表示二者平行。

例如 直線 AB // 平面(CD, E)。

系 1. 直線 AB // 平面 P 時,通過 P 上之一點 C 而與 AB 平行之直線 CD 在於 P 上。

證明。 平面(AB, C)與 P 之交線通過點 C 而與 AB 平行(本定理)。直線 CD 亦通過點 C 與 AB 平行,故依定理 1 系 3 知其交線為 CD, 即 CD 在於 P 上。

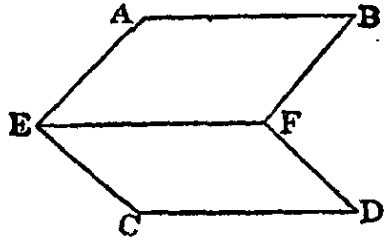


系 2. 與同一直線平行之二平面,其交線與此直線平行。

系 3. 二直線(AB, CD)如平行時,則各含此一直

線之二平面，其交線(EF)亦各平行。

證明。直線 AB，與平面(CD, EF)上一直線 CD 平行而不含於此平面，故依定理 3 系 1 與此平面平行，故含 AB 之平面 (AB, EF) 與平面 (CD, EF) 之交線即 EF，與 AB 平行(本定理)。



依同一理由，可證明 EF 與 CD 平行。

問題。一平面與含有與此平行之一直線之二平面各相交時，其交線互相平行。

9. 作圖題。

立體幾何學之作圖題，不能如平面幾何學將其圖形實際畫於紙上，但將滿足所設之條件之圖形，從推理上決定其位置即可。而其可為基礎之事項，即認為可作圖之事項如下：

(i) 作第 3 節所述之各平面。

(ii) 於各平面上施行平面幾何學之作圖。

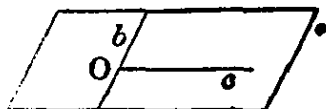
例。試作含有不在同一平面上二直線之一，且與其他直線平行之平面。

解。欲作含有不在同一平面上之二直線 a, b 之一 b，且與 a 平行之平面。於 b 上取一定點 O，在平面(O, a)上通過 O 點引與 a 平行之直線 c，依假設 a 不與 b 平行，故與 a 平行之 c 不與 b 一致。故如作平面(b, c)，即所求之平面。因平面(b, c)不含 a 而含與 a 平

行之 c 故也。又所求平面之外無他平面，因含 b 而與 a 平行之任何平面，縱能成立，而與 a 平行之 c 必在其上故也。

c _____

問題。 求通過一點且各與不平行之二直線平行之平面。

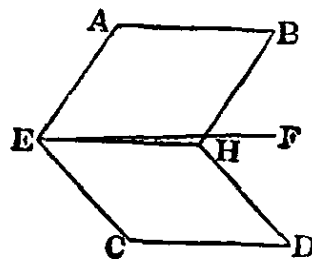
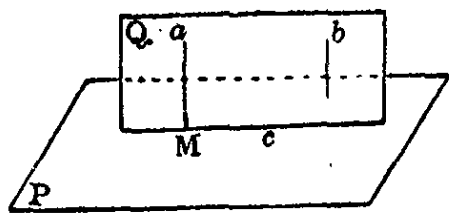


10. 定理 5. 與平行二直線 (a, b) 之一 (a) 相交之平面 (P)，亦與他直線 (b) 相交。

證明。 含有 a, b 之平面 Q ，於通過 a 及 P 之交點 M 之直線與 P 相交 (定理 2)。命此直線為 c ，則 a, b, c 皆在 Q 上， a 與 c 相交而與 b 平行。故 b 與 c 相交而不含於 P 。故與 P 相交。

11. 定理 6. 與同一直線 (AB) 平行之二直線 (CD, EF) 互相平行。

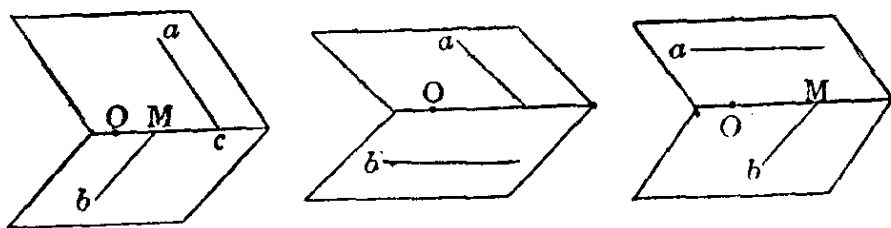
證明。 三直線俱在同一平面上時平面幾何學上既已證明不必贅述，茲試就不在同一平面上時加以證明。 $AB \parallel CD$ ，故平面 (AB, E) 與平面 (CD, E) 之交線 EH ，與 AB 及 CD 俱相平行 (定理 4 系 3) 而與通過 E 點與 AB 平行之 EF 為同一直線 (定理 1 系 3) 即直線 EF 與 CD 平行。



問 題

1. 通過所與一點，試引直線使交於不在同一平面上之二直線。

解。欲引通過 O 點，而交於不在同一平面上之 a, b 二直線。所引之直線通過 O 點而交於 a ，故在平面 (O, a) 上。依同一理由，亦在 (O, b) 上，故非在此二平面之交線上不可。今試吟味此交線得為所求之直線與否？因平面 (O, a) 與平面 (O, b) 共有 O 點而非為同一平面（因 a, b 不在同一平面上）故以通過 O 點之直線相交，然此交線 c 不必為所求之直線。欲使 c 為所求之直線，其必要而且充分之條件，為各與 a, b 相交，故 c 為與 a, b 中任何一直線平行時所求之直線不能存在。



注意 1. 平面 (O, a) (O, b) 之交線，與 a, b 各不平行，何則？如此交線各與 a, b 平行；則 $a \parallel b$ 與 a, b 不在同一平面上之假設相反故也。

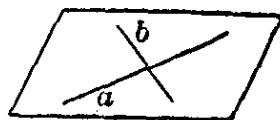
注意 2. 不作 (O, a) (O, b) 二平面，而求平面 (O, a) 及 b 之交點 M ，通過 O, M 引直線以代之，此線如與 a 相交，則為所求之直線，然如平面 $(O, a) \parallel b$ ，則 M 點不存在，則此解自不能成立，二平面 (O, a) (O, b) 之交線，與 b 平行亦得不可能之結果，與前之吟味一致。又平面 (O, a) 與 b 之交點 M 雖能存在，如 OM 不與 a 相交時，則此解亦不能成立。如認 OM 為二平面之交線則亦得不可能之結果，又與前之吟味一致。此時平面 (O, b) 與 a 平行。故平面 $(O, a) \parallel b$ 或 $(O, b) \parallel a$ 時此問題俱不能成立，否則必有解答。

2. 不在同一平面上四點所連結之四邊形，其各邊之中點為一平

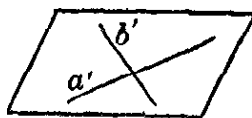
行四邊形之頂點。

12. 定理 7. 一平面 (P) 上相交之二直線 (a, b) 如各與他平面 (Q) 上之二直線 (a', b') 平行時, 二平面 (P, Q) 互不相交。

證明。二平面 P, Q 各含有互相平行二直線 a, a' 中之一, 如此二平面相交, 則其交線必各與 a, a' 平行(定理 4 系 3)。



依同理, 其交線必各與 b 及 b' 平行, 故其交線同時與相交二直線 a 及 b 平行, 此與定理 1 系 3 相反, 故二平面 P, Q 不相交。



定義 6. 不相交之二平面稱互不平行。(二平面平行時, 二平面記號之間夾 // 以表之)。

注意。二直線 a', b' 必相交, 何則? 如不相交, 則因共在平面 Q 上, 故

然	$a' // b'$	
∴	$a' // a$	(假設)
然	$a // b'$	(定理 5)
∴	$b // b'$	(假設)
∴	$a // b$	(定理 5)

與假設相反, 不可。

故定理可述之如次:

一平面上相交之二直線, 如與他平面平行時, 則二平面互相平行。

系 1. 一平面上相交之二直線，如與他平面平行時，則兩平面互相平行。

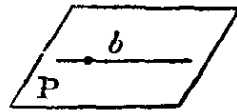
系 2. 如二平面平行，則其中一平面上一切直線，與他平面平行。

系 3. 如二平面 (P, Q) 平行，則通過其中一平面 (Q) 上之一點 O ，所引與他平面 (P) 平行之直線 (a) ，在此平面 (Q) 上。

證明。通過 P 上一點，如引與 a 平行之直線 b 時，因 P 與 a 平行，故 b 在 P 上(定理 4 系 1)。然因 $P \parallel Q$ ，故由前系 $b \parallel Q$ ，故通過 Q 上之一點 O 與 b 平行之直線 a ，亦在 Q 上(定理 4 系 1)。

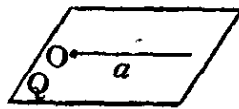
此系之對偶如次：

系 4. 與平行二平面中之一相交之直線，亦與其他相交。



系 5. 與平行二平面中之一相交之平面，亦與其他相交。

系 6. 平行二平面與他一平面之交線，互相平行。



問 題

1. 如在平行二平面上之二直線，亦平行否？
2. 多數平行直線，由平行二平面所截取之部分相等。
3. 各含有不在同一平面上之二直線之一而與他直線平行之二平面，互相平行。