電力系統之計算機應用

許高達編譯

新興圖書公司

電力系統之計算機應用

許高達編譯

新興圖書公司

電力系統之計算機應用

許高達編譯

出版：新興圖書公司

發行：時代圖書有限公司

香港九龍彌敦道 500 號一樓

3-308884

印刷：毅昌印刷公司

　1979年 2 月版

目　　錄

第七章 聯立代數方程的解法

第八章 負載潮流研究

第九章 微分方程式的數值解法

第十章 暫態穩定度研究

第一章 緒　論
(Introduction)

1.1 歷史背景

1950 年代末期，商業與科學通用的數位電子計算機在設計及生產方面有了重大的突破，數位計算，已成為處理工程問題的有力工具，其最大的特點是能對每日皆需的工程問題的很經濟的作例行計算；此外，已往因繁雜與耗時過鉅而不可能求解的較高深之工程與科學計算，它也有能力解決。所有的這些跡象使得吾人對數位計算機增加了無窮的興趣。但是為了要解決問題，吾人也需要對工程有更清楚的瞭解，及擁有較深厚的數學基礎。

電力系統不論在規劃、設計或運轉，都需要連續與廣泛的分析，以評估現行系統的績效，同時鑑判系統各個擴充計劃的效率以選取應採行的；如此可提高電力系統可靠性（ reliability ）的標準，並能得到投資的最大運用成果。

當作電力潮流及電壓決定之計算工作時，僅管是一個小小的網絡，而且在極簡單的運轉情況下，也無法以手算方式完成。因而，早在 1929 年就曾設計出一種叫做交流計算盤（ AC Network Analyzer)的特殊功用類比計算機（ Analog computer ）來協助電力系統的計算，這種裝置可作為現有及未來系統設計所需的系統各種運轉狀態研究。它能夠決定出正常與緊急狀況下的電力潮流與系統電壓；同時也能研究故障與開關動作下系統的暫態特性。1950 年代中期，美國及加拿大境內共有 50 部交流計算盤工作，成為規劃、設計、及運轉工程師不可缺少的一項工具。

電力系統問題最早應用到數位計算機，可追溯至 1940 年代末；然而，由於那時打孔卡片計算器（ Punched card calculator ）的容量甚小，早期的應用受到了範圍上的限制，直至 1950 年代末期，大型數位計算機有了足夠的容量及很快的速度，才能滿足電力系統問題的需求。1957 年美國電力公司（ American Electric Power Service Corporation ）以 IBM 704 計算機完成了大型電力潮流程式（ Load flow program ），能對一特定的電

力系統網絡計算其電壓值與電力潮流。

電力潮流程式最初是應用在輸電規劃研究，結果非常成功，因而其他的研究也漸以數位計算機取代了交流計算盤，所發展完成的程式有短路故障計算及暫態穩定度計算等。今日，數位計算機已成爲電力系統規劃、設計、運轉不可缺少的重要工具。

1.2 計算機的影響

數位計算機技術的發展，給電力系統工程帶來了下列的好處：

1. 電力系統規劃、設計及運轉所需的例行計算工作更爲經濟，效率也更高。
2. 更有效的利用工程人材，免除工程師作繁雜的手算，而能用更多的時間於技術工作。
3. 更有效的推動工程研究能力，對某一特定問題，可藉計算程序獲得多組不同解答，提供爲工程決定的參攷資料。
4. 由於大量的計算資料，使得研究的能力大增。

計算裝置價格的下跌，以及計算技術效率的拓展，對上述利益的達成頗有助益。欲求計算成本有效的降低，主要的努力應專注於工程問題的計算機解法。

1.3 工程問題的計算機解法

運用計算機解決工程問題，包含了下列幾個步驟：

1. **問題釋義**：首先問題必須弄清楚，目的也須決定，在整個過程中這是最困難的步驟。考慮必須要切題，數據必須對輸入有用；問題的範圍及限制，希望得到的結果，以及對工程決定的重要關連，這些都需要靠經驗的判斷和工程師的才華。

2. **數學公式**：當問題弄清楚之後，就必須推導代表該物理系統的數學模式，此時需要詳知系統每一元件的特性，以及各元件互連的關係。相同的系統可能會用不同的數學模式表示。同時，許多問題往往能得到兩種公式，各公式所獲致的方程式數目不一；例如，網絡問題可由迴路方程或節點方程求解。因此，問題的數學公式包含了設計模式，以及從模式中選擇最好的一種來表示物理系統。

3. **選擇求解技術**：大多數工程問題公式都包含了數學式，例如非綫性方程式，微分方程式，和三角函數，這些無法以數位計算機直接計算。計算機僅能夠作加、減、乘、除的算術四則運算。因此，任何問題的求解，皆必須採運用算術四則運算的數值分析技術。選取能適合機器實際計算並能在合理的計算機時間內產生需要的結果，這點是很重要的。由於數值分析法含有許多假設，仔細的考慮必將得到需要的準確程度。

4. **程式設計**：計算機程式設計的主要事項有欲求解問題的邏輯步驟順序，記憶的配置，數據的進入，以及輸入和輸出機器的選定等。其目的主要是找出一種程序能消除不必要的重複計算，並且使之維持在計算機容許的能力內。程式設計通常是利用叫作流程圖（ flow chart ）的圖形作成的。

5. **寫程式**：數位計算機有一系列的指令（ instruction ），包含了能夠編譯（ interpret ）及執行（ execute ）的運算碼（ operation codes ）與位址（ address ）；除了算術指令及輸入／輸出指令外，另需一種用來導引計算順序的邏輯指令。寫程式的目的就是要將解答問題的詳細步驟轉換成有系統的計算機指令；一個程式可以用實際或符號形式的計算機指令完成，也可寫成通用的程式語法如福傳（ FORTRAN ）。

6. **程式檢核**：在寫成一完全的計算機程式過程中，必定有不少機會介入錯誤，因此必須運用一有系統的檢查程序，來確定問題公式、解答方法，以及程式工作的正確。

7. **應用**：工程上所用的程式，一般可以區分爲兩類，第一類是專爲某一特定用途寫的程式，它可在短時間內完成，所求解的問題也較爲簡單，這類問題通常定義得很清楚，而且大都在一次計算後程式就達成了它的目的；也有些小程式可以連續使用，但由於它的特殊目的特性，用途仍是極爲有限。第二類是爲分析大工程問題設計的通用程式，這類程式常可作爲一個或數個工程部門定期研究中之廣泛的運用，因此程式編寫的重點在於用在工程上的靈活性；數據的收集與整理，過程時間，及結果表示都需加以考慮。此類程式也就是電力系統工程的主要部分。

上述各步驟隨著問題的不同，其相關重要性亦有所改變，然而，各個步

驟都有密切的相關性，而且在決定中佔著很重要的地位，但最重要的仍是問題之數學公式與解答技術之選擇的相互關連。若是未經作成一完全的程式以及作好實際計算，很難去評估這兩個步驟在所有各步驟中的重要性。

本書的內容包含了前三個步驟，特別是强調第二步與第三步之關連，同時也簡要的以一些流程圖來說明所選用的方法。

參考資料

Gross, Eric T. B.: Network Analyzer Installations in Canada and th United States, *Proc. Am. Power Conf.*, vol. 21, pp. 665–669, 1959.

St. Clair, H. P., and G. W. Stagg: Digital Computer Solution of Power System Problems, *Proc. Am. Power Conf.*, vol. 20, pp. 614–629, 1958.

St. Clair, H. P., G. W. Stagg, and Maria Tscherne: Digital Computer Takes Over Load Flow Calculations, *Electrical World*, Sept. 30, 1957.

Stagg, G. W., A. F. Gabrielle, and J. F. Hohenstein: Digital Computer Calculates Transient Stability Problems, *Electrical World*, Sept. 1, 1958.

Stagg, G. W., and E. L. Wizemann: Computer Program for Load Flow Study Handles Ten-system Interconnection, *Electrical World*, Aug. 1, 1960.

Zuckernick, S. J., and G. W. Stagg: Computer Solves Relay Problems *Electrical World*, July 20, 1959.

第二章　矩陣代數
(Matrix Algebra)

2.1　介説

近年來，由於運用數位計算機作求解所需要的計算，較複雜的工程問題在公式與解答上，利用矩陣代數變得益發重要了；矩陣符號的應用使得許多問題的表示更爲清晰簡明，而且對於大系統的許多聯立方程式，矩陣運算的邏輯及次序，更是適合計算機求解。

2.2　基本概念及定義

矩陣記號(Matrix notation)

矩陣記號的意義是將一聯立方程式系統寫成簡要的形式，矩陣是由一組叫做元素（ elements）的數排列爲矩形而成的，每一元素可爲實數或複數，通常用雙下標的記號 a_{ij} 來表示矩陣元素，第一個下標 i 代表元素所存在的列（ row ），第二個下標 j 代表行（ column ）。

在下列的方程式系統中

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= y_3
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

x_1，x_2 及 x_3 爲未知變數；a_{11}，a_{12}，a_{13}，……，a_{33} 爲變數之係數；y_1，y_2，及 y_3 爲已知參數。係數構成一數陣（ array ）。

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{bmatrix}
\tag{2.2.2}
$$

此即爲方程式（2.2.1）系統的係數矩陣（ coefficient matrix ）。

同理，變數及參數也可寫成矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad 及 \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

矩陣（2.2.2）以大寫字母A表之，矩陣（2.2.3.）分別以X及Y表之，方程式（2.2.1.）則可寫成矩陣形式，

$AX = Y$

一具m列n行的矩陣，其因次爲m乘n，或稱之爲$m \times n$；一矩陣爲單列多行（$m = 1$，$n > 1$）稱之爲列矩陣（row matrix）或列向量（row vector）；一矩陣爲單行多列稱之爲行矩陣（column matrix）或行向量（column vector）。

矩陣種類(Types of matrices)

某些具有特殊特性的矩陣，在矩陣運算上非常重要，這些分別爲：

方矩陣（Square matrix）：當列的數目等於行的數目，亦即$m = n$，則矩陣稱之爲方矩陣，其因次等於列（或行）的數目；方矩陣中的元素a_{ij}在$i = j$時稱之爲主對角綫元素（diagonal elements），而在$i \neq j$時稱之爲非主對角綫元素（off-diagonal elements）。在主對角綫右邊之元素a_{ij} i小於j，而在對角綫左邊者i大於j。

上三角矩陣（Upper triangular matrix）：若方矩陣中$i > j$之元素a_{ij}皆爲零，則此時矩陣爲一上三角矩陣，例如：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

下三角矩陣（Lower triangular matrix）：若方矩陣中$i < j$之元素a_{ij}皆爲零，此時矩陣爲下三角矩陣，例如：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

對角綫矩陣（diagonal matrix）：方矩陣中所有非主對角綫元素皆爲零（

$a_{ij}=0$ 若 $i\neq j$ ），則矩陣爲一對角綫矩陣，例如：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

單位矩陣（ unit or identity matrix ）： 若方矩陣中所有主對角綫元素皆爲 1 ，而其他元素皆爲零（當 $i=j$ ）， $a_{ij}=1$ 。當 $i\neq j$ ， $a_{ij}=0$ ），此時矩陣爲單位矩陣，以字母 U 表之，例如：

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

零矩陣（ null matrix ）： 若矩陣中所有元素皆爲零，則爲零矩陣。
矩陣之轉置（ transpose ）：若一 $m\times n$ 矩陣的列與行互相對調，所得之結果爲 $n\times m$ 矩陣，此即爲轉置矩陣，以 A^t 表之，例如矩陣爲

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

轉置矩陣爲

$$A^t=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

對稱矩陣（ Symmetric matrix ）：若一方矩陣中相對應之非主對角綫元素皆相等（ $a_{ij}=a_{ji}$ ），則矩陣爲對稱矩陣，例如

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

對稱矩陣經轉置後，仍與原矩陣相等，亦即 $A^t=A$ 。
反稱矩陣（ Skew-symmetric matrix ）：若一方矩陣 $A=-A^t$，則 A 爲一反稱矩陣，其相對應之主對角綫元素皆相等，但符號相反（ $a_{ij}=-a_{ji}$），且主對角綫元素皆爲零，例如：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

正交矩陣（ Orthogonal matrix ）： 若元素皆為實數之方矩陣， $A^t A=U=AA^t$，則 A 為一正交矩陣。

共軛矩陣（ Conjugate of a matrix ）：若矩陣中所有元素皆以其共軛數替代（把元素 $a+jb$ 換為 $a-jb$ ），所得之矩陣為共軛，以 A^t 表之，例如一矩陣為：

$$A=\begin{bmatrix} j3 & 5 \\ 4+j2 & 1+j1 \end{bmatrix}$$

其共軛值為

$$A^*=\begin{bmatrix} -j3 & 5 \\ 4-j2 & 1-j1 \end{bmatrix}$$

若 A 中所有元素皆為實數，則 $A=A^t$；若所有元素皆為純虛數，則 $A=-A^t$

厄米特矩陣（ Hermitian matrix ）： 若方複數矩陣之 $A=(A^t)^t$，所有之對角線元素皆為實數，則 A 為厄米特矩陣，例如：

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2-j3 \\ 2+j3 & 5 \end{bmatrix}$$

反稱厄米特矩陣（ Skew-Hermitian matrix ）： 若方複數矩陣 $A=-(A^t)$，而所有主對角線元素皆為零或純虛數，則 A 為反稱厄米特矩陣，例如：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2-j3 \\ -2-j3 & 0 \end{bmatrix}$$

單式矩陣（ Unitary matrix ）：若方複數矩陣 $(A^t)^t A=U=A(A^t)^t$，則 A 為單式矩陣；元素為實數之單式矩陣必為一正交矩陣。

表 2.1 爲一些特殊矩陣之摘要

表 2.1 特殊矩陣

條件	矩陣型式
$A = -A$	零
$A = A^t$	對稱
$A = -A^t$	反稱
$A = A^*$	實數
$A = -A^*$	純虛數
$A = (A^*)^t$	厄米特
$A = -(A^*)^t$	反稱厄米特
$A^tA = U$	正交
$(A^*)^tA = U$	單式

2.3 行列式

行列式之定義與特性（Definition and properties of determinants)

兩聯立方程式

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= k_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= k_2
\end{aligned}
\qquad (2.3.1)
$$

之求解，可以藉一次消去一變數而得，第二式中以 x_1 表示解 x_2 ，再將此 x_2 代入第一式中，則可得：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}\left(\frac{k_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1\right) &= k_1 \\
a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}k_2 - a_{12}a_{21}x_1 &= a_{22}k_1 \\
(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= a_{22}k_1 - a_{12}k_2 \\
x_1 &= \frac{a_{22}k_1 - a_{12}k_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}
\end{aligned}
$$

然後，將 x_1 代入（2.3.1）中任何一式，可得 x_2 ：

$$
x_2 = \frac{a_{11}k_2 - a_{21}k_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}
$$

($a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$)之表示式即爲係數矩陣 A 之行列式值，以 $|A|$ 表示行列式，則

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

利用行列式解方程式(2.3.1)爲

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{a_{22}k_1-a_{12}k_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

及

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{a_{11}k_2-a_{21}k_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

行列式的定義僅限於方矩陣，並且祇有單一的值，解 $n\times n$ 行列式方法，詳見於第七章。

行列式有下列之特性：

1. 行列式之值爲零，若
   - a． 某一行或列之所有元素皆爲零。
   - b． 兩列（或行）之相對元素皆相等。
   - c． 一列（或行）爲一或多列（行）之綫性結合。
2. 若行列式之兩列（或行）對換，行列式之值僅改變符號。
3. 行列式之值不改變，若
   - a． 所有相關之列與行都對換了。即
     $|A|=|A'|$
   - b． 任何一列（行）之元素乘以 k ，再加至另一列（行）之相對應元素上。
4. 若一列（或行）之所有元素皆乘以一因素 k ，行列式之值也乘以 k 。
5. 各矩陣乘積之行列式等於各矩陣行列式之乘積，即

6. 各矩陣和（或差）之行列式不等於各矩陣行列式之和（或差），即

$$|A+B-C| \neq |A|+|B|-|C|$$

應用上述之特性，可以簡化計算行列式之工作。

子行列式與餘因子(Minors and cofactors)

除去第 i 列及第 j 列所得之行列式，稱爲元素 a_{ij} 的子行列式（minor），因此

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a_{21} 的子行列式爲

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

子行列式要比原來的行列式降一階；若除去任兩列和兩行，會得到比原來降兩階的子行列式。

一元素的餘因子爲

$(-1)^{i+j}$（a_{ij} 之子行列式）

此時 a_{ij} 子行列式之階數爲 $n-1$，而 a_{21} 之餘因子以 A_{21} 表之，即

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

下列所述爲一行列式與其餘因子存在之關係：

1. 任一列（或行）之元素與其餘因子之乘積和，等於該行列式。

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \qquad (2.3.2)$$

2. 任一行（列）元素與另外一行（列）相對應元素之餘因子乘積的和等於零。

$$a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0 \qquad (2.3.3)$$

伴隨矩陣(adjoint)

若方矩陣中每一元素皆以其餘因子代替，然後再將矩陣轉置，所得之矩陣即爲伴隨矩陣，以 A^+ 表之

$$A^{+}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

2.4 矩陣運算

矩陣相等(Equality of matrices)

若A與B兩矩陣之因次相同，A中之每一元素 a_{ij} 等於B中相關元素 b_{ij} ，則矩陣是相等的，亦即

$A=B$

矩陣之相加與相減(Addition and subtraction of matrices)

矩陣之因次相同，才能夠相加與相減，若兩個$m \times n$的矩陣A與B，其和與差爲相同因次的矩陣C ，亦即

$A \pm B = C$

此時，C中的每一元素爲

$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

而n個矩陣的和與差爲

$A \pm B \pm C \pm D \pm \cdots \pm N = R$

所得之矩陣R，其元素爲

$r_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \pm c_{ij} \pm d_{ij} \pm \cdots \pm n_{ij}$

矩陣之相加可以適用交換律(commutative law)及集合律(associative law)如下：

$A + B = B + A$

亦即矩陣之和與相加的次序無關。

$A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C$

亦即矩陣之和與集合相加的順序無關。

矩陣乘以一純量(Multiplication of a matrix by a scalar)

當矩陣乘以一純量，所得矩陣之元素必等於原來元素與該純量之乘積，例如：

$kA = B$