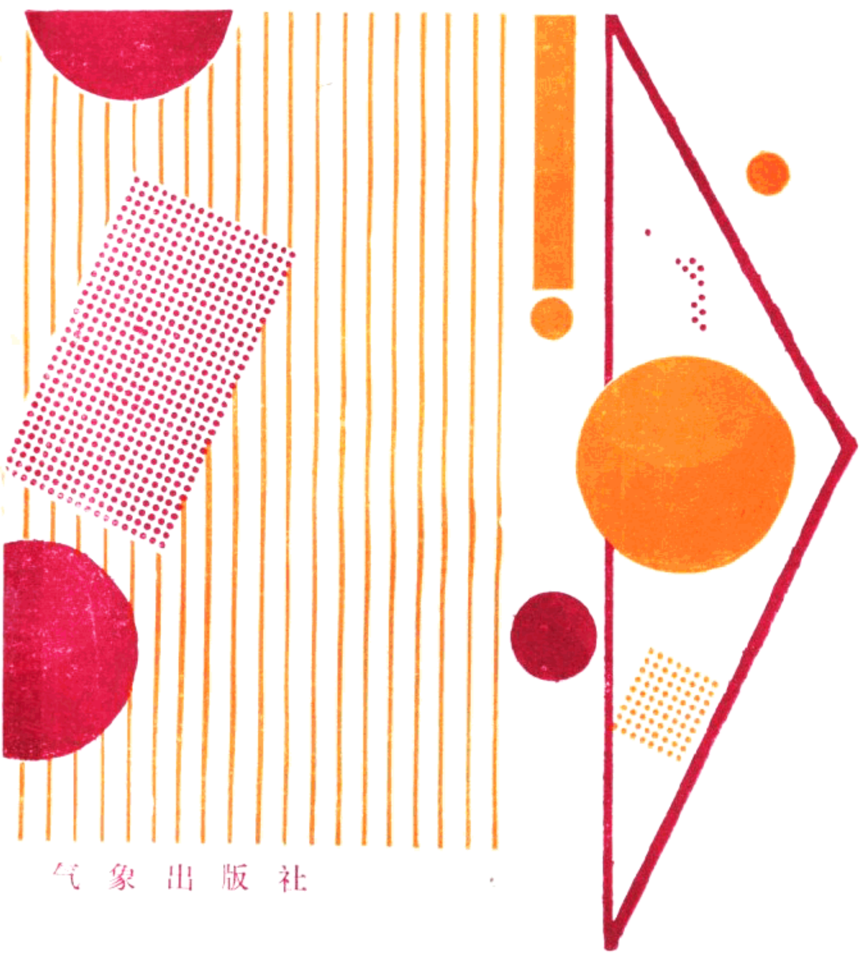
# 高中数学解题方法

## 几何

金耀先　程志国　主编



气象出版社

高中数学解题方法－几何
（青年自学用书）
金耀先　程志国　主编

气象出版社出版发行
（北京西郊白石桥路 46 号）
石家庄市塔冢印刷厂印刷

开本:1/32　印张:17.625　字数:378 千字
1991 年 1 月第一版　1991 年 1 月第一次印刷
印数:1－8000　定价:5.40 元

ISBN7－5029－0644－4/G·0103

# 前　言

为了帮助高、初中学生、自学数学的知识青年、职工干部，以及中学数学教师巩固并熟练掌握数学基础知识，提高逻辑思维能力，简捷地掌握解数学题的一般方法和某些特殊技巧，我们编写了这套《中学数学解题方法》。

本套书每章均有“基础知识”、“解题方法”、“习题”和“解答”四部分，重点是“解题方法”。本套书围绕各类问题的典型方法精选了有代表性的例题，例后的“注”中有对方法的解释与总结。本套书所介绍的方法以教材为基础，但又高于教材、深于教材，旨在巩固知识，深化思维，拓宽思路。各章所列方法既有一般方法，又有技巧性的方法，以期使读者在总结规律的基础上锤炼解题技艺。每章后面的习题均与方法呼应，起到巩固作用。

由于我们水平有限，不妥之处恳请读者批评指正。

主编：金耀先、程志国

编者：臧树楠、辛晓明

崔振中、杨明林　　　　1989 年 8 月

# 目　　录

## 立　体　几　何

## 解 析 几 何

# 立 体 几 何

# 第一章 直线和平面

## 基 础 知 识

### 一、平面

**1. 平面的概念**

平面是不定义的最基本的概念，常见的桌面、黑板面、平静的水面都给人以平面的形象.但是我们所见到的“平面”，只是几何里的平面的一部分，几何里所说的平面是无限延展的.

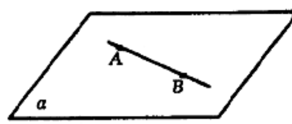



图 1-1

**2. 平面的基本性质**

**公理 1** 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.如图 1-1.

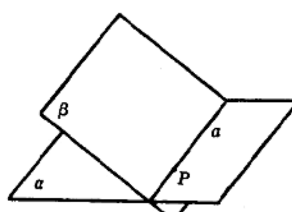



图 1-2

**公理 2** 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共

直线. 如图 1–2.

**公理 3** 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面. 如图 1–3.

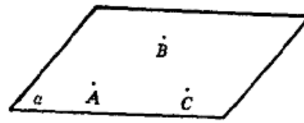



图 1–3

**推论 1** 经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面. 如图 1–4.

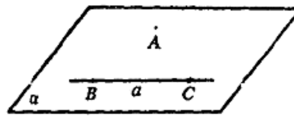



图 1–4

**推论 2** 经过两条相交直线，有且只有一个平面. 如图 1–5.

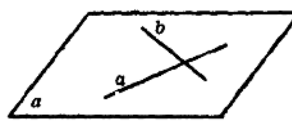



图 1–5

**推论 3** 经过两条平行直线，有且只有一个平面. 如图 1–6.

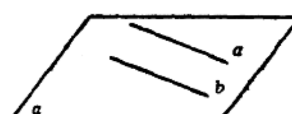



图 1–6

## 二、空间两条直线

### 1. 两条直线的位置关系

(1) 相交直线——在同一个平面内，有且只有一个公共点；

(2) 平行直线——在同一个平面内，没有公共点；

(3) 异面直线——不同在任何一个平面内，没有公共点.

### 2. 平行直线

**公理 4** 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

**等角定理** 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同,那么这两个角相等.

**推论** 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角或直角相等.

**3. 异面直线**

(1) 异面直线的判定定理

平面内一点与平面外一点的连线,和平面内不经过该点的直线是异面直线. 如图 1–7.

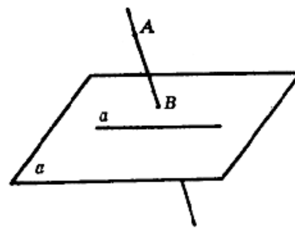



图 1–7

(2) 平面直线所成的角　直线 $a$ 和 $b$ 是异面直线,经过空间任意一点 $O$,分别引直线 $a'$、$b'$,使 $a' \parallel a$, $b' \parallel b$,那么我们就把直线 $a'$和 $b'$的所成的锐角(或直角)叫做异面直线 $a$ 和 $b$ 所成的角. 如果两条异面直线所成的角是直角,我们就说这两条异面直线互相垂直.

(3) 两条异面直线的公垂线和距离　**我们把和两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线. 把两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长叫做两条异面直线的距离.**

## 三、空间直线和平面

**1. 直线和平面的位置关系**

(1) 直线在平面内——有无数个公共点;

(2) 直线和平面相交——有且只有一个公共点;

(3) 直线和平面平行——没有公共点.

图 1-8 是表示这三种位置关系的图形.

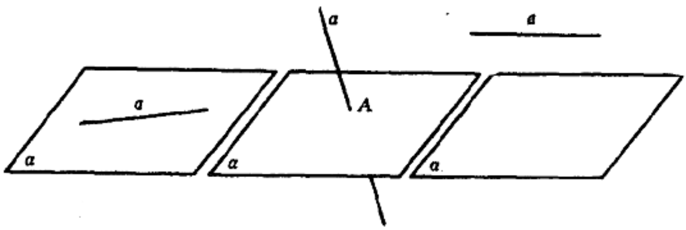



图 1-8

**2. 直线和平面平行**

(1) 直线和平面平行的判定定理　如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

(2) 直线和平面平行的性质定理　如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.

**3. 直线和平面垂直**

(1) 定义　如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，我们就说这条直线和这个平面互相垂直，直线叫做平面的垂线，平面叫做直线的垂面，平面的垂线与平面的交点叫做垂足.

(2) 直线和平面垂直的判定定理

1) 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直、那么这条直线垂直于这个平面.

2) 如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另

一条也垂直于同一个平面.

(3) 直线和平面垂直的性质定理　如果两条直线同垂直于一个平面,那么这两条直线平行.

(4) 点到平面的距离与直线和平面的距离

从平面外一点引一个平面的垂线,这个点和垂足间的距离叫做这个点到这个平面的距离.

一条直线和一个平面平行,这条直线上任意一点到平面的距离,叫做这条直线和平面的距离.

**4. 直线和平面斜交**

(1) 斜线　一条直线和一个平面相交,但不和这个平面垂直,这条直线叫做这个平面的斜线,斜线和平面的交点叫做斜足.斜线上一点与斜足间的线段叫做这点到这个平面的斜线段.

(2) 射影　自一点向平面引垂线,垂足叫做这点在这个平面上的射影.这个点与垂足间的线段叫做这点到这个平面的垂线段.

过斜线上的一点向平面引垂线,过垂足和斜足的直线叫做斜线在这个平面上的射影,垂足与斜足间的的线段叫做这点到平面的斜线段在这个平面上的射影.

(3) 射影长定理　从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中,射影相等的两条斜线段相等,射影较长的斜线段也较长;相等的斜线段的射影相等,较长的斜线段的射影也较长;垂线段比任何一条斜线段都短.

(4) 直线和平面所成的角　平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角,叫做这条直线和这个平面所成的角.一条直线垂直于平面,我们说它们所成的角是直角;一条直线和平面平行,或在平面内,我们说它们所成的角是 $0^{\circ}$ 的角.

**定理** 斜线和平面所成的角，是这条斜线和平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的角.

(5) 三垂线定理 在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.

三垂线定理的逆定理 在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直.

## 四、空间两个平面

**1. 两个平面的位置关系**

(1) 两个平面平行——没有公共点；

(2) 两个平面相交——有一条公共直线；

**2. 两个平面平行的判定和性质**

(1) 两个平面平行的判定定理

1) 如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

2) 垂直于同一条直线的两个平面平行.

(2) 两个平面平行的性质定理

1) 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

2) 两个平面平行，其中一个平面内的直线必平行于另一个平面.

**3. 平行平面的公垂线和距离**

和两个平行平面同时垂直的直线，叫做这两个平行平面的公垂线，它夹在这两个平行平面间的部分，叫做这两个平行平面的公垂线段. 这两个平行平面的公垂线段的长度叫做两个平行平面的距离.

**4. 二面角**

(1) 二面角的定义

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角.如图1–9. 这条直线叫做二面角的棱. 这两个半平面叫做二面角的面.

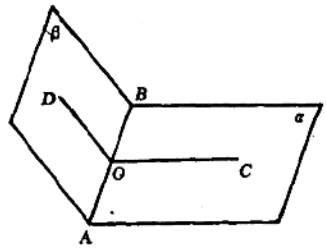


图 1–9

(2) 二面角的平面角

以二面角的棱上任意一点为端点, 在两个面内分别作垂直于棱的两条射线, 这两条射线所成的角叫做二面角的平面角. 如图 1–9.

平面角是直角的二面角叫做直二面角.

5. 两个平面互相垂直

(1) 两个平面互相垂直的定义　两个平面相交, 如果所成的二面角是直二面角, 就说这两个平面互相垂直.

(2) 两个平面垂直的判定定理　如果一个平面经过另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面互相垂直.

(3) 两个平面垂直的性质定理

1) 如果两个平面垂直, 那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

2) 如果两个平面互相垂直, 那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线, 在第一个平面内.

# 解 题 方 法

## 一、空间图形的画法

### 1. 斜二测画法

**例 1** 画二面角的直观图.

画法：如图 1–10.

(1) 作 $\angle CBE$，边 $BC$、$BE$ 取适当长.

(2) 沿适当方向画二面角的棱 $AB$ 为适当长.

(3) 过 $C$、$E$ 画出与 $AB$ 平行且相等的线段 $CD$、$EF$.

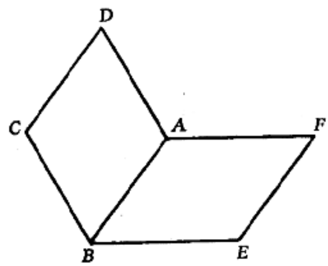



图 1–10

(4) 连结 $AD$、$AF$.

则二面角 $C$–$AB$–$F$ 即所求.

**注:** 在画二面角的直观图时，关键是画好$\angle CBE$和棱 $AB$，其中$\angle CBE$决定了二面角的大小；$AB$ 决定了两个半平面的位置.

### 2. 迹线法

**例 2** 已知：$M$、$N$ 分别是四面体 $ABCD$ 的棱 $AD$ 和 $CD$ 的中点，$P$ 是棱 $BC$ 上任一点.

求作：过 $M$、$N$、$P$ 三点的截面.

**作法一:** 如图 1–11.

(1) 连结 $MN$.

(2) 过 $N$、$P$ 作直线与 $DB$ 的延长线交于 $O$.

(3) 连结 $OM$ 交 $AB$ 于 $Q$.

(4) 连结 $PQ$. 则四边形 $MNPQ$ 即所求截面.

作法二：(1) 连结 $MN$.

(2) 在平面 $ABC$ 内过 $P$ 作 $PQ \parallel CA$ 交 $AB$ 于 $Q$.

(3) 连结 $PN$、QM. 则四边形 $MNPQ$ 即所求截面.

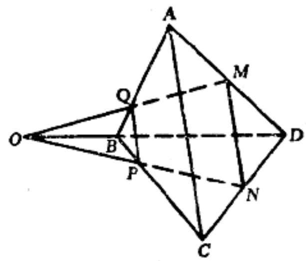


图 1-11

**注:** 用迹线法画截面时, 关键是画出截面与所给几何体的交线. 确定交线的依据是公理 2, 即如果两个平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线. 如果能找到两个平面的两个公共点, 那么就可以断定这两个平面的交线是经过这两个公共点的直线.

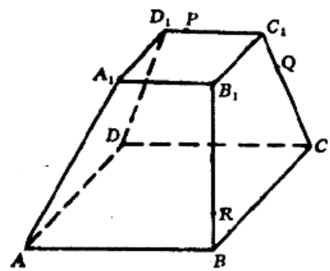
作法二中因为 $M$、$N$ 是 $AB$、$CD$ 中点, 故 $AC$ 平行于 $MN$, 所以 $AC$ 平行于过 $MNP$ 三点的截面. 因此过 $AC$ 的平面 $ABC$ 与截面 $MNP$ 的交线与 $AC$ 平行, 又平面 $ABC$ 与截面有一个公共点 $P$, 所以过 $P$ 作 $PQ \parallel CA$, $PQ$ 就是平面 $ABC$ 与截面的交线. 可见作两个平面的交线, 可以利用直线与平面平行的性质.

## 练 习 一

1. 画出二相交平面的直观图.

2. 已知 $M$、$N$ 分别是四面体 $ABCD$ 的棱 $AC$、$CD$ 上的点,过 $M$、$N$ 截面与棱 $BC$ 平行.

3. 如图,$P$、$Q$、$R$ 为四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 $D_1C_1$、$C_1C$、$B_1B$ 上的点,过 $P$、$Q$、$R$ 三点作棱台的截面.

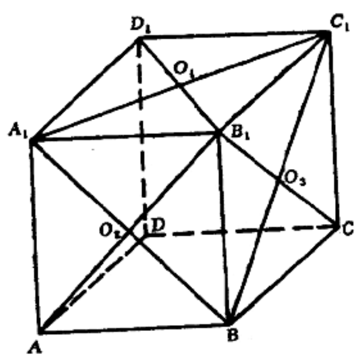



(第3题)

4. 如图,已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

(1) 画过正方体相交于一个顶点的三个面的中心 $O_1$、$O_2$、$O_3$ 的截面.

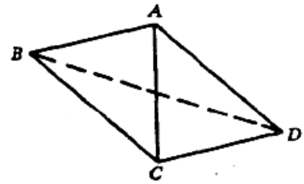
(2) 画过正方体对角线 $A_1C$ 的中点 $O$,且与 $A_1C$ 垂直的截面.




(第4题)

(3) 画过正方体棱 $C_1D_1$、$AA_1$、$BC$ 中点 $P$、$Q$、$R$ 的截面.

5. 用平行于四面体 $ABCD$ 一组对棱 $AC$、$BD$ 的平面截此四面体，得一截面.




(第 5 题)

(1) 画出这个截面，此截面是什么图形.

(2) 若 $AC=BD$ 能截得菱形吗？怎样截？

(3) 若 $AC\neq BD$ 能截得菱形吗？

(4) 在什么情况下能截得矩形？

(5) 在什么情况下能截得正方形？

(6) 若 $AC=a, BD=b, AC$ 与 BD 成 $\theta$ 角，问当 $\theta$ 为何值时能使截面有最大面积，此时应该怎样截取？

## 二、共点、共线、共面问题的证明

### 1. 综合法

(1) 重合法

**例 1** 四面体 $ABCD$ 中，$E$、$F$、$G$、$H$、$M$、$N$ 为各棱的中点，求证：每相对两棱中点连线 $EG$、$FH$、$MN$ 相交于一点，且被此点平分.

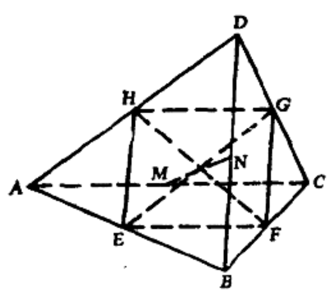



图 1–12

**证明：** 如图 1–12，连结 $EF$、$FG$、$GH$、$HE$.

$\because E$、$F$、$G$、$H$ 为

$AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 中点，

$\therefore EF \parallel AC$、$GH \parallel AC$

且$EF=\frac{1}{2}AC, GH=\frac{1}{2}\cdot AC.$

$\therefore$四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

$\therefore$对角线 $EG$、$FH$ 必相交且互相平分，设交点为 $O$.

同理可证，$EG$、$MN$ 必相交且互相平分，设交点为 $O'$.

$\therefore$点 $O$ 与 $O'$重合.故三线交于一点，且平分.

(2) 交集法

**例 1** 如果 1-13，一个平面截空间四边形 $ABCD$ 所得四个交点 $E$、$F$、$G$、$H$ 是一个梯形的顶点，求证：梯形两腰 $EH$、$FG$ 和对棱 $AC$ 必交于一点.

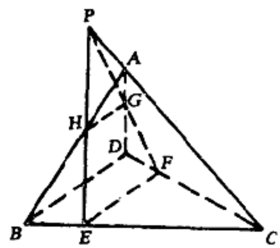



图 1-13

**证明：**$\because EH$、$FG$ 是梯形两腰，$\therefore EH$、$FG$ 必相交，设交点为 $P$.

$\because EH\subset$平面 $ABC$.

$FG\subset$平面 $ACD$,

且 $P$ 是 $EH$、$FG$ 的交点，$\therefore P$ 在平面 $ABC$ 与平面 $ACD$ 的交线上.

即直线 $EH$、$FG$、$CA$ 相交于一点 $P$.

**注：**以上二题是三条直线共点问题，一般有两种方法证明.

① 确定两条直线的交点，然后证这点在另一条直线上.

② 先证直线 $L_1$ 与 $L_2$ 交于一点 $O$，再证 $l_2$ 与 $l_3$ 交于一