不等式入门

E.贝肯巴赫　R.贝尔曼　著

文　丽　译

北京大学出版社

不等式入门

E·贝肯巴赫　R·贝尔曼　著
文　丽　译
责任编辑　徐信之

*

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　5印张　93千字
1985年2月第一版　1985年2月第一次印刷
印数：00001—40,000册

统一书号：13209·96　定价：0.~~85~~元
90

内 容 提 要

不等式与各个数学分支都有密切的联系，本书是关于不等式的一个导引。作者从“大于”、“小于”关系以及数的“绝对值”的意义开始，逐步引入一些分析学中最常用、最基本的不等式；并利用这些结果去讨论一些有趣的极大与极小问题；最后，对欧氏距离的概念作了推广，并介绍了一些非欧几里得距离。

本书写得深入浅出、生动直观、有趣而富有启发性，适合于广大高中学生、大学低年级学生课外阅读。这本书也可以作为中学数学教师、师范院校数学教师以及有关科学工作者的参考书。

Edwin Beckenbach　　Richard Bellman

AN INTRODUCTION TO INEQUALITIES

美国“新数学丛书”选译书目

（标△号者表示已经出版或即将出版）

拓扑学的首要概念	陈锡驹 N.E. 斯梯罗特 著	江泽涵 蒋守方 译
	（上海科学技术出版社出版）	
从毕达哥拉斯到爱因斯坦	K.O. 弗里德利希 著	张恭庆 译
科学中的数学方法	G.波利雅 著	邓东皋 译
数学中的智巧 △	R.亨斯贝尔格 著	李 忠 译
有趣的数论 △	O.奥尔 著	潘承彪 译
连分数 △	C.D.奥尔德斯 著	张顺燕 译
无限的用处	L.兹平 著	应隆安 译
不等式入门 △	E.贝肯巴赫 R.贝尔曼 著	文 丽 译
几何不等式	N.D.卡扎里诺夫 著	刘西垣 译
几何学的新探索 △	H.S.M.考克瑟特 S.L.格雷策 著	陈维桓 译
几何变换 Ⅰ	U.M.亚格龙 著	尤承业 译
几何变换 Ⅱ	U.M.亚格龙 著	詹汉生 译
几何变换 Ⅲ	U.M.亚格龙 著	章学诚 译
几何变换 Ⅳ	U.M.亚格龙 著	姜伯驹 译
选择的数学	I.尼温 著	程乾生 译
早期数学史选篇	A.艾鲍 著	周民强 译

序　　言

有人把数学称为同义反复的科学，也就是说，有人指责数学家花费时间去证明那些等同于自身的东西。这种说法（恰如其分地说，这是一个哲学家说的）有两点是很不准确的：第一，虽然数学只是自然科学的语言而不是一门自然科学，但是，确切地说，它是一种创造性的艺术；第二，数学的基本结果往往是一些不等式而不是等式。

下面我们介绍不等式理论的三个方面。首先，第一、二、三章介绍公理。其次，第四章利用前几章的结果导出分析学中几个基本不等式，这些不等式是被数学家们所一再使用的。第五章说明怎样利用它们来推导几何学中初等对称图形的一些有趣而又重要的极大、极小性质，这些图形包括：正方形、立方体、等边三角形等等。最后，第六章研究距离的某些性质，并给出几种不常见的距离函数。

这本书是为有多种口味的人写的，其中的材料可以按顺序去读，也可以分开来读。有些读者想要了解对于高等数学来说是很基本的那些公理方法，他们会喜欢前三章。此外，在第三章里还有许多与不等式相联系的带启发性的图形。另外一些读者宁愿暂时认为这些结果都是理所当然的而直接转向更多的分析学的结论，他们会发现第四章是合口味的。也有些读者对于一题多解感兴趣，喜欢用初等不等式解决那些通常要依靠微积分去讨论的问题，第五章可以满足他们的需要。对于推广概念和结果有兴趣的读者，则会欣赏第六章所描述的对于一些奇怪的非欧几里得距离的分析。

被这本书的材料激起了求知欲的读者，可以去读一本论述本专题的经典著作：哈代等著的《不等式》一书[1]。还有一本比较近代的、包含不同类型结果的著作是E. 贝肯巴赫和R. 贝尔曼的《不等式》(Inequalities, by E.F. Beckenbach and R.Bellman, Ergebnisse der Mathematik, Julius Springer Verlag, Berlin, 1961)。

E. 贝肯巴赫　R. 贝尔曼

圣他·慕尼卡　加利福尼亚　1960年

---

① 赵民义译，不等式，科学出版社，1965年3月。——译者

致 读 者

这本书是专业数学家编写的一套丛书中的一本。编写这套书的目的是要向广大的中学生和非专学数学的外行人把一些重要的数学概念说明得有趣且能懂。“新数学丛书”中的大多数书所讨论的课题通常不属于中学课程表的范围．各书的难易程度不同，甚至在同一本书里，有些部分就比其它部分更需要全神贯注才能读懂。虽然读者要懂得这套丛书中的大多数书，并不需要多少专门知识，但是他必须动一番脑筋。

如果读者从来只在课堂上才遇到数学，那他就应该牢记：数学书不能读得很快。他也一定不要期望，读第一遍的时候就能理解书的全部内容。复杂的部分他应该自由地跳过去，以后再回过头来读；一个论点常常是通过后面的话才能搞清楚。另一方面，内容十分熟悉的一些节可以读得很快。

学数学的最好办法是“做数学”；每一本书都包含问题，其中有些可能需要很可观的思考。劝告读者养成读书时手边备有纸和笔这一习惯，这样读，他会越来越觉得数学有趣味。

这套书的编印是一种新的冒险。我们愿在此中明并致谢，在准备这套书时，许多位中学师生曾慷慨协助。编辑者欢迎读者提出意见。请函告 Editorial Committe of the NML series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N.Y. 10012.

编辑者

目　　录

第一章 基本原理

1.1 关系式“大于”

我们知道，记号“>”是“大于”的意思，因此很容易回答这个问题：3>2对吗？当然，这是对的。

那么，“−3>−2”对不对呢？大家都说−3是比−2“负得多”的数，但是这样说并没有正面回答问题。

实数(包括零，正、负有理数及正、负无理数)之间的大小关系到底是怎样确定的呢？通常，我们在几何上是这样做的：取一根指向右方的水平刻度尺作为实数轴，用它上面的点来表示实数，这样便在实数与实数轴上的点之间建立了一一对应的关系。按照规定，这些点从左到右依次出现时，它们所表示的实数便从小到大变化。如图1.1所示。

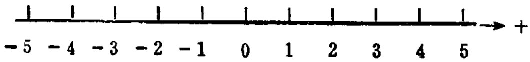

图1.1 实数轴

由于点−2位于点−3的右边，因此−2>−3。同样，有

$$4>-4,\quad 3>2,\quad 0>-2,\quad -1>-2,\quad 1>0. \tag{1.1}$$

一般说来，我们有以下确定实数之间不等式关系的几何规则：

假设 a，b 为任意两个实数，将它们用实数轴上的点来表示，那么当且仅当点 a 位于点 b 的右边时，实数 a，b 之间有关系 $a>b$。

根据这一几何规则，便知“−3>−2”是不对的。

用代数方法处理不等式往往比用几何方法更加有效，甚至更为必要。按照正数的基本概念，上述几何法则有等价的简单的代数定义：

定义 若 a 与 b 是任意两个实数，则当且仅当 $a-b$ 是一个正数时，有 $a>b$。

例如，若 $a=-2$，$b=-3$，则$a-b=-2-(-3)=1$ 是正数，因此 $-2>-3$，这与利用上述几何法则所得出的结论是一致的。大家还可以用现在的代数方法(即相减的方法)去检查(1.1) 中的不等式。最后，请利用几何及代数两种方法验证下列不等式：

$$\pi>3,\ 2>0,\ 1>-9,\ \sqrt{2}>1,\ -\frac{1}{2}>-40.$$

1.2 正数集合，负数集合及零集合

上一节根据正数定义了不等式 $a>b$。大家将会看到，正数集合 P，负数集合 N，以及只有一个元素 0 的特殊集合 O 在不等式的研究中起着很基本的作用。此外，实数系的代数(域) 性质，例如交换律、结合律及分配律也都随时要用到。我们这本小册子的一个基本论点是：实数系的所有次序关系——一切代数不等式——是建立在正数集合 P 的两条简单公理之上的。我们在下一节再来介绍这些公理。

我们把“a 是正的”用符号“$a\in P$”来表示，读作“a 是集合 P 的一个元素”。例如$5\in P$，$0\in O$，$-3\in N$。

下面，我们来粗略地看一看集合 P，N，O 以及它们的元素。

数零是集合 O 的唯一元素；对于任何实数 a，0 满足等式

$$a+0=a.$$

关于负数集合N，重要的是区别开下面两个概念：一个负数与一个数的相反数。

数a的相反数$-a$是这样定义的：

$$a+(-a)=0.$$

例如，若$a=-3$，则a的相反数$-a$就是$-(-3)=3$，这是因为有$(-3)+(3)=0$。同样，若$a=0$，则因为$0+0=0$,所以$-a=0$。

负数则定义为正数的相反数。$3,1/2,9/5,\pi,\sqrt{2}$都是正数，因此$-3,-1/2,-9/5,-\pi,-\sqrt{2}$都是负数。

我们不想去定义什么是正数，只打算用两条基本公理来刻划它们。

1.3 基本不等式公理

下面几个关于正数集合P的简单命题，是不加证明地叙述出来的，因此，我们称它们为公理。值得注意的是，对于不等式理论来说，这些公理以及大家所熟悉的关于实数系[①]的代数结构，是所需要的仅有的几个命题。

公理Ⅰ 若a为实数，则下述论断有且只有一个成立：a是集合O的唯一元素；a是正数集合P的一个元素；$-a$是集合P的一个元素。

公理Ⅱ 若a,b是正数集合P的两个元素，则$a+b$与ab也是集合P的元素。

公理Ⅰ中的三种可能性说明，任意一个实数a与其相反数$-a$之间有如下关系：若a是零，则$-a$也是零；若a是

① 见第8页后面的注。

正数，则根据上述关于负数的定义，$-a$ 就是负数；若 $-a$ 是正数，则由负数定义，$a=-(-a)$ 必是负数。于是 a 与 $-a$ 的关系可以用表 1 列出。

表 1　数对 a 与 $-a$

数	集合		
a	P	N	0
$-a$	N	P	0

在几何表示(图1.1)中，代表 a 与 $-a$ 的点，要么与代表数 0 的点重合，要么位于与此点相对的两侧。

1.4　公理 I 的重述

如上所述，公理 I 与正数集合 P 有关，而不等式 $a>b$ 则是用 $a-b$ 为正数来定义的，也与集合 P 有关，因此，我们可以用不等式语言来重述公理 I。

若 a,b 是实数，则 $a-b$ 也是实数；对 $a-b$ 应用公理 1，便知或者 $(a-b)\in O$(即 $a=b$)，或者 $(a-b)\in P$(即 $a>b$)，或者 $-(a-b)=(b-a)\in P$(即 $b>a$)。这三种可能性是互相排斥的。于是得到公理 I 的推论：

公理 I′　若 a，b 为实数，则下列关系式有且只有一个成立：

$$a=b,\quad a>b,\quad b>a.$$

特别说来，当 $b=0$ 时，公理 I′ 表明，若 a 为实数，则下面三个论断有且只有一个成立：$a=0$(即 $a\in O$)；$a>0$ (即 $a\in P$)；$0>a$(即 $-a\in P$)。这就说明了从公理 I′ 可以推出**公理 I**。

如果从命题 T 能推出命题 S，即 S 是 T 的推论，那么我

们就说"T 蕴涵 S"．如果两个命题彼此互相蕴涵，那么就说它们是等价的．从上面的讨论知道，公理Ⅰ蕴涵公理Ⅰ′，同时公理Ⅰ′也蕴涵公理Ⅰ，因此，公理Ⅰ与公理Ⅰ′等价，公理Ⅰ′也就是公理Ⅰ的重述．

下面举例说明公理Ⅰ与公理Ⅰ′．考虑数 $a_1=3$，$a_2=-4$，$b_1=0$，$b_2=3$．

显然，$a_1\in P,-a_2\in P,b_1\in O,b_2\in P$；$a_1\overline{\in}O$（读作"$a_1$ 不是集合 O 的元素"），$-a_1\overline{\in}P$，等等，即公理Ⅰ成立．

为了说明公理Ⅰ′，注意到

$$
\begin{array}{lll}
a_1-b_1=3-0=3, & a_1-b_1>0, & a_1>b_1; \\
a_1-b_2=3-3=0, & a_1-b_2=0, & a_1=b_2; \\
a_2-b_1=-4-0=-4, & b_1-a_2>0, & b_1>a_2; \\
a_2-b_2=-4-3=-7, & b_2-a_2>0, & b_2>a_2,
\end{array}
$$

便知公理Ⅰ′所说的三种关系有且只有一个成立．下一节我们还将向读者介绍所谓附加的不等式关系，并用来表达公理Ⅰ′．

1.5 附加的不等式关系

不等式 $b>a$ 可以写成 $a<b$，读作"a 小于 b"．这两个不等式是完全等价的，而且一般说来，并非这一个总是比那一个更为可取．在上面举例说明公理Ⅰ′时，为了一致起见，我们自始至终都用记号"$>$"．不过，今后更常用的办法是把字母 a 一致地写在字母 b 前面，这样就有

$$a_1>b_1,\quad a_2=b_2,\quad a_2<b_1,\quad a_2<b_2. \tag{1.2}$$

类似地，还有

$$
\begin{array}{lllll}
-4<4, & 2<3, & -2<0, & -2<-1, & 0<1, \\
3<\pi, & 0<2, & -9<1, & 1<\sqrt{2}, & -40<-1/2.
\end{array}
$$

在这里，记号“$>$”与“$<$”都表示严格不等式。

在不等式研究中，还需考虑两个关系式，这就是混合不等式 $a \geqslant b$ 与 $a \leqslant b$，分别读作“a 大于或者等于 b”及“a 小于或者等于 b”。关系式 $a \geqslant b$ 是指：或者 $a > b$，或者 $a = b$；例如，$3 \geqslant 2$，$2 \geqslant 2$。关系式 $a \leqslant b$ 是指：或者 $a < b$，或者 $a = b$；例如 $1 \leqslant 2$，$2 \leqslant 2$。

(1.2)式表明，在每个例子中，公理Ⅰ′中三个关系式有一个是成立的。公理Ⅰ′则进一步断言，这些关系式也只有一个成立。因此，还应当加上这样一些论断：

$$a_1 \nleqslant b_1, \quad a_1 \ngeqslant b_2, \quad a_2 \ngeqslant b_1, \quad a_2 \ngeqslant b_2, \qquad (1.3)$$

读作“a_1 既不小于也不等于 b_1”等等。

读者会觉得象(1.3)中的这些反面叙述是多余的，这是由于大家都认为公理Ⅰ或公理Ⅰ′中的互相排斥的原则（即“有一个且只有一个”）是理所当然的事实。因此沒有人会说(1.2)所包含的信息不完整，还要象(1.3)那样把否定的关系式全部写出来。

根据互相排斥的原则，(1.2)和(1.3)中的相应关系式显然是等价的；即从一个可以推出另一个。但是尽管如此，一个不等式的否定往往还是很有用处的。

如果将两种记号“$>$”和“$<$”混着用，那么记号较大的(开的)一端朝着较大的数，较小的(尖的)一端朝着较小的数。

1.6 包含着负数的乘积

一个正数与一个负数的乘积是什么样的数？两个负数的乘积又是怎样的数呢？我们可以用公理Ⅰ，Ⅱ和它们的一些推论来回答这些问题。

若 $a\in P, b\in N$，则由表1知 $-b\in P$，再由公理Ⅱ，便知 $a(-b)\in P$。从而由负数的定义得到 $-[a(-b)]\in N$。又由代数法则可知，减号与圆括号可以交换，于是 $-[a(-b)]=-[-(ab)]=ab$，即

$$-[a(-b)]=ab.$$

因此 $ab\in N$。于是得到下面的结果：

定理1.1 正数与负数的乘积是负数。

类似地，若 $a\in N$，$b\in N$，则由表1知 $-a\in P$，$-b\in P$。再由公理Ⅱ，乘积 $(-a)(-b)\in P$。但是根据代数法则，$(-a)(-b)=ab$，因此 $ab\in P$。从而得到结果：

定理1.2 两个负数的乘积是正数。

特别地，由定理1.2及公理Ⅱ知，任何不为零的实数的平方是一个正数。当然，$0^2=0$。这样我们便得到了不等式理论中的一个最简单、最有用的结果：

定理1.3 任何实数 a 满足不等式 $a^2\geqslant 0$。当且仅当 $a=0$ 时，等号成立。

1.7 "正"数及"负"数

到目前为止，公理Ⅰ和公理Ⅱ的威力已经显示出来了。其实它们的威力还不止于此。我们就会看到，利用公理Ⅰ和公理Ⅱ，可以断定非零实数中哪一个是正的，哪一个是负的。假如你们过去还不知道这些事的话，那也许会对下面的讨论感兴趣。

我们暂时用引号内的"正"和"负"来表示这些结果。

现在从 $a=1$ 开始。$a\neq 0$，由定理1.3，$a^2>0$，即 a^2 是"正"数。又 $a^2=1^2=1$，因此1是"正"数。

再看 $a=2$。已经断定1是"正"数，而 $1+1=2$，于是

由公理Ⅱ知，两个“正”数的和即2是“正”数。

令 $a=1/2$；则 $2a=1$。即“正”数2与数 a 的乘积是“正”数1。但是，若 a 是“负”数，则由定理1.1，2与 a 的乘积就是“负”数；这是不可能的。因此 $a=1/2$ 必是“正”数。

这样，数1,2,1/2都是“正”数,从而由表1知 -1，-2，$-1/2$都是“负”数。

继续下去，我们不难说明整数3,4等等；分数1/3,1/4等等；以及分数2/3,4/3,3/4,5/4等等都是“正”数，相应的 -3，-4，$-1/3$等等都是“负”数。从而对于任何一个非零有理数，我们都能断定它是“正”数还是“负”数。

利用上面关于有理数的判断以及定义无理数的极限方法，我们就能确定任何给定的无理数在完备的有序实数域①中究竟是“正”数还是“负”数。本书不打算详细讨论无理数，如果读者有兴趣，那么可以去读这套丛书中的《数：有理数与无理数》(Number: Rational and Irrational),作者：伊凡·尼温(Ivan Niven)。

习 题 一

1．在指向右方的水平刻度尺即实数轴上，作一个草

---

① 有序指：满足公理Ⅰ和公理Ⅱ。完备指以下基本性质：一个非空的实数集合如果有上界，那么必有最小上界。例如，$\sqrt{2}$的有理数近似值组成的集合{1,1.4,1.41,…}有上界2或1.5；因此有最小上界,我们把它记作$\sqrt{2}$。在实数轴（见图1.1）上，表示此最小上界的点把该轴分为左边部分与右边部分。既然左边部分至少有一个正的有理数（例如1或1.4),因此$\sqrt{2}$是“正”数。在第1.7节中,我们已经证明有理数可以用唯一的方式排出次序,因此，实数也可以用唯一的方式排出次序。当我们通过有理数去定义实数时,总要利用这种完备有序的性质。因此我们把它当作实数系的一个公设,而不作为不等式理论中的公理Ⅲ。

图，表示出以下各点：

$$3,\quad -1,\quad 0,\quad -1.5,\quad \pi-3,$$
$$3-\pi,\quad \sqrt{2},\quad 2,\quad -2,\quad -3.$$

并按依次增加的顺序，用形如 $a<b<c$ 等等的连续不等式将这些数重新写出来。

2. 如果结论有错，就请将 $\in$ 改为 $\overline{\in}$：

(a) $-3\in N$； (b) $0\in P$；

(c) $5\in O$； (d) $\sqrt{2}\in N$；

(e) $(\pi-3)\in P$； (f) $a^2\in N$；

(g) $(a^2+1)\in P$； (h) $-2^2\in P$；

(i) $(a^2+1)\in O$； (j) $-3\in P$。

3. 用 P，N 或 O 填空：

(a) $\frac{48}{273}-\frac{49}{273}\in$ ____； (b) $\frac{721}{837}-\frac{721}{838}\in$ ____；

(c) $\frac{-23}{32}-\frac{-25}{32}\in$ ____； (d) $\frac{-23}{32}-\frac{-23}{33}\in$ ____；

(e) $\frac{-1}{-2}-\frac{1}{-2}\in$ ____； (f) $7^2-4(2)(6)\in$ ____；

(g) $93\left(72+\frac{1}{2}\right)-93(72)\in$ ____；

(h) $93\left(72-\frac{1}{2}\right)-93(72)\in$ ____；

(i) $\frac{2+3}{4+5}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{5}\right)\in$ ____；

(j) $(-3)^2-3^2\in$ ____。

4. 用 $>$，$<$ 或 $=$ 填空：