21世纪高等院校选用教材

非数学专业

哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

工科数学分析

下 册

哈尔滨工业大学数学系 组编

张传义 包革军 张 彪 编

科学出版社

21世纪高等院校选用教材(非数学专业)

哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

工 科 数 学 分 析

下 册

哈尔滨工业大学数学系 组编

张传义　包革军　张　彪 编

科 学 出 版 社

2001

内 容 简 介

本书是国家工科数学教学基地之一的哈尔滨工业大学数学系，根据数学教学改革成果而编写的系列教材之一．全书分上、下两册，本书为下册，包括四章，依次是：级数，多元函数的微分学，多元函数的积分学，向量值函数的积分．

与传统的“高等数学”相比，本书加强了基础理论的阐述，在内容上更加注重对学生抽象思维和逻辑上严谨论证的训练，对于培养学生独立思考与创新意识的提高也有相应的要求．

本书适合作本、硕连读生和对数学有较高要求的非数学专业本科生的教材，本书也可作为准备考研人员和工程技术人员的参考书；若略去部分理论较强的内容，也可作为一般工科专业的微积分教材．

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析．下册/张传义，包革军，张彪编．—北京：科学出版社，2001.9

(21世纪高等院校选用教材(非数学专业))

ISBN 7-03-009642-8

Ⅰ．工…　Ⅱ．①张…②包…③张…　Ⅲ．数学分析-高等学校-教材　Ⅳ．O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第051567号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2001年9月第一版　开本：720×1000　1/16

2001年9月第一次印刷　印张：21 1/4

印数：1—7 000　字数：385 000

定价：54.00元(上、下册)

目　　录

第五章　级　　数

级数与极限密切相关，是数学分析的主要组成部分之一．级数不仅在理论上重要，它还在科学技术中有广泛的应用．级数分为数值级数与函数项级数．数值级数是函数项级数的特殊情况，又是研究函数项级数的基础．本章首先讨论数值级数的基本理论．

§5.1　级数的敛散性

5.1.1　收敛与发散的概念

设给定了一个数列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots. \tag{1.1}$$

把(1.1)的项依次用加号‘＋’形式上连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1.2}$$

称为**级数**，简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其中 u_n 称为级数的**一般项**，或**通项**．

各项都是常数的级数，称为数值级数；以函数为项的级数，称为函数项级数．本节只讨论数值级数．

以前，我们只熟悉有限项相加，即有限和．例如

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

和 S_n 称为级数(1.2)的**部分和**，或**前 n 项和**．(1.2)是无限项相加，是一个形式上的无限和，它是否像有限和一样能表达一个确定的实数呢？极限的思想启发我们，去考虑级数(1.2)的部分和数列 $\{S_n\}$，由此引出下面的定义．

定义 1.1　若级数(1.2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则说**级数(1.2)收敛**，并称极限值 S 为该**级数的和**，记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots;$$

否则，说级数(1.2)**发散**，此时级数(1.2)没有和．

对于收敛级数(1.2)，称差

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为该级数的**余和**.显然有$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.所以,当 n 充分大时,可以用 S_n 近似地代替 S,其误差为$|r_n|$.

例 1.1　讨论**几何级数**(或称**等比级数**)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性.

解　该级数的部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

当$|q|<1$时,由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$

故该级数收敛,其和为$\dfrac{a}{1-q}$;当$|q|>1$时,由于$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在,故该级数发散.显然,当 $q=1$ 时级数也发散.再考虑 $q=-1$ 时的情况,此时级数变为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots,$$

由于它的部分和

$$S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数}, \\ a, & n \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

显然是一个发散数列,所以该级数发散.

综上所述,当$|q|<1$时,几何级数收敛,其和为$\dfrac{a}{1-q}$;当$|q|\geqslant 1$时,几何级数发散.

例 1.2　判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

的敛散性.

解　由于$\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$,所以,部分和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

故所讨论的级数收敛,其和为 1,其余和

$$r_n=1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}.$$

5.1.2 敛散性判别及收敛级数的性质

从级数的定义来看,每个级数都可以看成一种特殊形式的数列.另一方面,对于任何数列$\{S_n\}$,令

$$a_1=S_1,\quad a_2=S_2-S_1,\cdots,\quad a_n=S_n-S_{n-1},\cdots,$$

那么研究数列$\{S_n\}$的极限问题,也就是研究级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛问题.所以数列与级数两者之间是可以互相转化的.因此,关于极限的一般理论,我们可以毫不费力地直接从以前学过的数列极限的理论搬过来,但这并不意味级数是数列极限的简单重复.恰恰相反,正因为级数的特殊形式,它是有限和的推广,有鲜明的直观性,因此产生了一系列特殊的深刻的性质.

因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的收敛是用其部分和数列$\{S_n\}$来定义的,由数列的柯西收敛准则,数列$\{S_n\}$收敛的充分必要条件是:对于任意给定的$\varepsilon>0$,总有自然数$N$存在,使得当$n>N$及任意的正整数$p$,有

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|<\varepsilon,$$

也就是

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\varepsilon.$$

于是,有下面在级数的理论中起着基本作用的定理.

定理 1.1(关于**级数的柯西收敛准则**)　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是:对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$,使当 $n > N$ 时,不论 p 是任何自然数,不等式

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$$

都成立.

例 1.3　考虑调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. 不论 N 取得怎样大,只要取 $p = N$,便有

$$\sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{1}{k} = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}$$

$$> \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N} = N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

可见我们找不到一个自然数 N,当 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 时,使得对于一切自然数 p,都有

$$\sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{1}{k} < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

根据定理 1.1,可知级数是发散的.

定理 1.1 指出,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于该级数的充分远(即 $n > N$)的任意段(即 $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$)的绝对值可以任意小. 由此可见,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性仅与该级数充分远的任意段有关,而与该级数前面有限多个项无关. 于是,有

推论　若去掉、增添或改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的有限项,则不改变级数的敛散性.

例如,去掉发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的前 100 项, 所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100+n} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{100+n} + \cdots$$

仍是发散的.

以下讨论收敛级数的性质,这些性质都以命题的形式给出.

命题 1.1　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

证 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S. 由于 $u_n = S_n - S_{n-1}$，所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

根据这一命题，如果已知一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不满足条件 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则该级数必是发散的，因此我们可以用此命题来判断一个级数的发散性. 但要注意，$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件而不是充分条件，即 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能发散. 例 1.3 清楚地说明了这一点.

利用数列极限的有关性质，不难证明下面的命题.

命题 1.2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$，则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a \pm b$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = ca$，其中 c 为常数；

(3) 若 $a_n \leqslant b_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

命题 1.3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则不改变它的各项次序任意加入括号后所得到的新级数仍收敛，并且和不变.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$，部分和数列为 $\{S_n\}$. 在其中任意加入括号，得一新级数：

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + u_{n_1+2} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots$$

$$+ (u_{n_{k-1}+1} + u_{n_{k-1}+2} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots,$$

记它的部分和数列为 $\{\bar{S}_k\}$，则

$$\bar{S}_1 = S_{n_1},\ \bar{S}_2 = S_{n_2},\ \cdots,\ \bar{S}_k = S_{n_k},\cdots.$$

因此 $\{\bar{S}_k\}$ 为原级数部分和数列 $\{S_n\}$ 的一个子列 $\{S_{n_k}\}$，从而有

$$\lim_{k\to\infty} \bar{S}_k = \lim_{k\to\infty} S_{n_k} = S.$$

命题 1.3 说明，任何收敛级数都具有结合性质；但它的逆命题不一定成

立. 例如,级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

是收敛的,但不加括号的级数 $1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$ 却是发散的.

习　题　5.1

1. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和 $S_n=\dfrac{2n}{n+1}(n=1,2,\cdots)$.

(1) 求此级数的一般项 u_n;

(2) 判定此级数的敛散性.

2. 用定义判定下列级数的敛散性,对收敛级数,求出其和.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n+1}{q^n}\quad(|q|>3)$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n}{n+1}$.

3. 利用级数的性质判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{1}{n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{\ln^n 3}{3^n}\right)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)$　(x 是实数).

4. 分别就级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛和发散两种情况,讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+0.0001)$;　　(2) $1000+\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

5. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$,求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

6. 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant 0)$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 反之是否成立?

7. 利用柯西准则证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛,且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$, $n=1,2,\cdots$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.

8. 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

9. 证明:若数列 $\{na_n\}$ 收敛,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

§5.2 正项级数

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的各项都是非负的，则称为**正项级数**. 显然，正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的，所以，根据单调有界定理，立刻得到下面的定理.

定理 2.1 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

上面定理的重要性主要不在于利用它来判别正项级数的敛散性，而在于它是证明下面许多有用的判别准则的基础.

定理 2.2(比较判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数，并且对于每一 n，有 $a_n \leqslant b_n$.

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

证 由已知，对于每一 n，有 $a_n \leqslant b_n$. 所以

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k = \bar{S}_n.$$

由定理 2.1，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则数列 $\{\bar{S}_n\}$ 有上界，从而数列 $\{S_n\}$ 也有上界，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，由同一定理，数列 $\{S_n\}$ 无上界，从而数列 $\{\bar{S}_n\}$ 也无上界，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

例 2.1 讨论正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

的敛散性，其中 p 是任意非负实数. 此级数称为**广义调和级数**，或 **p 级数**.

解 当 $p \leqslant 1$ 时，有

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由比较判别法知，$p\leqslant 1$ 时 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

当 $p>1$ 时，将 p 级数加括号如下：

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots, \quad (2.1)$$

它的各项均不大于下述正项级数的对应项

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{1}{8^{p-1}}+\cdots.$$

这最后的级数是收敛的等比级数，公比 $r=\frac{1}{2^{p-1}}<1$. 故由比较判别法知 $p>1$ 时，级数(2.1)收敛. 由命题 1.3 的讨论知，级数(2.1)的部分和数列是原级数部分和数列的一个子列，由于此数列与此子列都是正的单调增加的，因此必同时敛散. 由于子列收敛，因而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

使用比较判别法时，需要知道一些级数的敛散性，以作为比较标准. 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^n$ 和 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 常常被当作标准.

例 2.2　讨论下列正项级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$；　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为

$$0<u_n=2^n\sin\frac{\pi}{3^n}<2^n\cdot\frac{\pi}{3^n}=\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

而几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故由比较判别法知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$$

收敛

(2) 因为

$$u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}>\frac{1}{(1+n)^{\frac{2}{3}}},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}}=\sum\limits_{n=2}^{1}\dfrac{1}{n^{2/3}}$ 是发散的 p 级数$\left(p=\dfrac{2}{3}<1\right)$,故由比较判别法知,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$$

发散.

(3) 因为

$$0<u_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{3/2}},$$

又 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ 收敛$\left(p=\dfrac{3}{2}>1\right)$, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

收敛.

定理 2.2 有下面的简明的推论.

推论 设有两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\,(b_n\neq 0)$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k.$$

(1) 若 $k<+\infty$,则从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛可以断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

(2) 若 $k>0$,则从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散可以断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

证 我们仅证(1). 取 $\varepsilon=1$,根据极限定义,存在一个自然数 N,使当 $n\geqslant N$ 时,

$$\frac{a_n}{b_n}<k+1,\quad 即\ a_n<(k+1)b_n.$$

于是根据比较判别法知,(1)是成立的.

上述推论称为**比较判别法**的**极限形式**.

例 2.3 判别下列正项级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$.

解　(1) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,$$

而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

(2) 因为 $1-\cos\frac{\pi}{n}$ 是 $\frac{\pi}{n}$ 的二阶无穷小($n\to\infty$ 时),而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2=\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛.

定理 2.3(积分判别法)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数,函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)(a>0)$ 上非负、连续、单调下降,且

$$f(n)=u_n\qquad(n\geqslant N).$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 敛散性相同.

证　为简便计,令 $a=1,N=1$. 由已知条件,对任何正整数 k,有

$$u_{k+1}=f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)=u_k.$$

从而有

$$S_{n+1}-u_1\leqslant\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant S_n\qquad(n=1,2,\cdots).$$

由于 $f(x)\geqslant0$,所以 $\int_1^b f(x)\mathrm{d}x$ 是 b 的单调增加函数. 又 S_n 也是单调增加的. 若广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于 I,则 $\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant I$,于是 $S_{n+1}\leqslant I+u_1$,即 $\{S_n\}$ 有界,由定理 2.1,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 若广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x=+\infty$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 2.4　试证,级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$,当 $p>1$ 时收敛,当 $0<p\leqslant1$ 时发散.

证 设

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}\qquad(x\geqslant 2).$$

则函数 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上满足 $f(x)>0$，连续且单调减，$f(n)=\frac{1}{n(\ln n)^p}$，从而满足定理 2.3 的条件. 当 $p=1$ 时，

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty,$$

广义积分发散，当 $p\neq 1$ 时，

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_2^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, \text{当 } p<1 \text{ 时},\\ \frac{1}{p-1}(\ln 2)^{1-p}, \text{当 } p>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

故由积分判别法知，当 $p>1$ 时，所论级数收敛；当 $0<p\leqslant 1$ 时，所论级数发散.

无论是比较判别法，还是积分判别法，都必须借助于敛散性已知的级数或广义积分. 下面介绍另外两个判别法，都是利用级数本身的条件来判断其敛散性.

定理 2.4(达朗贝尔判别法)(D'Alembert，1717～1783，法国数学家)对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛；当 $\rho>1$(或 $\rho=+\infty$)时级数发散.

证 由数列极限定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n\geqslant N$ 时有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon,$$

即

$$\rho-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon. \tag{2.2}$$

(1) 当 $\rho<1$ 时，取 ε 适当小，使 $\rho+\varepsilon=r<1$. 于是由(2.2)式，得

$$u_{n+1}<ru_n\qquad(n\geqslant N).$$

从而

$$u_{n+k} < ru_{n+k-1} < \cdots < r^k u_N \qquad (k = 1,2,\cdots).$$

由于 $0<r<1$,几何级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_N r^k$ 收敛,由比较判别法知,$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{N+k} = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$ 收敛,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho>1$ 时,取 ε 适当小,使 $\rho-\varepsilon>1$. 于是由(2.2)式得

$$u_{n+1} > u_n \qquad (n \geqslant N).$$

注意,这时 u_n 单调增加,故 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

上述定理又称**检比法**. 此法对于 $p=1$ 时无效. 例如,对于 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$,有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1.$$

所以上述定理 2.4 不能判别 p 级数的敛散性. 当出现 $\rho=1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{n_n}$ 不存在时,要用其他方法判定.

用类似的方法不难证明(请自行证之):

定理 2.5(Cauchy 判别法) 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,若

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛;当 $\rho>1$(或 $\rho=+\infty$)时级数发散.

这种判别法又称**检根法**.

例 2.5 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ (x>0)$;　　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$.

解 (1) 用检比法

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1,$$

故级数收敛.

(2) 用检根法

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt[n]{n^5}} = 5 > 1,$$