离散数学讲义

南京航空学院 周以铨
沈阳航空工业学院 肖位枢
西北工业大学 刘 玉
编 著

航空工业出版社

内 容 简 介

本书是一本便于自学、逻辑系统性较强的离散数学基本教材。全书五章，分别介绍了数理逻辑基础、集合论、图论、代数结构和组合学导论五大部分，内容叙述较为详细、通俗，推演完整，大部分概念皆由引例引出，由浅入深，每节都配有相当数量的习题，以资复习巩固。

本书可作为理工科院校计算机专业的离散数学教材，也可作为自动控制、电子工程、管理科学等有关专业的教学用书，并可供计算机科学工作者及有关工程技术人员参考。

离 散 数 学 讲 义

周 以 铨 主 编

航空工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

南京航空学院印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米 1/16　印张：20

1987 年 9 月第一版　1987 年 9 月第一次印刷

印数：1—4600 册　字数：552.3 千字

统一书号：13448·1　定价：3.30 元

ISBN 7-80046-008-8/O·001

编者的话

本书是在多年教学实践和原编讲义的基础上，根据航空工业部软件专业组新近订的大纲编写的，旨在希望学生能有一本便于自学、逻辑系统性较强的教材，以加强培养学生的自学能力和推理能力，达到这门基础理论课程的目的，为此，具体内容也力图写得较详细些、通俗些，深入浅出。书中内容可稍加选择地采用讲课结合讨论的方式或自学结合讨论总结的方式等进行教与学。另外，书中所列算法希望有条件时尽量上机调试实习，以促进理论联系实际，集思广益。

我们的学时分配大约是这样的：第一章 14 学时，第二章 18 学时，第三章 22 学时，第四章 24 学时，第五章 10 学时，共 88 学时左右，上机练习和期中、期末考试除外，仅供参考。

本书由南京航空学院周以铨同志主编。具体分工是：沈阳航空工业学院肖位枢同志编写第二、三两章；西北工业大学刘玉同志编写第五章，周以铨同志编写第一、四两章。全部书稿由周以铨同志执笔统一编纂，成为一本系统完整的教材。

南京工学院计算机科学与工程系贾耀国副教援和沈再福、齐玉老师等，审阅了全部书稿并提出了宝贵意见，在此表示深切地感谢！同时感谢在本书的出版过程中付出了辛勤劳动的同志们！

限于编者水平，书中错误和缺点在所难免，希望使用本书的老师和同学提出宝贵意见，不胜感谢！

编　　者

绪 言

离散数学是瑰丽多姿的数学百花园中的一枝新蕾，是近代数学的一个重要分支，近十几年来，在计算机科学的推动下，它顺应现代科学技术综合化的发展趋势，以崭新的面貌展现于人们面前。

离散数学作为一门课程在大学里讲援，也只是在七十年代后期才出现，我国各高等院校也紧紧跟上了这个形势。离散数学对现代科学技术，特别是对计算机科学所起的作用，已逐渐为人们所认识，现在离散数学已列为计算机专业的核心课程之一。

离散数学是以离散型变量为研究对象的一门科学，它以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标。

我们知道，在现实世界中，变量可以分为离散型和连续型两类，离散型就是变量的变化是可数的（包括有限或无限），与之对应的就是连续型变量。例如自然数1，2，… 就是一种离散量，而一昼夜间的温度变化则是一个连续型变量。

从人类历史的发展过程来看，人们最初接触的量是离散型的，因此，反映到数学领域上则属于离散数学的范畴，所以，按照离散数学的定义，人们最早熟悉的数学就是离散数学。随着人类社会的发展，人类对自然现象认识的逐步深入，连续性的概念就提出来了，我们知道，函数的连续性是微积分的基础，连续是函数可导、可积的必要条件。随着微积分的广泛应用，以离散量为研究对象的离散数学也在不断地发展，但由于它的内容丰富，而且分别交错在数学的各个领域里，并不像现在以这样响亮的名字提出来，以致人们对这个名词反而感到陌生。

离散数学作为一门学科，是计算机科学推动的结果。大家知道，数字计算机主要是由二值逻辑器件组成的，因此就决定了计算机本身的结构和它处理的对象都是离散型的，甚至许多连续型的问题，也必须“离散”化之后，才能让电子计算机进行处理。例如计算定积分就是把它变成离散量，用分段求和的方法处理的。

本世纪六十年代开始，由于计算机科学的飞速发展，在计算技术、计算机系统功能和计算机应用等各个领域中提出了许多有关离散量的理论问题，迫切需要用适当的数学工具来描述和深化，于是人们就把计算机科学中所用到的研究离散量的数学综合在一起，系统地、全面地加以论述，这就形成了我们现在所要介绍的离散数学。

运用离散数学的观点，一种语言可以看作是一个抽象的代数结构，从而为语言的研究提供了数学模型；计算机软件工程往往要编制大型程序，在大型程序的编制过程中，突出的问题是如何证明所编程序的正确性，数理逻辑便是研究正确性证明这类问题的工具。

七十年代以来，计算机的使用方式已从单机使用发展到联机系统和计算机网络，在经过通讯线路进行数据传输的过程中，由于受到外界的干扰，系统中的外围设备成了系统中最不可靠的部分，因此，检错和纠错技术在计算机系统设计中受到越来越多的重视，为了设计出功能强、结构好的检错码和纠错码，也要以离散数学为工具。

离散数学系统也是统一和综合的产物，它以离散量为研究对象，综合分散在各数学分支中的数学方法，写出它们的具体算法和程序，保证计算机能顺利执行，从而使离散数学不仅具有“离散”性而且具有“能行”性的特征。

离散数学是计算机系各专业的专业基础理论课，它培养学生的抽象思维和逻辑推理能力，为学生提高专业理论水平打下扎实的数学基础，为后续专业理论课作好教学准备。

既然一切以离散量为研究对象的数学均属离散数学范畴，它的内容是很广泛的，想在一本书中包罗所有这些内容是不可能的，也是做不到的，所以，现在国内外的有关教材中，在内容选取上不尽相同，侧重面也不完全一样，系统也不尽一样。根据多年的教学实践，我们选取了与计算机专业关系比较密切而在一些先行课程中还没有涉及的内容作为本课的内容，主要包括：数理逻辑基础、集合论、图论、代数结构及组合学导论等五大部分，力争做到前后贯通，紧密联系，使其成为一个整体而不“离散”。

目　　录

第一章　数理逻辑基础

逻辑学很早就发展成了一门独立的科学，甚至先于算术和几何学，但发展很缓慢。后来由于建立了符号体系使它变成了数学性质的科学，它的发展才走上了新阶段，完成了从旧逻辑学到新逻辑学——数理逻辑的转变。所以，数理逻辑又名符号逻辑。数理逻辑不但具有完善的方法，还有一套丰富的概念和定理，近几十年来，由于计算机科学的发展，数理逻辑得到了巨大的发展。

数理逻辑是一门用数学方法研究推理过程的科学，它的主要目的在于探索出一套完整的规则，使之按照这些规则就可以确定任何特定论证是否有效，这种规则通常叫做推理规则。

为确保这些规则的准确性，要求有严格的定义，不得有二义性，以致可以将公理理论公式化，依据各项规则用机械的方法就不难确定论证的有效性。所以说，在数理逻辑（简称逻辑学）中，往往论证的形式要重于论证的内容。

为达上述目的，需要用一种具有严谨语法的客观语言——形式语言来表达。事实上，科学领域中所有学科都拥有自己的客观语言，例如，数学中的数学语言；音乐学中的音乐语言等，而且各有各的使用规则。

数学语言要用自然语言来描述，音乐语言也要用自然语言来描述，逻辑学中的形式语言也要用自然语言来描述。这种自然语言就是人们日常用的语言，叫做元语言。因为我们是中国人，所以，汉语就是我们的元语言。但世界上各种元语言都不够严谨，汉语也不例外，所以，在形式语言的描述上有时会受到人们习惯及元语言语法的干扰，希注意。

第一节　命题逻辑

1.1.1　命题与逻辑联结词

任何基于命题分析的逻辑叫做命题逻辑。

命题逻辑研究的对象是命题，所谓命题是指一句有真假意义的语句。我们知道，语句可以分为陈述句、疑问句、祈使句和感叹句等，其中只有陈述句能分辨真假（当然有例外），其它语句都无所谓真假，因此，可得命题定义如下：

定义1.1.1　一个命题就是一句能分辨真假的陈述句。

命题一般用大写的拉丁字母 A、B、C、…、P、Q、…、P_1、P_2、…等来表示。如：

A：北京是中华人民共和国的首都；

B：南京是中国的最大城市；

C：三角形三内角之和等于 180°。

显然，它们都是陈述句且都能分辨真假，故都是命题。且命题 A 是“真”的；命题 B 是“假”的；命题 C 也是“真”的。

我们来看下面几个语句，看看它们是不是命题：

P：1＋101＝110

Q：我们这个地区四季如春；

R：2000 年人类将登上火星。

显然，它们也都是陈述句且都应能分辨真假，故都是命题，只不过命题P的真假依赖于上下文，若式中的数是十进制数，则命题是“假”的，若式中的数是二进制数，则命题是“真”的；命题Q的真假随地区而定；命题R的真假要到 2000 年 1 月 1 日零点 1 秒或在这以前人类登上了火星才能确定。这就是说，我们判定一个语句是不是命题并不是非要知道它的真假值不可，我们关心的只是它具有真假值这个事实。也就是说，对于一个语句，我们有时可无法确定它的真假，但它本身却是有真假的，那就是个命题，否则就不是个命题。

如语句“本命题是假的”，它也是一个陈述句，但它不具有真假值，不是个命题。这是因为，若指派其中“命题”取真值，则这个语句就取假值；若指派其中“命题”取假值，则这个语句又取真值。这是一种特殊的陈述句，就是前述只有陈述句能分辨真假的例外情况，是陈述句中的怪论，我们叫做悖论。因此可以说，除悖论外的陈述句是命题。

一个命题不是“真”的就是“假”的；不是“假”的就是“真”的，两者必居其一且只居其一，这就是“排中律”。承认“排中律”的逻辑系统叫做二值逻辑，不承认“排中律”的逻辑系统叫做多值逻辑。

我们用真值来描述命题是“真”的还是“假”的。如果一个命题是“真”的，我们就说它的真值为“真”，用“T”(True)来表示；如果一个命题是假的，我们就说它的真值为“假”，用“F”(False)来表示。

前面所列举的命题都是些最简单的命题，在语言学中它们都是些简单陈述句，在命题逻辑中我们叫做原子命题（或原始命题）。有些命题是由几个简单陈述句通过联结词构成的复合语句来表达的，正如两个或几个数通过加、减、乘、除等运算而构造出一个新数一样。由一个或几个简单语句通过语法联结词构造成复合语句的“运算”就是语法中的联结词。由一个或几个原子命题通过“运算”而构成的新命题叫做复合命题（或分子命题），这些“运算”就是命题联结词。

定义1.1.2　一个或两个以上的原子命题通过命题联结词构成的新命题叫做复合命题。

命题联结词是日常语言中的联结词的逻辑抽象，请注意其间的差别。下面我们来讨论几种命题联结词。

定义1.1.3(否定)　设P是某个命题，命题“P是不对的”叫做命题P的“否定式复合命题”，记作$\neg P$（读作非P或P的否定）。复合命题$\neg P$的真值由命题P的真值来确定：若命题P是“真”的，则命题$\neg P$是假的；若命题P是“假”的，则命题$\neg P$是真的。

例如，命题P_1：“上海是一个城市”，则命题$\neg P_1$：“上海是一个城市是不对的”；

命题P_2：“每个自然数都是偶数”，则$\neg P_2$：“每个自然数都是偶数是不对的”；

命题P_3：“南京处处清洁”，则$\neg P_3$：“南京处处清洁是不对的”等等。

具有相同意义的两个命题叫做相等命题，以后这样的命题就不加区分。

例如：命题Q_1：“上海不是一个城市”与上面的命题$\neg P_1$是相等的；命题Q_2：“有一些自然数不是偶数”与上面的命题$\neg P_2$是相等的；命题Q_3：“南京不是处处清洁”与上面的命题$\neg P_3$是相等的等等。

定义1.1.4(合取) 设P、Q是某两个命题，命题“P与Q”叫做命题P、Q的“合取式复合命题”，记作$P\wedge Q$（读作P与Q）。复合命题$P\wedge Q$的真值由命题P和Q的真值来确定，若命题P、Q都是“真”的，则$P\wedge Q$是“真”的；否则是“假”的。

例如，设有如下两个命题：

P：今天天晴；

Q：$3+3=6$

于是合取式复合命题$P\wedge Q$为“今天天晴与$3+3=6$”。这在日常语言中是不可理解的，但在命题逻辑中是合理的。

命题联结词“合取”具有对称性，即命题$P\wedge Q$和$Q\wedge P$的真值相同，而日常语言中的联结词“与”，有时是联结两个语句且具有对称性的；有时虽是联结两个语句但不具有对称性；有时就根本不是联结两个语句的。

例如，有下面三个命题：

P：玫瑰花是红的与紫罗兰花是兰的；

Q：他打开这个箱子与他拿这个箱子里的一件衣服；

R：张明与张亮是兄弟。

显然，命题P中的“与”是命题联结词合取，即若令命题P_1：“玫瑰花是红的”、命题P_2：“紫罗兰花是兰的”，于是命题P可写成$P_1\wedge P_2$或$P_2\wedge P_1$；命题Q中的“与”实际上是“然后”的意思，亦即若令命题Q_1：“他打开这个箱子”、命题Q_2：“他拿这个箱子里的一件衣服”，则命题Q_2必须发生在命题Q_1之后，如果将命题Q写成“他拿这个箱子里的一件衣服与他打开这个箱子”，这在语法上是不通的，因此，命题Q中的“与”不是命题联结词合取；命题R中的“与”则显然不是命题联结词合取，因为它联结的不是两个命题，而是两个名词。

定义1.1.5(析取) 设P、Q是某两个命题，命题“P或Q”叫做命题P、Q的“析取式复合命题”，记作$P\vee Q$（读作P或Q）。复合命题$P\vee Q$的真值由命题P和Q的真值来确定：若命题P、Q都是“假”的，则$P\vee Q$是“假”的；否则是“真”的。

例如，设有如下两个命题：

P：今天下大雨；

Q：今天刮大风。

于是析取式复合命题$P\vee Q$为“今天下大雨或今天刮大风”。

定义1.1.6(异或) 设P、Q是某两个命题，命题“P异或（排斥或）Q”叫做命题P、Q的“异或式复合命题”，记作$P\overline{\vee}Q$（读作P异或Q）。复合命题$P\overline{\vee}Q$的真值由命题P和Q的真值来确定：若命题P、Q的真值相同，则$P\overline{\vee}Q$是“假”的；否则是“真”的。

例如，设有如下两个命题：

R：她明天上午八时去上海；

S：她明天上午八时去北京。

于是异或式复合命题$R\overline{\vee}S$为“她明天上午八时去上海或是去北京”。

在现代汉语中，析取（或）和异或中的这两个“或”含义不同，前者实际上是“可兼或”，后者实际上是“不可兼或”。另外，有时所用的“或”既非析取（或）也非异或，根本就不是个联结词。例如，命题“今天张小明做了廿五或廿六道习题”中的“或”就不是个

联结词，它只是指出做习题的近似数目。

命题联结词"析取"和"异或"也具有对称性，命题$P \vee Q$和$Q \vee P$的真值相同；命题$R \overline{\vee} S$和$S \overline{\vee} R$的真值相同。

定义1.1.7(如果……，则……) 设P、Q是某两个命题，命题"如果P，则Q"叫做"蕴涵式复合命题"，记作$P \to Q$(读作如果P则Q)，复合命题$P \to Q$的真值由命题P和Q的真值来确定：若命题P是"真"的、Q是"假"的，则$P \to Q$是"假"的；否则是"真"的。

复合命题$P \to Q$中，命题P叫做$P \to Q$的前件或前提：命题Q叫做$P \to Q$的后件或结论。

例如，设有如下两个命题

P：我拿起这本书；

Q：我一口气读完这本书。

于是，蕴涵式复合命题$P \to Q$为"如果我拿起这本书，则我一口气读完它(这本书)"。

在这个例子中，因为后件Q是归因于前件P中的这本书，所以这个命题是好理解的，若观察这样一个命题："如果月亮出来了，则三乘三等于九"，这在日常语言中显然是毫无意义的，但由于它满足蕴涵式复合命题的定义，因而在逻辑学中则是完全可以接受的。

在组成命题$P \to Q$时，若前件P和后件Q之间不要求有任何类型的联系时，叫做实质蕴涵式复合命题；若前件P和后件Q之间有某种形式上或内容上的联系时，叫做形式蕴涵式复合命题。以后当不加声明地使用术语"蕴涵式复合命题"时，均指实质蕴涵式复合命题。

关于蕴涵式复合命题我们再举一例作些讨论：

例1 试将下列命题符号化："如果他是南京人，则他是江苏人"，并对其真值作进一步地讨论。

解 设P：他是南京人；Q：他是江苏人.显然，命题"如果他是南京人则他是江苏人"，大家会写成$P \to Q$，这没有错，下面对它的真值作进一步地讨论。

"他是南京人则他是江苏人"为"真"，即P"真"、Q"真"则$P \to Q$"真"；"他是南京人而他不是江苏人"则显然为"假"，即P"真"、Q"假"则$P \to Q$为"假"；但"他不是南京人而他是江苏人"和"他不是南京人又不是江苏人"都有可能为"真"，也有可能为"假"，即P"假"、Q"真"或P"假"、Q"假"，则$P \to Q$有可能为"真"也有可能为"假"。逻辑学规定"真"、"假"两者必居其一且只居其一，实质蕴涵式复合命题规定当蕴涵前件为"假"时，无论后件是"真"还是"假"，都"善意"地推定该蕴涵式复合命题取为"真"，这一点请大家注意。

在汉语中，显然命题"如果P，则Q"与许多命题具有相同的意义。如"假若P，那么Q"、"如果P，那么Q"、"对于Q来说，P是充分的"等等，它们都是彼此相等的命题。

定义1.1.8(当且仅当) 设P、Q是某两个命题，命题"P当且仅当Q"叫做"等价式复合命题"，记作$P \rightleftharpoons Q$或P *iff* Q (*iff=if and only if*)，(读作P当且仅当Q)。复合命题$P \rightleftharpoons Q$的真值由命题P和Q的真值来确定：当P、Q有相同的真值时，$P \rightleftharpoons Q$是"真"的；否则是"假"的。

例如，设有如下两个命题：

P：$a^2+b^2=a^2$

Q：$b=0$

于是，等价式复合命题 $P \rightleftharpoons Q$ 为"$a^2+b^2=a^2$ 当且仅当 $b=0$"。

在汉语中，显然命题"P 当且仅当 Q"同命题"P 和 Q 是互为充分必要的"、"只有且仅有 P 才能 Q"等是相等的命题。

上面我们讨论了六个命题联结词："否定"、"合取"、"析取"、"异或"、"如果…，则…"、"…当且仅当…"，它们通常也被称为逻辑联结词（以下简称联结词）。至此我们也可以这样来定义原子命题和复合命题：不包含任何联结词的命题叫做原子命题；至少包含一个原子命题和一个联结词的命题叫做复合命题（也叫分子命题）。

在由某些命题通过联结词复合成新命题这个意义上说，上述六个联结词除"否定"是一元运算外，其余的均为二元运算。一元运算是一个联结词作用于一个命题；二元运算是一个联结词作用于两个命题。

例2 试用符号形式写出下列命题：

1) 如果明天上午七点下雨或下雪，则我不去学校；
2) 如果明天上午七点不下雨并且不下雪，则我去学校；
3) 如果明天上午七点不是雨夹雪，则我去学校；
4) 只有当明天上午七点不下雪并且不下雨时，我才去学校；
5) 明天上午七点我将雨雪无阻地一定去学校。

解 设 P：明天上午七点下雨；

Q：明天上午七点下雪；

R：我去学校。

则 1) $(P \vee Q) \rightarrow \neg R$；

2) $((\neg P) \wedge (\neg Q)) \rightarrow R$；

3) $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$；

4) $((\neg P) \wedge (\neg Q)) \rightleftharpoons R$；

5) $((P \wedge Q) \wedge R) \vee (((\neg P) \wedge Q) \wedge R) \vee ((P \wedge (\neg Q)) \wedge R) \vee (((\neg P) \wedge (\neg Q)) \wedge R)$

这里圆括号所具有的意义与初等代数及程序设计语言中的圆括的意义相同。

1.1.2 命题公式与真值表

为了用数学方法研究命题，就必须象数学处理问题那样，将命题公式化，并讨论对于这些公式的推理（或演算）规则，以期由给定的命题公式推导出新的命题公式。

下面我们用大写拉丁字母来表示一个抽象的命题（原子命题或复合命题），并将它叫做命题变元，命题变元（原子命题变元或复合命题变元）也常笼统地叫做命题。由命题变元、联结词和圆括号所组成的字符串叫做命题公式，其中原子命题变元叫做命题公式的组元。这里要问：是不是凡是这样形式的字符串都是命题公式呢？这就要看其实质是不是个命题，如 $\neg P$ 是合理的命题则是命题公式；$\wedge P$ 就不是合理的命题则不是命题公式等等。合理的命题公式叫做合式公式（wff=well-formed formulas）。

定义1.1.9 一个合式的命题公式是按如下规则生成的字符串：

1) 原子命题变元是个合式公式；

2) 如果 A 是一个合式公式，则 $\neg A$ 也是一个合式公式；

3) 如果 A 和 B 是合式公式，则 $A \wedge B$、$A \vee B$、$A \to B$ 和 $A \rightleftharpoons B$ 都是合式公式；

4) 当且仅当经过有限次地使用规则1)、2) 或 3)，从而求得的命题变元、联结词和圆括号所组成的字符串才是合式公式。

从这个定义来看，合式公式是由合式公式来定义的，所以，它是递归性质的定义。

例如：$\neg(P \wedge Q)$、$\neg(P \vee Q)$、$(P \to (P \vee Q))$、$(P \to (Q \to R))$、$(((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \rightleftharpoons (P \to R))$ 都是合式公式，而 $((P \to Q) \to (\wedge Q))$、$(P \to Q$ 等都不是合式公式。

为减少圆括号的使用量，下面将引入一些约定。实际上，在某些约定下可以免除所有的圆括号，但这里不去研究这些约定，我们只约定：

1) 省掉公式最外层的圆括号；这样，代之 $(P \wedge Q)$ 而写成 $P \wedge Q$；$((P \wedge Q) \to Q)$ 写成 $(P \wedge Q) \to Q$ 等。

2) "否定"只作用于邻接其后的命题。这样，代之 $(\neg P) \vee Q$ 而写成 $\neg P \vee Q$；$(\neg(P \wedge Q) \vee R)$ 写成 $\neg(P \wedge Q) \vee R$ 等。

通常所遇见的命题公式只是些合式公式，故常将合式命题公式简称为公式。

有了合式公式的概念后，命题变元就一般指原子命题变元了，否则就按公式来考虑，当然，相应原子命题变元也可以看作个公式，是原子公式。

命题变元没有真值，在命题逻辑中它不代表一个命题，只有当用一个命题取代它时，它才有真值，同理，公式也没有真值，为讨论方便，下面我们借用"命题变元的真值"和"公式的真值"这个说法来表示所给命题变元和公式中各组元所取得的真值及给定公式的相应真值，也就是说，当公式中的每一个组元都被赋以确定的真值时，公式的真值也就被确定了，因为这时已成为一个命题了。

公式中所有组元（原子命题变元）的一组确定的取值（真值）叫做公式的一组真值指派（也叫做所有组元的一组真值指派）。含 n 个组元（原子命题变元）的公式有 2^n 组不同的真值指派，对于每一组真值指派，公式都有一个相应的确定的真值。公式与其组元之间的真值关系，可以用真值表来表示。

定义1.1.10 设 P 是一个公式，P_1，P_2，…，P_n 是出现在公式 P 中的 n 个组元，所有组元的真值指派的全体和给定公式的相应真值列成的表，叫做公式 P 的真值表。

例如，公式 $\neg P$、$P \wedge Q$、$P \vee Q$ 的真值表如下：

P	$\neg P$
F	T
T	F

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

再如，公式 $P \overline{\vee} Q$、$P \to Q$、$P \rightleftharpoons Q$ 的真值表如下：

P	Q	$P\overline{\vee}Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

P	Q	$P\to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

P	Q	$P\rightleftharpoons Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

根据公式真值表的讨论，可见上述六个联结词完全可以用真值表来定义，这样，联结词的意义就可由其真值表唯一确定，而不由命题的含意来确定。

例1 构造公式 $P\vee\neg Q$ 的真值表

解

P	Q	$\neg Q$	$P\vee\neg Q$
F	F	T	T
F	T	F	F
T	F	T	T
T	T	F	T

例2 为公式 $P\to Q$、$\neg P\vee Q$ 及 $\neg(P\wedge\neg Q)$ 构成真值表

解

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\to Q$	$\neg P\vee Q$	$\neg(P\wedge\neg Q)$
F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
T	T	F	F	T	T	T

由表可见，蕴涵式复合命题公式 $P\to Q$ 和公式 $\neg P\vee Q$ 及 $\neg(P\wedge\neg Q)$ 的真值表相同。

定义1.1.11 真值表相同的公式 A、B 叫做互为等价的公式，记作 $A\Leftarrow\Rightarrow B$（读作 A 等价 B）。（注意："$\Leftarrow\Rightarrow$"和"$\rightleftharpoons$"是两个完全不同的符号，"$\Leftarrow\Rightarrow$"不是联结词，而是两公式间的等价关系符。$A\Leftarrow\Rightarrow B$ 不是一个公式，它表示公式 A 与公式 B 之间有等价关系，而"$\rightleftharpoons$"是联结词，$A\rightleftharpoons B$ 是个公式。但是 $A\Leftarrow\Rightarrow B$ 与 $A\rightleftharpoons B$ 之间有密切的联系，见第四段）。

例如上例中所述的公式 $P\to Q$、$\neg P\vee Q$ 及 $\neg(P\wedge\neg Q)$ 互为等价，即 $P\to Q\Leftarrow\Rightarrow\neg P\vee Q\Leftarrow\Rightarrow\neg(P\wedge\neg Q)$。

例3 为公式 $P\rightleftharpoons Q$ 和 $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$ 构成真值表

解

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\rightleftharpoons Q$	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	T	T

由表可见，等价式复合命题公式 $P\rightleftharpoons Q$ 与公式 $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$ 互为等价，即 $P\rightleftharpoons Q\Leftarrow\Rightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$。

例4 联系本章第一段例2中"明天上午七点不下雨且不下雪"与"明天上午七点不是雨夹雪"间的差异，讨论 $P \wedge Q$，$\neg P \wedge \neg Q$，$\neg(P \wedge Q)$，$\neg P \vee \neg Q$ 的真值表。（其中 P：明天上午七点下雨，Q：明天上午七点下雪）。

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
F	F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F

可见公式 $\neg(P \wedge Q)$ 与公式 $\neg P \vee \neg Q$ 互为等价，即 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$，不难发现 $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$。此两等价关系式通常称为德·摩根定律。

有时命题间的相互关系不易正确表达，即一时找不到正确的联结词时，也常用列出其"真值表"的方法，进一步分析原子命题的真值，按联结词的真值表定义来寻找恰当的联结词，从而可以正确地用形式符号表达所给命题。

例5 试以符号形式写出复合命题："当且仅当天黑了，我才回家了"。

解 设 P：天黑了；

Q：我回家了。

复合命题"当且仅当天黑了，我才回家了"的真值表如下：

P	Q	$P \square Q$	
F	F	T	……天不黑，我没回家。"真"
F	T	F	……天不黑，我回家了。"假"
T	F	F	……天黑了，我没回家。"假"
T	T	T	……天黑了，我回家了。"真"

于是□中应填入联结词"$\rightleftharpoons$"，即 $P \rightleftharpoons Q$

1.1.3 永真式和永假式

我们考察公式 $\neg(P \wedge Q) \rightleftharpoons (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值表

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \rightleftharpoons (\neg P \vee \neg Q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
T	T	F	F	T

由表可见，对公式的所有指派，给定公式的相应真值均为"真"，即这种公式的真值不依赖于各组元的真值，恒为真。也就是说，这种公式的真值独立于组成该公式的组元，这种独立性取决于公式自身的特殊结构，这是一种很有用的性质。

定义1.1.12 一个公式，如果对于它所包含的组元的任何一组真值指派取值恒“真”，则这样的公式叫做永真式或重言式，永真式常用 T 表示；反之，若对于它所包含的组元的任何一组真值指派取值恒“假”，则这样的公式叫做永假式或矛盾式。永假式常用 F 表示；如果对它所包含的组元至少有一组真值指派使得公式的真值为“真”，则这样的公式叫做是可满足的。判定给定公式是永真式，永假式或是可满足的问题叫做给定公式的判定问题。

例1 试确定公式 $P\vee\neg P$ 和 $P\wedge\neg P$ 分别是永真式和永假式。

解

P	$\neg P$	$P\vee\neg P$	$P\wedge\neg P$
F	T	T	F
F	T	T	F
T	F	T	F
T	F	T	F

由表得证公式 $P\vee\neg P$ 是永真式，$P\wedge\neg P$ 是永假式。

例2 试证公式：“如果凡老虎必吃人，故不吃人者必不为老虎”是永真式。

证 设 P：x 是老虎；Q：x 吃人，则上述公式可表为 $(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$。其真值表如下：

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$
F	F	T	T	(T) T (T)
F	T	T	F	(T) T (T)
T	F	F	T	(F) T (F)
T	T	F	F	(T) T (T)

由表可知该公式是永真式。

例3 试判定公式 $(P\rightleftharpoons Q)\wedge(\neg Q\to R)$。

解

P	Q	R	$\neg Q$	$(P\rightleftharpoons Q)\wedge(\neg Q\to R)$
F	F	F	T	(T) F (F)
F	F	T	T	(T) T (T)
F	T	F	F	(F) F (T)
F	T	T	F	(F) F (T)
T	F	F	T	(F) F (F)
T	F	T	T	(F) F (T)
T	T	F	F	(T) T (T)
T	T	T	F	(T) T (T)

由表可见公式 $(P\rightleftharpoons Q)\wedge(\neg Q\to R)$ 既非是永真式也非永假式，而是可满足的公式。

显然，永真式的否定是永假式；反之，永假式的否定是永真式。任何两个永真式的合取仍是永真式，任何两个永真式的析取也是永真式。同样，两个永假式的合取和析取也都是永假式。

用真值表法显然可以解决给定公式的判定问题，但当公式中组元个数较多或公式本身较为复杂时，使用这种方法就很麻烦，后面我们将给出另一种方法，即给出公式的一种标准形式——范式，进而来解决判定问题。

1.1.4 公式间的等价关系

在一个公式中，如果用另外的公式来代换其中的某个或某些组元，将会得到一个新的公式，新公式与原公式间有什么关系呢？

定义1.1.13 给定一个公式 P，P_1、P_2、$\cdots P_n$ 是其中所有的组元，如果

(1) 用某些公式代换 P 中的某些组元；

(2) 若用 Q_i 代换 P_i，则必须用 Q_i 代换 P 中所有的 P_i，由此而得到的新公式 Q 叫做公式 P 的一个代换实例。

例如，设 A：$P\rightarrow(J\wedge P)$，用 $R\rightleftharpoons S$ 代换其中的 P，可得B：$(R\rightleftharpoons S)\rightarrow(J\wedge(R\rightleftharpoons S))$，这样，公式 B 就是公式 A 的一个代换实例。

应该看到，$(R\rightleftharpoons S)\rightarrow(J\wedge P)$ 就不是公式 A 的一个代换实例。

根据定义可知，只要同时进行所有的代换，用某些公式代换多个组元也是可行的。

例如，$P\rightarrow\neg Q$ 的代换实例可有：

1) $(R\wedge\neg S)\rightarrow\neg(J\wedge M)$

2) $(R\wedge\neg S)\rightarrow\neg P$

3) $Q\rightarrow\neg(P\wedge\neg Q)$

等，在 (1) 中同时用 $R\wedge\neg S$ 代换了公式中的 P，用 $J\wedge M$ 代换了公式中的 Q；(2) 中同时用 $R\wedge\neg S$ 代换了公式中的 P，用 P 代换了公式中的 Q；(3) 中同时用 Q 代换了公式中的 P，用 $P\wedge\neg Q$ 代换了公式中的 Q。

为了正确地求得一个公式的代换实例，必须要注意同时进行代换。例如，考察公式 $P\rightarrow\neg Q$ 用 $P\vee Q$ 代换其中的 P 和用 R 代换其中的 Q 的代换实例，若首先用 $P\vee Q$ 代换公式中的 P，可得代换实例 $(P\vee Q)\rightarrow\neg Q$；然后再用 R 代换 $(P\vee Q)\rightarrow\neg Q$ 中的 Q，得代换实例 $(P\vee R)\rightarrow\neg R$。注意，这个最后得到的公式只是公式 $(P\vee Q)\rightarrow\neg Q$ 用 R 代换其中 Q 的代换实例，而不是公式 $P\rightarrow\neg Q$ 用 $P\vee Q$ 代换其中的 P 和用 R 代换其中的 Q 的代换实例了，正确的结果应是 $(P\vee Q)\rightarrow\neg R$。

还应注意，在构成公式的代换实例时，只能代换其中的组元（即原子命题变元），绝不能代换其中的分子（复合）命题变元。例如，$P\rightarrow Q$ 不是用 Q 代换 $\neg R$ 的 $P\rightarrow\neg R$ 的代换实例，因为应该被代换的是 R 而不是 $\neg R$。

十分清楚，永真式的代换实例仍是一个永真式，如考察永真式 $P\vee\neg P$，无论用什么公式代换其中的 P，其代换实例的真值总是“真”。

例如：1) $(R\vee S)\vee\neg(R\vee S)$

2) $((P\rightarrow S)\wedge R)\vee\neg((P\rightarrow S)\wedge R)$

这样，若能断定一个给定公式是永真式的代换实例，则就可断定该给定公式也是个永真式。反之，代换实例为永真式，则不能推得原公式一定为永真式。例如，公式 $P\vee Q$ 用 $\neg P$ 代换其中 Q 的代换实例 $P\vee\neg P$ 为永真式，而原式 $P\vee Q$ 不为永真式。

一般说来，代换后所得的新公式并不保证都等价于原给定公式。下面我们来介绍等价代换——取代的概念。

定义1.1.14 给定一个公式 A，设 A' 是 A 的任何部分，如果 A' 也是一个公式（可能是原子的或分子的），则公式 A' 叫做公式 A 的子公式。