科學圖書大庫

布林代數與其應用

譯者　彭源昌　陳弘毅

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有　不許翻印

中華民國六十八年三月二十日再版

布林代數與其應用

基本定價　1.80

譯者　彭源昌　國立中央大學理學院副教授
　　　陳弘毅　國立台灣師範大學理學士

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「副掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話 7813686 7815250 號
發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號
承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

目　錄

原序……………………………………………………Ⅲ

第一章　集合代數……………………………………1

1－1　引論…………………………………………1
1－2　元素與集合…………………………………1
1－3　集合的組合…………………………………3
1－4　范氏簡圖……………………………………5
1－5　基本定律……………………………………7
1－6　展開，因式分解，與簡化…………………9
1－7　集合包含的特性……………………………12
1－8　條件方程式…………………………………15
1－9　方程式的解法………………………………19
1－10　集合元素的個數……………………………20

第二章　布林代數……………………………………25

2－1　引論…………………………………………25
2－2　基本定義……………………………………25
2－3　布林代數的定義及其性質…………………27
2－4　析取標準式…………………………………33
2－5　合取標準式…………………………………37
2－6　布林代數之表示……………………………40

第三章　符號邏輯和命題代數………………………43

3－1　引論…………………………………………43
3－2　符號的命題及其定義………………………43
3－3　眞値表………………………………………47
3－4　物象邏輯和語法邏輯………………………51
3－5　實質包涵……………………………………52
3－6　命題的眞理集合……………………………55

3－7　量詞……………………………………………………59
3－8　眞確論證…………………………………………………61
3－9　間接證明…………………………………………………66
3－10　函數完全運算集合……………………………………69
3－11　特殊的問題……………………………………………71

第四章　轉換代數……………………………………………77

4－1　引論………………………………………………………77
4－2　一些代數符號的定義……………………………………77
4－3　電路的化簡………………………………………………82
4－4　非串聯一並聯電路………………………………………85
4－5　由已知的性質設計電路…………………………………92
4－6　n－端點電路之設計……………………………………96
4－7　對稱函數及其電路………………………………………101

第五章　繼電器電路及有關控制問題………………………107

5－1　引論………………………………………………………107
5－2　繼電器之基本控制路線…………………………………109
5－3　n－端點電路及轉換連接器之用途……………………114
5－4　動作及保持路線…………………………………………119
5－5　次序電路及次序圖………………………………………123
5－6　由已知條件設計次序繼電器電路………………………128
5－7　有關設計繼電器電路的特殊問題………………………136

第六章　算術的計算電路……………………………………141

6－1　引論………………………………………………………141
6－2　二進法數系………………………………………………141
6－3　邏輯電路元件……………………………………………144
6－4　二進法數的加法…………………………………………147
6－5　二進法數的減法…………………………………………151
6－6　聚集………………………………………………………153
6－7　二進法乘法………………………………………………156

第七章　　有限樣品空間或然率之簡介……159

7－1　引論……159

7－2　事件，樣品空間，或然率……159

7－3　條件或然率……163

7－4　計算之細節……166

7－5　柏帑力嘗試……169

精選問題之解答……173

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com

第一章　集合代數

1—1　引論

布林代數，顧名思義，是近世代數或抽象代數的一部份。通常在代數的基本課程裡所學習的代數學中，它是最容易瞭解的；因爲又簡單又很容易的可以找到其實際應用來說明其理論。研習這本書並不需要任何特別必須先預備的知識。然而在其他數學課程裡所得到的熟練將是很有幫助的。

爲使初學者易於領會布林代數，此章只講布林代數的特殊例子之一，即集合代數，選取此一例子的理由乃因爲它可能是所有應用之中最爲直覺的，同時因爲它足夠繁雜以致能顯出任何布林代數的本質。介紹的進展是完全直覺的，亦即任何所做的證明寧可基於直覺的概念，而不依據形式的公理。直至第二章才應用公理的接近法。雖然此一程序可能不足以使職業數學家滿意，我們希望讀者在熟悉公理所代表的性質之後，能夠對於精確的公式的形成有更充分的領會。

1—2　元素與集合

在數學的每一領域中，“元素”與“元素的集合”（或組）佔有極其重要的角色，其例不勝枚舉。數學系的每一個新生都熟悉於整數的集合，所有直角三角形的集合，垂直於所予平面的直線集合，以及直線上的點集合。可是集合的概念不限於數學。圖書館裡的書的全體，房間裡的人的全體，以及一河流的魚的全體都是集合的例子。本章的目的在於研究集合的本質和集合被組合在一起的方法。集合所遵從的代數法則，雖然與實數裡的代數法則不完全一樣但是相似的，此一事實乍看之下也許會令人感到奇怪。然則，我們將看出此一現象是自然的而且是很重要的。

數學的任一課程裡都有一些術語，因爲它太基本以致於無法加以定義。在平面幾何中，“點”和“線”等術語是無定義的，雖然應該鼓勵學生建立

這些術語所含的直覺概念。在集合的代數中“元素”和“集合”是無定義的。直覺地，我們將元素當做組成集合的基本對象的全體。至於符號，我們以小寫斜體字母（a，b，c，x，y等）表示元素，而以大寫字母（A，B，X等）表示集合。又以記號 ϵ 來表示一元素和一集合（在此順序）之間成立的或不成立的無定義關係。例如，我們可以寫$m \in X$，讀做“m是集合X的一元素”。我們假定在討論任一元素 m 和任一集合 X 時，我們能夠確定關係 $m \in X$ 是否正確。

若且唯若X，Y兩集合爲相同的，亦即含有完全相同的元素時，我們說集合X等於集合Y，寫成$X=Y$。若集合X所含之元素都是第二集合Y所含之元素，則我們說X是Y的子集合而寫成$X \subseteq Y$，又若Y含有一或更多的元素不在X中，我們說X是Y的眞子集合。

在此介紹兩個在應用上極爲重要的特殊集合之名稱。第一個叫做“全體集合”，其定義爲在討論下之所有元素所組成的集合，此集合亦可視爲問題的區域，或基本區域。全體集合以符號1 表之。我們要注意到每一集合爲全體集合的子集合。第二個特殊的集合爲零集合，定義爲不含任一元素的集合。依據定義，零集合爲所有其他集合的子集合。零集合的記號爲0。有一點很重的而需要特別注意的是我們所用的0 和1 不是數而是兩個特殊集合的名稱。

我們要展開的是集合的代數而不是集合元素的代數。例如，記號$m \in X$不能引進代數裡。通常處理集合中之各個元素是重要的，因爲我們不能像在代數中那樣處理元素，在此爲方便起見介紹單元集合之概念。單元集合是由單一元素所構成的集合，若這一元素爲 x，我們以 $\{x\}$ 表示此集合。同時，若集合以列記集合中之元素之法定義，我們也用記號 $\{\ \}$。例如，$\{a,b,c\}$ 的意義是只以元素 a, b, 和 c 所構成之集合。

與每一集合相伴的是另外一個叫做X的補集的集合X'，定義爲含有全體集合的所有元素中不爲X的元素的集合。特殊情形爲零集合與全體集合互爲補集。

例題：

一堆書中，有些是紅皮的，有些是黑皮的，而其餘是黃皮的。假定，所有紅皮的以及有些黑皮的書是英文寫成的。其餘黑皮的書是用德文寫成的而黃皮的書是用法文寫成的。設這一堆所有的書之集合爲全體集合而其他的集合記爲：

R是紅皮書的集合

Y是黃皮書的集合

B是黑皮書的集合

E是用英文寫成的書的集合

F是用法文寫成的書的集合

G是用德文寫成的書的集合

此例中，$Y=F$且$R\subseteq E$，實際上R是E的眞部份集合。若以m表示某一紅皮書，我們可寫爲$m\in R$同時$m\in E$或者，我們可以寫成$\{m\}\subseteq R$及$\{m\}\subseteq E$，E'是由所有的黃皮書以及用德文寫成的黑皮書所構成的集合。

習　題

1．列出集合$\{a,b,c\}$之所有子集合。（有八個子集合，其中包括零集合在內有七個是眞部份集合）。

2．用補集之定義證明對於任一集合而言恆有$(X')'=X$。

3．此節所列例題中各書所成集合的補集爲何？試加以說明。

4．含有有限數n個元素的集合，共有幾個不同之子集合。〔提示：用組合記號表示含有u個元素的集合之數，$u\leq n$，然後應用二項定理自0至n疊加起來。〕

1—3　集合的組合

在此節我們研究組合集合以得新集合的法則。首先，對於任意兩集合X與Y而言，X與Y的聯集，定義爲由所有在X或在Y中，或在X與Y兩者中之元素所構成的集合。此新的集合記爲$X+Y$。例如在第1—2節之說明中，$R+Y$爲所有紅皮的書與黃皮的書的集合，$Y+E+G$是堆裡所有的書所成的全體集合，而$R+E$就是E，即爲用英文寫成的所有書的集合。

其次，對於任意兩集合X和Y而言，X與Y的交集，定義爲由同時在X和在Y中之元素所成的集合。在討論交集的時候我們將用小黑點（·）記之，猶如在聯集時用記號（＋）一樣。爲了方便起見在代數中，小黑點常略去而不記，就像在通常數之代數的時候一樣。再以1—2節中之例子爲例，EB是用英文寫成的黑皮書，RY是零集合，而RE是R，亦即紅皮的書的集合。

我們要注意到對於任意集合X而言，$X+X'=1$且$XX'=0$，這是(+)，(·)和(′)之定義的直接結論。下述定理亦可直接由這些定義導出來。

定理：若m爲全體集合之任一元素，集合X與Y爲任意兩集合，則m爲集合XY'，$X'Y$和$X'Y'$中之一且唯一集合的元素。

證明：依據補集之定義，m爲X或X'之元素，但不能同時爲此兩集合的元素。設若$m \in X$，因爲m爲Y或Y'中任何一元素但不同時爲兩者之元素，故依據交集之定義m爲XY或XY'中任何一元素，但不能同時爲兩者之元素。同理，設若m爲X'之元素，則m爲$X'Y$或$X'Y'$中之一的元素，但不能同時爲兩者之元素。因此本定理得證。

前面所下定義的運算法與在第1－2節中所下定義之符號和關係互相間不無關係。稍爲想一想就可明白，$X \subseteq Y$，$XY = Y$，$X+Y = Y$，$XY' = 0$，$X' + Y = 1$等五個條件，皆表明關於集合X和Y之相同的條件，亦即集合X中之每一元素是集合Y的元素。又，集合$X+Y$亦可寫爲$(X'Y')'$。這些關係說明一項事實，即我們所引用的符號，比我們在處理集合代數中眞正所需要的更多。此一事實之重要性在以後數節中加以驗實。同時運用所有這些符號將是很方便的。

通　用　之　符　號

意　義	符　號
集合X和集合Y之聯集	$X+Y$，$X \cup Y$，$X \vee Y$
集合X和集合Y之交集	XY，$X \cap Y$，$X \wedge Y$
集合X之補集	X'，$\overline{X}$，$\sim X$

在此章所用關於交集，聯集以及補集之符號並不是標準的符號。但是對於布林代數之幾個應用而言，我們認爲在一本書中，從頭到尾用同一種符號較爲適宜。所選之符號是在電路代數之應用中最爲適用的。在其他之書籍所慣用之符號如表所示。

習　題

1．就第1－2節中之例，敘述下列集合。

　(a)　$Y+G$　(b)　RB'　(c)　$G(B+R)$　(d)　$B+BR$

2．就第1－2節中之例子證明：

　(a)　$(G+R)' = G'R'$　(b)　$(GB)' = G'+B'$

3．對於任意集合X，Y，和Z而言下列各式中那些式子成立，那些不

成立，以直覺決定之。不必證明。

(*a*)　$X+XY=X$　　(*b*)　$X(X+Y)=X$

(*c*)　$X(Y+Z)=XY+XZ$

(*d*)　$X+YZ=(X+Y)(X+Z)$

4．設已知元素m既不為集合X的元素亦不為集合Y'的元素，則m應屬於那一個集合。寫出此集合之符號。

5．令所有正整數之集合為全體集合，而集合S，E，及M之定義如下：

S為比6小或等於6之所有正整數之集合。

E為2，4，6，等所有偶數的集合。

M為3，6，9，等3的倍數之所有正整數之集合用S，E，和M寫出下列諸集合之簡單代數表示式：

(*a*)　$\{3,6\}$　　(*b*)　$\{1,3,5\}$

(*c*)　6的倍數之所有正整數之集合。

(*d*)　大於6的所有偶數之集合。

(*e*)　含所有3的倍數以及所有奇數之集合。

1—4　范氏簡圖

將在第二章中正式介紹的布林代數，以所要用的符號以及公理的敘述開始，假設符號能滿足這些公理。以此為根基建立定理和定義之體制，由此這體制成為一模型，而此模型將應用於其可能適合的任何應用上。由應用所得結果之眞確性將視此模型適合於實際情況之密切程度而定。但是在第一章中，我們用不同的入門法展開了布林代數。我們先考慮布林代數的一項應用，乃希望大家讀的更愉快，同時也希望大家對於接著所要介紹的公理處理法心理上有個充分的準備。當然這種展開法有它的弱點。最大的弱點是我們沒有正式的根據用來建立確切的證明。因為在寫下證明時沒有公理可以應用，因此我們就必須依賴諸如"集合"和"元素"等術語之直觀的概念。為了加強這直觀以及供給一些在集合代數中眞確之基本法則的辨明，我們將介紹范氏簡圖之觀念。須要記著的是這樣的簡圖並不構成為證明，它只能看成使定律看起來似乎合理的一種說明。

在范氏簡圖中，以長方形內部之點的集合做為全體集合。全體集合裡的任一集合以長方形內之圓（或其他閉區域）的內部之點的集合表示。假使我們不知道所討論各集合之間到底有什麼關係存在，則這些圓應繪成能代表集

合之間的所有相交可能情形。在適當的面上畫上陰影，則可將集合之間的組合情形圖示出來。

爲了說明范氏簡圖的用途，請參看圖1－1。此圖表示X和Y兩集合，其交集不爲零集合，在此圖中，集合X之補集合X'畫上水平直線陰影，而Y'則畫上鉛直線陰影。集合$X'Y'$以十字影線區出現，它顯然是$X+Y$的補集。如此，基本法則$(X+Y)'=X'Y'$得以說明。圖中，無陰影區代表XY，這顯然是$X'+Y'$之補集，$X'+Y'$則爲畫上水平直線或用鉛直直線或用其兩者陰影之區域。由此說明了第二個基本定律，即$(XY)'=X'+Y'$。√

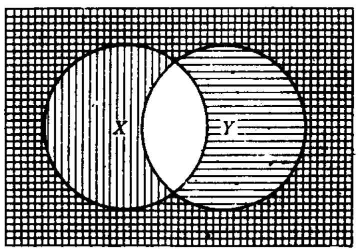

圖1－1. 含有集合X和Y之范氏簡圖。

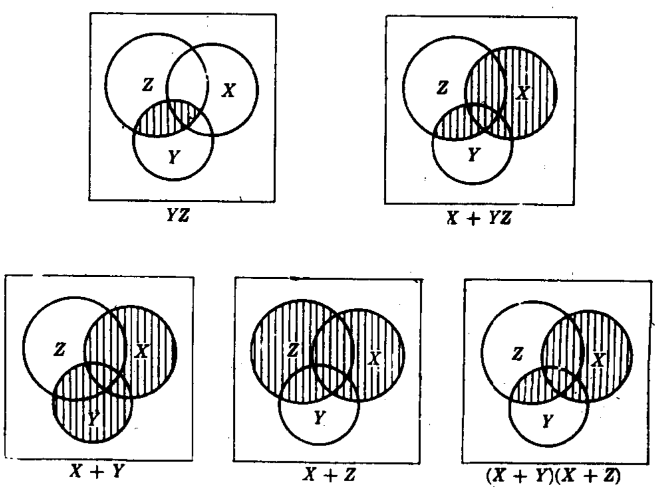

圖1－2. 表示定律$X+YZ=(X+Y)(X+Z)$之范氏簡圖。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

我們再用圖 1 － 2 來做另一說明。此圖表示定律 $X+YZ=(X+Y)(X+Z)$。此圖分段繪成，以便更明白的顯示如何決定所需要之集合，簡圖不須解釋，讀者自然明白。

習　題

1．畫范氏簡圖表示三集合 X，Y 和 Z 有不爲零的交集之個數最多之情形，同時標出代表集合 XYZ，XYZ'，$XY'Z$，$X'YZ$，$XY'Z'$，$X'YZ'$，$X'Y'Z$，$X'Y'Z'$ 之區域。

2．繪出適當的范氏簡圖並加以陰影以表示下列各集合

(a) $X+X'YZ$　(b) $(X+Y')(X'+Y)$

(c) $(X+Y')(X'+Z)$　(d) $XY+XZ+YZ$

3．用范氏簡圖決定對於所有集合而言下列中那些是眞確的

(a) $X(Y+Z)=XY+XZ$　(b) $XY+X'Y+XY'=1$

(c) $X(X+Y)=X$　(d) $X+XY=X$

(e) $X'+Y'=(X+Y)'$　(f) $X+X'=1$

(g) $X+X'Y=X+Y$　(h) $X'Y'+X'Y+XY'=1$

(i) $(X+Y)(X'+Z)=XZ+X'Y$　(j) $(XY)'=X'Y'$

4．用范氏簡圖求出下列各集合之更簡單的代數表示式。

(a) $(XY+X'Y+XY')'$　(b) $[X'(Y+Z)]'$

(c) $(X+Y')(X'+Z)(Y+Z')$　(d) $XY+X'Z+YZ$

1—5　基本定律

在第 1 － 4 節中，我們以范氏簡圖說及在集合代數裡（以及在任何布林代數裡）爲眞確的一些恒等式，這些定律以及在這本書中所要用的其他定律列表於下。爲參考方便，這些定律加以編號。所列之名稱是慣用的，雖然有些名稱與其說反映一般布林代數，不如說是反映某一特殊之應用。例如，“相補律”暗示在集合的代數上應用，而“同語反覆”暗示記號邏輯上之應用。此處不加以任何證明，但每一法則可以用適當的范氏簡圖加以直覺的證

實。

若1代表全體集合且0代表零集合，在集合的代數裡，下列恒等式對於任意集合X，Y與Z皆能成立：

交　換　律

(1a) $XY=YX$　　(1b) $X+Y=Y+X$

結　合　律

(2a) $X(YZ)=(XY)Z$　　(2b) $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$

分　配　律

(3a) $X(Y+Z)=XY+XZ$　　(3b) $X+YZ=(X+Y)(X+Z)$

同　語　反　覆　律

(4a) $XX=X$　　(4b) $X+X=X$

吸　收　律

(5a) $X(X+Y)=X$　　(5b) $X+XY=X$

相　補　律

(6a) $XX'=0$　　(6b) $X+X'=1$

雙　相　補　律

(7) $(X')'=X$

戴摩根定律

(8a) $(XY)'=X'+Y'$　　(8b) $(X+Y)'=X'Y'$

0與1之運算

(9a) $0X=0$　　(9b) $1+X=1$

(10a) $1X=X$　　(10b) $0+X=X$

(11a) $0'=1$　　(11b) $1'=0$

這些定律中許多是我們在實數的代數裡已經熟悉的定律，但是，(3b),(4a),(4b),(5a)和(5b)對於實數是不眞確的，而有關相補的定律顯然地不能應用於數。有些完全明顯的相似性也許是值得驚奇的。因為有相似性的存在，研究這代數與普通代數如何不同就特別的重要了。相違點之中有下述一事實，就是在集合的代數裡決不會有形如$2X$以及X^2之式子出現。而有了同語反覆律也就不需要這一表示式。布林代數的一有趣而且有用之性質是對偶原理(The princiole of duality)。檢查定律之結果，我們可得知，若在任一恒等式中，將每一聯集以交集代之，每一交集代以聯集，0代以1，以及1代以0，則所得之等式也是恒等式。此法則一般來說，在集合代數之中能成立，又在第三章我們將可看到它在任一布林代數中成立。

習　題

1. 畫適當的范氏簡圖驗實基本定律之中在第 1 － 4 節未加驗實者。

1—6　展開，因式分解與簡化

單項式定義爲代表集合的單一字母（加上“ ′ ”號的或沒加上的）或代表交集之兩個或兩個以上的這樣的記號的形式上的積；X，Y'，與$XY'Z$ 爲單項式的例子。多項式是單項式的形上的和，每一單項式叫做多項式的項。多項式表示，對應於每一項的各集合的聯集；$X+Y'+XY'Z$ 是多項式的一個例子。表示集合的交集之任何式中，每一集合叫做交集的因式 (factor)，集合$X'(Y+Z)$的因式是X' 和$Y+Z$，特別的，若一因式爲單一字母（加上“ ′ ”號的或沒加上的），或這樣的記號的和，則此因式叫做線性的；$X+Y'$是線性的，但$Z+XY$和$(X+Y)'$則非線性的。一般來說，數的代數中之所有 有用的術語都可以搬到集合的代數中來應用。

很多起源於集合的代數的代數式用於簡化有意想不到的效果，由於式子中對於數演算的熟悉，使我們易於做因式分解與展開乘積，這些步驟基於第一分配律與式（3a）的應用。我們舉例說明如下：

例1．把$(X+Y)(Z'+W)$展開爲多項式

解：　展開步驟如下：

$$\begin{aligned}(X+Y)(Z'+W) &= (X+Y)Z'+(X+Y)W && \text{由}(3a)\\ &= Z'(X+Y)+W(X+Y) && \text{由}(1a)\\ &= Z'X+Z'Y+WX+WY && \text{由}(3a)\end{aligned}$$

很明顯的，依據觀察的展開方法裡，我們常用交換律，結合律與第一分配律，這與數的代數一樣。也就是，在上例中，最後的結果可直接由左因式與右因式元各項的所有可能乘積而得。

例2．把多項式$AC+AD+BC+BD$分解成線性因式。

解：
$$\begin{aligned}AC+AD+BC+BD &= A(C+D)+B(C+D) && \text{由}(3a)\\ &= (A+B)(C+D) && \text{由}(\ a)\text{和}(3a)\end{aligned}$$

在例2中的因式分解過程恰與數的代數的因式分解一樣，均用（3a）律。集合代數與數的代數有一點不同，集合代數每一式均能分解成線性因式，僅應用（3a）律並不常滿足這種目的的需要。雖然此處未加以證明，但我們知道，只要重複應用第二分配律：（3b）式，任一代數式均能分解成線性因式。

下例說明這種方法也暗示其證明之方法。

例3．將$XY+ZW$分解成線性因式。

解：$XY+ZW=(XY+Z)(XY+W)$　由(3b)

$=(Z+XY)(W+XY)$　由(1b)

$=(Z+X)(Z+Y)(W+X)(W+Y)$　由(3b)

如果將本例的因式分解的過程和例1的展開比較一下，顯然的，我們可由一視察法而得因式分解，而此方法爲展開方法的對偶。若要將兩單項式之和分解因式，先提出其線性因式，然後跟另兩項之和相乘，此兩項中之一項由第一單項式提出，另一項由第二單項式提出，由於提出線性因式之不同，而可得因式分解後有不同的形式，三項單項式或三項以上單項式之和亦可按同樣方法分解因式。只要稍加練習，因式分解就跟展開乘積一樣容易。

展開與分解皆可將所予之式簡化，而在布林代數中除了展開與分解以外，另外還有特別有用的定律，特別是應用(4a)，(4b)，(5a)，(5b)和(6a)，(6b)律時，常得到顯著的簡化結果。雖然無法舉出一個例子就可以說明所有這些定律的用法，但是由下面的例題可以看出化簡的方法與步驟，希望讀者熟讀這些定律，以便在化簡問題時能將這些定律駕輕就熟的運用。

例4．化簡$X(X'+Y)+Y(Y+Z)+Y$

解：$X(X'+Y)+Y(Y+Z)+Y=XX'+XY+Y(Y+Z)+Y$　由(3a)

$=0+XY+Y(Y+Z)+Y$　由(6a)

$=XY+Y(Y+Z)+Y$　由(10b)

$=XY+Y+Y$　由(5a)

$=XY+Y$　由(4b)

$=Y$　由(5b)

還有常應用於化簡的另一恒等式，平常並未列爲基本定律，在此值得一提，請看下列定理。

定理：對任意集合X和Y而言，$X+X'Y=X+Y$

證明：$X+X'Y=(X+X')(X+Y)$　由(3b)

$=1(X+Y)$　由(6b)

$=X+Y$　由(10a)

到底那一種代數式是最簡單的常不易辨解，我們姑且採用一個規則，例如用最少的符號代表的形式，我們就承認它是最簡單的代數式。我們把交集，聯集，或相補律的運算作符號，代表一集合的每一字母每一對括號也算做符號。如此則$X(Y+Z')$包含七個符號，而$XY+YZ'$包含八個符號，第一種

形式比第二種形式簡單。

最後還有一項用以化簡式子的方法是戴摩根定律，若在括號外面有“ ′ ”的符號，或在另一群符號上有“ ′ ”的符號則須應用（8a）或（8b），如例5所示，這些定律很容易地可以推廣到三項以上之和的展開。例如

$$(A+B+C)'=[(A+B)+C]'=(A+B)'C'=A'B'C'$$

同樣地　$(ABC)'=A'+B'+C'$

例5．化簡 $(AB+AC+A'X'Y)(AB'C+A'X'Y'+A'BY)'$

解：（每一步驟的理由，讀者自己補充）

$$\begin{aligned}
&(AB+AC+A'X'Y)(AB'C+A'X'Y'+A'BY)'\\
&\quad=(AB+AC+A'X'Y)(AB'C)'(A'X'Y')'(A'BY)'\\
&\quad=(AB+AC+A'X'Y)(A'+B+C')(A+X+Y)(A+B'+Y')\\
&\quad=(A'X'Y+AB+ABC+A'BX'Y+ABC'+A'C'X'Y)\\
&\qquad\qquad\times(A+AX+B'X+XY'+AY+B'Y)\\
&\quad=AB+A'B'X'Y+ABXY'\\
&\quad=AB+A'B'X'Y
\end{aligned}$$

習　題

1．把下列各式展開成多項式，儘可能使項數少一點

(a)　$(X+Y'X)(X+YZ)$

(b)　$(X+Y)(X'+Y)(X+Y')(X'+Y')$

(c)　$(XY'+YZ)(X'Y'+XZ+YZ)$

(d)　$(A+B+C'+A'X)[AC'(B'+X')']'$

2．分解下列各式為線性因式：

(a)　$X+Y'Z$　　(b) $XY+ZW$

(c)　$X+Y(Z+W)$　(d) $XY'+X'(Y+Z)$

(e)　$AX'+AY(X+Z)$　(f) $ABC+A'D$

3．化簡下列各式（每一式減少到一個符號）

(a)　$AB'A'B'$　　(b) $AB+AB'+A'B+A'B'$

(c)　$AC'+ABC+AC$　　(d) $ABC+A'+B'+C'$

(e)　$(A+B)(A'+B)$　　(f) $(A+AB+ABC)(A+B+C)$

(g)　$(AB'+A'B)'(AB+A'B')'$

(h)　$ABC+ABC'+AB'C+A'BC+AB'C'+A'BC'$
$+A'B'C+A'B'C'$

4. 化簡下列各式

(a) $(AB+AB'+A'B')'$

(b) $(A+B'+C)(AB+A'C')'$

(c) $A'C+B'C+ABCD'$

(d) $(XY+XY'+X'Y)'(X'Y'+ZW)$

(e) $(A'BC')'(AB'C')'$

(f) $XY(XZ'+XY+XYZ)$

(g) $(XY+ABC)(XY+A'+B'+C')$

(h) $ABX+AB'X+X'ABX$

(i) $(XY+XY'+X'Y)(X+Y+Z+X'Y'Z')$

(j) $(XY+X'Y'+XY')'[(X'+Y')(X+Y')]'$

1—7 集合包含的特性

在1－2節裡，記號$A\subseteq B$定義爲集合A包含於集合B，當我們想應用$\subseteq$這符號而不與任何集合有特殊關係時，我們稱它爲集合包含，就像（＋）是用作聯集。1－5節的定律只用於交集，聯集與相補。集合包含亦能滿足某些有趣而有用的基本定律。這些定律可直接由其定義，或用范氏圖得到證實。其他的入門法是用第1 3節裡所指出的事實。就是“若且唯若$XY'=0$則$X\subseteq Y$”。這裡所給的證明是依據$\subseteq$的定義。

定理1. 若$X\subseteq Y$，且$Y\subseteq Z$，則$X\subseteq Z$（包含的傳遞性）

證明：設x是集合X的任意元素，因爲$X\subseteq Y$，由定義得知$x\in Y$，同樣地，由於$Y\subseteq Z$，所以$x\in Z$，但x是X的任意元素，故$X\subseteq Z$。

定理2. 若$X\subseteq Y$，且$X\subseteq Z$，則$X\subseteq YZ$

證明：設x爲X的任意元素，因爲$X\subseteq Y$，所以$x\in Y$，且$X\subseteq Z$，所以$x\in Z$，將之合併起來，由交集的定義，這一段敍述即包涵$x\in YZ$的意思，故$X\subseteq YZ$。

定理3. 對任一集合Z而言，若$X\subseteq Y$，則$X\subseteq Y+Z$

證明：由於聯集的定義，$Y\subseteq Y+Z$，故此定理爲定理1之直接結果。

定理4. 若且唯若$Y'\subseteq X'$，則$X\subseteq Y$

證明：首先設$X\subseteq Y$，且設y'爲Y'的任意元素，由相補的定義，y'不是Y的元素。但每一個X的元素都是Y的元素，且y'不是X

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com