有 限 元 法

雷晓燕 编著

中 国 铁 道 出 版 社
2 0 0 0 年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书介绍了有限元法的基本概念和原理，讨论了弹性力学平面问题、空间问题、薄板弯曲、壳体问题、结构动力学问题的各种单元，以及求解塑性、弹塑性耦合、应变软化、粘塑性和蠕变问题的有限元法。本书还介绍了当前国内外通用的大型有限元程序系统。最后给出了平面问题有限元计算程序FEMTWO的使用说明、算例及源程序，可用于教学。

本书可作为工科院校非力学专业本科生及研究生的教材，也可作为工程技术人员和教师的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

有限元法/雷晓燕编著．-北京:中国铁道出版社，2000.10

ISBN 7-113-03823-9

Ⅰ.有… Ⅱ.雷… Ⅲ.有限元法 Ⅳ.0241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第39165号

书　　名:有限元法
作　　者:雷晓燕
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)
责任编辑:江新锡
封面设计:马　利
印　　刷:中国铁道出版社印刷厂
开　　本:850×1168　1/32　印张:10.25　字数:262千
版　　本:2000年10月第1版　　2000年10月第1次印刷
印　　数:1～1000册
书　　号:ISBN 7-113-03823-9/O·77
定　　价:25.00元

前　　言

有限元技术的巨大进展同计算机硬件和软件的迅速发展相结合，为通用有限元程序的研制提供了一个广阔的基础。科学家经过多年的开发工作，目前已有大量有限元程序问世。有限元法已广泛地应用于研究、生产和设计单位，成为解决工程实践中各种复杂问题必不可少的工具。到 80 年代中期，大约有 500 个面向用户及几千个面向研究的有限元程序系统。前、后处理软件包超过 200 个。全世界估计有20 000多个有限元用户，他们每年大约花费 5 亿美元，用于有限元分析。有限元法仍在发展和完善之中，未来的几年对有限元分析来说是激动人心的。如今，《有限元法》已成为工科大学本科和研究生的必修课，且出版了相应的教科书。但作者在长期的教学实践中感到，目前的教材要么太深太专业化以致使学生望而生畏，要么过于简单而不能解渴。为非力学专业高年级本科生和研究生提供深度适中的教科书正是作者编写本书的目的。在阐述有限元法的基本概念和原理时尽量采用熟知的力学方法，而避免深奥的数学推导。但书中对收敛性、Wilson 非协调元、剪切锁死、零能模式、弹塑性耦合、应变软化和粘塑性等一些深层次的问题也作了较详细的讨论。书中各章末尾附有大量习题，这是本

书的另一特色。

本书内容包括有限元法的基本概念和原理，弹性力学平面问题，空间问题，薄板弯曲，壳体，结构动力学，塑性，弹塑性耦合，应变软化，粘塑性和蠕变问题的有限元法。本书还介绍了当前国内外通用的大型有限元程序系统。最后给出了平面问题有限元计算程序 FEMTWO 的使用说明、算例及源程序，可用于教学。全书内容约需 60 学时，如删除“壳体问题”和“非线性有限元法”中的部分内容作为本科教学，则需 48 学时。

本书可作为工科院校非力学专业本科生及研究生的教材，也可作为工程技术人员和教师的参考书。

书中内容取材力求新颖、适中、联系实际。希望能给读者一些启发。尽管如此，限于作者水平，错误和不当之处还请读者批评指正。

雷晓燕

2000.1

第一章　有限元法的基本概念

1.1 引　　言

在工程技术领域内，工程师常常运用数学和力学的知识将实际问题抽象成它们应遵循的基本方程（常微分方程或偏微分方程）和相应的边界条件。对于大多数的工程技术问题，由于物体的几何形状和载荷作用方式是很复杂的，除了少数方程性质比较简单、且几何边界相当规则的少数问题之外，试图按经典的弹性力学和塑性力学方法获得解析解是十分困难的，甚至是不可能的。为了克服这种困难，有两条解决途径：一是引入简化假设，将方程和边界条件简化为能够处理的问题，从而得到它在简化状态下的解答。这种方法只在有限的情况下是可行的，因为过多的简化将可能导致不正确的甚至错误的解答。另一条解决途径就是数值解法，如有限差分法，边界元法，有限元法和离散元法等。对于非线性问题，有限元法更为有效，且已经出现了许多通用程序。

有限单元法的理论基础是变分原理。最常用的变分原理有最小势能原理、最小余能原理和混合变分原理。采用不同的变分原理，将得到不同的未知场变量。当采用最小势能原理时，必须假设单元内位移场函数的形式。这种以位移作为基本未知量的分析方法称作位移法。当采用最小余能原理时，必须假设应力场的形式。这种方法称为应力法。当采用混合变分原理，例如基于 Hellinger－Reissner 变分原理的混合板单元，就必须同时假设某些位移和某些应力，因而这种方法称为混合法。当用有限元法处理瞬态问题时，常用的变分原理是 Hamilton 原理。进行静力分析时，对大多数问题，应用位移法较简单。因此，这种方法得到了广泛的应用。

有限单元法处理弹性力学问题的基本思路是:

(1)离散化　　将一个受外力作用的连续弹性体离散成一定数量的有限小的单元集合体。单元之间只在结点上互相联系,亦即只有结点才能传递力。

(2)单元分析　　根据弹性力学的基本方程和变分原理建立单元结点力和结点位移之间的关系。

(3)整体分析　　根据结点力的平衡条件建立有限元方程、引入边界条件、解线性方程组以及计算单元应力。

有限元法的主要优点是:①概念浅显,易于掌握,既可以从直观的物理模型来理解,也可以按严格的数学逻辑来研究;②适应性强,应用范围广,不仅能成功地分析具有复杂边界条件、非线性、非均质材料、动力学等难题,而且还可以推广到解答数学方程中的其它边值问题,如热传导、电磁场、流体力学等问题;③已经出现了许多大型结构分析通用程序,如 SAP, NASTRAN, ASKA, ADINA, ANSYS, ABAQUS 等,可以直接应用。这些优点,使有限单元法得到了广泛的应用和发展。

1.2　弹性力学基本量和基本方程的矩阵表示

弹性体在载荷作用下,体内任意一点的应力状态可用应力分量来表示,用向量的形式可写成[6]

平面问题:$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^{\mathrm{T}}$

轴对称问题:$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_r \quad \sigma_z \quad \tau_{rz} \quad \sigma_\theta\}^{\mathrm{T}}$

空间问题:$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}\}^{\mathrm{T}}$

弹性体在载荷作用下,还将产生位移和变形,即弹性体位置的移动和形状的改变。弹性体内任一点的位移可由沿坐标轴方向的位移分量来表示。它的向量形式是

平面问题:$\boldsymbol{u}=\{u \quad v\}^{\mathrm{T}}$

轴对称问题:$\boldsymbol{u}=\{u \quad w\}^{\mathrm{T}}$

空间问题:$\boldsymbol{u}=\{u \quad v \quad w\}^{\mathrm{T}}$

弹性体内任意一点的应变,可以用应变分量来表示。应变的

向量形式是

平面问题：$\boldsymbol{\varepsilon}=\{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^{\mathrm{T}}$

轴对称问题：$\boldsymbol{\varepsilon}=\{\varepsilon_r \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz} \quad \varepsilon_\theta\}^{\mathrm{T}}$

空间问题：$\boldsymbol{\varepsilon}=\{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}\}^{\mathrm{T}}$

弹性体的基本方程有平衡方程、几何方程与本构方程，此外还有边界条件。

1. 平衡方程

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0} \qquad \text{在 } \Omega \text{ 域} \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是微分算子。

平面问题：
$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{1.2a}$$

轴对称问题：
$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2b}$$

$$
\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\
0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\
\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0
\end{bmatrix} \tag{1.2c}
$$

$\boldsymbol{p}$ 为体积力向量

平面问题：$\boldsymbol{p}=\{X \quad Y\}^{\mathrm{T}}$

轴对称问题：$\boldsymbol{p}=\{X \quad Z\}^{\mathrm{T}}$

空间问题：$\boldsymbol{p}=\{X \quad Y \quad Z\}^{\mathrm{T}}$

2. 几何方程

在小位移和小变形的情况下，略去位移导数的高次幂，则应变向量和位移向量间的几何关系有

$$
\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \qquad \text{在 } \Omega \text{ 域} \tag{1.3}
$$

3. 本构方程

弹性力学中应力—应变之间的转换关系也称本构方程。对于各向同性的线弹性材料，应力应变关系的矩阵形式为

$$
\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.4}
$$

其中

平面应力问题：
$$
\boldsymbol{D}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}
1 & \mu & 0 \\
 & 1 & 0 \\
\text{对} & \text{称} & \frac{1-\mu}{2}
\end{bmatrix} \tag{1.5a}
$$

轴对称问题：

$$
\boldsymbol{D}=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & \frac{\mu}{1-\mu} \\ & 1 & 0 & \frac{\mu}{1-\mu} \\ & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ \text{对} & \text{称} & & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5b}
$$

空间问题：

$$
\boldsymbol{D}=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\cdot
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ \text{对} & \text{称} & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \tag{1.5c}
$$

$\boldsymbol{D}$ 称为弹性矩阵。

本构方程的另一种形式是

$$
\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.6}
$$

其中，$\boldsymbol{C}$ 是柔度矩阵。

弹性体 Ω 的全部边界为 Γ。其中在一部分边界上作用着已知的外力，这部分边界称为力的边界，用 Γ_σ 表示；另一部分边界上弹性体的位移已知，这部分边界称为位移边界，用 Γ_u 表示。这两部分边界构成弹性体的全部边界，即 $\Gamma_\sigma+\Gamma_u=\Gamma$。

4. 面力边界条件

设弹性体边界外法线为 $\vec{n}$，其方向余弦为 n_x, n_y, n_z，则面力

边界条件可表示为

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma} \qquad 在\ \Gamma_\sigma\ 上 \tag{1.7}$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 为方向余弦矩阵

平面问题：
$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \tag{1.8a}$$

空间问题：
$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \tag{1.8b}$$

$\bar{\boldsymbol{p}}$ 为面力向量

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \{\bar{X} \quad \bar{Y} \quad \bar{Z}\}^{\mathrm{T}}$$

5. 位移边界条件

已知弹性体边界上的位移为 $\bar{\boldsymbol{u}}$，则用矩阵形式表示的位移边界条件为

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \qquad 在\ \Gamma_u\ 上 \tag{1.9}$$

6. 虚功方程

虚功方程，或位移变分方程，或最小势能原理（等价于平衡微分方程和应力边界条件），反映了物体处处满足静力平衡的要求。而虚余功方程，或应力变分方程，或最小余能原理（等价于几何微分方程和位移边界条件），它反映了物体处处满足位移连续的要求。在位移法中，用到的是虚功方程。虚功方程用矩阵表示的形式为

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma\sigma} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{p}}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{1.10}$$

式中 Ω——弹性体的内部区域；

Γ_σ——面力已知的边界；

$\delta\boldsymbol{u}$——虚位移，

$$\delta\boldsymbol{u} = \{\delta u \quad \delta v \quad \delta w\}^{\mathrm{T}}$$

$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$——虚应变

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \{\delta\epsilon_x \quad \delta\epsilon_y \quad \delta\epsilon_z \quad \delta\gamma_{yz} \quad \delta\gamma_{zx} \quad \delta\gamma_{xy}\}^{\mathrm{T}}$$

在有限元法中，常以虚功相等为条件找出一组作用在若干个结点上的等效集中荷载 $\boldsymbol{Q}$ 去代替体力 $\boldsymbol{p}$ 和面力 $\bar{\boldsymbol{p}}$ 的作用，即

$$\delta \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q} = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma\sigma} \delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p} \mathrm{d}\Gamma \tag{1.11}$$

其中

$$\boldsymbol{\delta a} = \{\delta u_1 \quad \delta v_1 \quad \delta w_1 \quad \delta u_2 \quad \delta v_2 \quad \delta w_2 \cdots\}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Q} = \{X_1 \quad Y_1 \quad Z_1 \quad X_2 \quad Y_2 \quad Z_2 \cdots\}^{\mathrm{T}}$$

7. 最小位能原理

最小位能原理的泛函总位能 Π 采用矩阵表达形式为

$$\boldsymbol{\Pi} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma\sigma} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{p}} \mathrm{d}\Gamma \tag{1.12}$$

最小位能原理告诉我们,在所有区域内满足几何关系(1.3)式,在边界上满足给定位移条件(1.9)的可能位移中,真实位移使系统的总位能取驻值。进一步还可证明在所有可能位移中,真实位移使系统的总位能取最小值。

泛函总位能 Π 取驻值的条件是它的一次变分为零,即

$$\delta \Pi = 0 \tag{1.13}$$

1.3 平面问题 3 结点三角形单元

由于三角形单元对复杂边界有较强的适应能力,因此很容易将一个二维域离散成有限个三角形单元,如图 1.1 所示。

1.3.1 单元位移模式及插值函数

典型的 3 结点三角形单元结点编码为 i, j, m,以逆时针方向编码为正向。每个结点有 2 个位移分量,如图 1.2 所示。

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \qquad (i, j, m)$$

每个单元有 6 个结点位移,即 6 个结点自由度。

单元结点位移向量为

$$\boldsymbol{a}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_i \\ \boldsymbol{a}_j \\ \boldsymbol{a}_m \end{Bmatrix} = \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m\}^{\mathrm{T}}$$

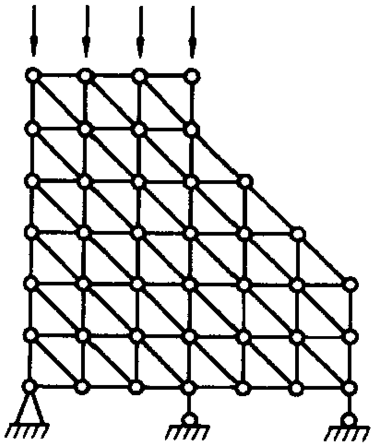

图 1.1　二维域离散

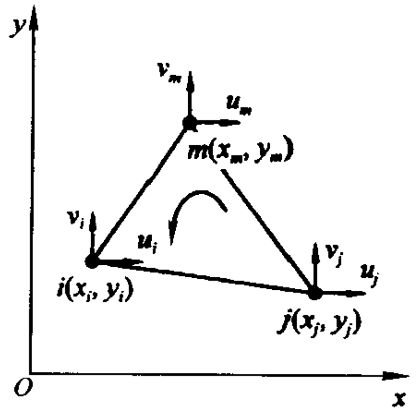

图 1.2　3 结点三角形单元

在第 1.2 节中已经看到，如果弹性体的位移分量是坐标的已知函数，就可以用几何方程求得应变分量，从而用本构方程求得应力分量。但是，如果只是已知弹性体中某几个点(例如结点)位移分量的数值，是不能直接求得应变分量和应力分量的。因此，为了能用结点位移表示应变和应力，首先必须假定一个位移模式，也就是假定位移分量为坐标的某种简单函数。

3 结点三角形单元位移模式选取一次多项式

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \tag{1.14}$$

在 i, j, m 三点，有

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \qquad & v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \qquad & v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \qquad & v_m &= \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m \end{aligned}$$

运用克来姆法则求解上述线性方程组可求得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_6$，再代回(1.14)，整理以后，得

$$\begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned} \tag{1.15}$$

其中

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad (i, j, m) \tag{1.16}$$

称插值函数，a_i，b_i，c_i 为与坐标有关的系数，

$$
\begin{aligned}
a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\
b_i &= y_j - y_m \qquad\qquad (i, j, m) \\
c_i &= -x_j + x_m
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

A 为三角形 ijm 的面积

$$
A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}
$$

插值函数 N_i 还可写成

$$
N_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} \qquad (i, j, m)
$$

从上式可以看出

$$
(N_i)_i = 1, (N_i)_j = 0, (N_i)_m = 0 \qquad (i, j, m)
$$

或

$$
N_i(P) = \delta_{iP} = \begin{cases} 1 & i = P \\ 0 & i \neq P \end{cases}
$$

还可证明

$$
N_i + N_j + N_m = 1
$$

$N_i(x, y)$的几何意义可从图 1.3 看出。由此容易得到

$$
\iint_A N_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y = A
$$

$$
\int_{ij} N_i \mathrm{d}s = \frac{1}{2} l_{ij}
$$

(1.14)式的矩阵形式为

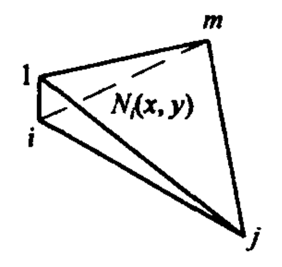

图 1.3　插值函数 $N_i(x, y)$ 的几何意义

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^{e} \tag{1.18}$$

其中,$\boldsymbol{N}$ 为插值函数矩阵或形函数矩阵

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

确定了单元位移后,利用(1.3)式即可求得单元的应变

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^{e}=[\boldsymbol{B}_i \quad \boldsymbol{B}_j \quad \boldsymbol{B}_m]\boldsymbol{a}^{e}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^{e} \tag{1.20}$$

$\boldsymbol{B}$ 为应变矩阵,其分块子矩阵是

$$\boldsymbol{B}_i=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \qquad (i,j,m) \tag{1.21}$$

单元应力可以根据本构方程求得,将(1.20)式代入(1.4)式中,则有

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^{e}=\boldsymbol{s}\boldsymbol{a}^{e} \tag{1.22}$$

其中

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}[\boldsymbol{B}_i \quad \boldsymbol{B}_j \quad \boldsymbol{B}_m]=[\boldsymbol{s}_i \quad \boldsymbol{s}_j \quad \boldsymbol{s}_m] \tag{1.23}$$

$\boldsymbol{s}$ 称为应力矩阵。将平面应力或平面应变的弹性矩阵代入(1.23),可以得到计算平面应力或平面应变问题的单元应力矩阵。$\boldsymbol{s}$ 的分块矩阵为

$$\boldsymbol{s}_i=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_i=\frac{E_0}{2(1-\mu_0^2)A}\begin{bmatrix} b_i & \mu_0 c_i \\ \mu_0 b_i & c_i \\ \frac{1-\mu_0}{2}c_i & \frac{1-\mu_0}{2}b_i \end{bmatrix} \qquad (i,j,m) \tag{1.24}$$

其中,E_0、μ_0 为材料常数,对于平面应力问题:

$$E_0=E \qquad \mu_0=\mu \tag{1.25}$$

对于平面应变问题:

$$E_0=\frac{E}{1-\mu^2}, \quad \mu_0=\frac{\mu}{1-\mu} \tag{1.26}$$

应力矩阵 $\boldsymbol{s}$ 和应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都是常量矩阵,由此而计算出的单

元中各点的应力是相同的。

1.3.2 单元刚度矩阵

为了获得单元刚度矩阵，现在来导出用结点位移表示结点力的表达式。假想在单元 ijm 中发生了虚位移，相应的结点虚位移为 $\delta \boldsymbol{a}^e$，引起的虚应变为 $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$。因为每一个单元所受的荷载都已经移置到结点上，所以该单元所受的外力只是结点力 $\boldsymbol{F}^e$，这时虚功方程(1.10)成为

$$(\delta \boldsymbol{a}^e)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^e t = \iint_{\Omega^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} t \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{1.27}$$

其中，t 为单元厚度。

将(1.20)、(1.22)两式代入(1.27)式，得

$$(\delta \boldsymbol{a}^e)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^e t = (\delta \boldsymbol{a}^e)^{\mathrm{T}} \iint_{\Omega^e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} t \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \boldsymbol{a}^e$$

由于虚位移可以是任意的，因此有

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{k}^e \boldsymbol{a}^e \tag{1.28}$$

其中

$$\boldsymbol{k}^e = \iint_{\Omega^e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} t \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{1.29}$$

称为单元刚度矩阵。它的元素表明该单元的各结点沿坐标方向发生单位位移时引起的结点力。

将应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$ 代入(1.29)式，即得到平面问题 3 结点三角形单元刚度矩阵，写成分块形式如下

$$\boldsymbol{k}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{ii} & \boldsymbol{k}_{ij} & \boldsymbol{k}_{im} \\ \boldsymbol{k}_{ji} & \boldsymbol{k}_{jj} & \boldsymbol{k}_{jm} \\ \boldsymbol{k}_{mi} & \boldsymbol{k}_{mj} & \boldsymbol{k}_{mm} \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

其中

$$\boldsymbol{k}_{rs} = \iint_{\Omega^e} \boldsymbol{B}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_s t \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{E_0 t}{4(1 - \mu_0^2) A}$$

$$\begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\mu_0}{2} c_r c_s & \mu_0 b_r c_s + \frac{1-\mu_0}{2} c_r b_s \\ \mu_0 c_r b_s + \frac{1-\mu_0}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\mu_0}{2} b_r b_s \end{bmatrix}$$

$$(r = i,j,m; s = i,j,m) \tag{1.31}$$

单元刚度矩阵具有如下性质：

(1)由 $\boldsymbol{k}_{rs}$ 的表达式可见，$\boldsymbol{k}_{rs} = \boldsymbol{k}_{sr}^{\mathrm{T}}$；

(2)$\boldsymbol{k}^e$ 为奇异矩阵；

(3)$\boldsymbol{k}^e$ 的元素取决于单元的形状、大小、方位和弹性常数，而与单元的位置无关，即，不随单元或坐标轴的平行移动而改变；

(4)平面图形相似的单元，若材料性质和厚度相同，则他们具有相同的单元刚度矩阵。

1.3.3 单元等效结点荷载

由(1.11)式得到单元等效结点荷载

$$\boldsymbol{Q}^e = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}^e + \boldsymbol{Q}_{\bar{\mathrm{p}}}^e \tag{1.32}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}^e = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p} t \, \mathrm{d}\Omega \tag{1.33}$$

为由体积力而产生的单元等效结点荷载，

$$\boldsymbol{Q}_{\bar{\mathrm{p}}}^e = \int_{\Gamma_\sigma^e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{p}} t \, \mathrm{d}\Gamma \tag{1.34}$$

为由面力而产生的单元等效结点荷载。

1. 均质等厚单元的自重

单元的单位体积重量为 ρ，如图 1.4 所示。根据(1.33)式，现有

$$\boldsymbol{p} = \{0 \quad -\rho\}^{\mathrm{T}}$$

自重产生的等效结点荷载是

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}^e = -\frac{1}{3}\rho t A \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\}^{\mathrm{T}} \tag{1.35}$$

2. 单元 ij 边上沿 x 方向作用均布荷载，如图 1.5 所示。这时边界上的面力为

$$\bar{p} = \{q \quad 0\}^{\mathrm{T}}$$

单元等效结点荷载为

$$Q_p^e = \frac{1}{2} qlt \{1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^{\mathrm{T}} \tag{1.36}$$

其中,l 为 ij 边的长度。

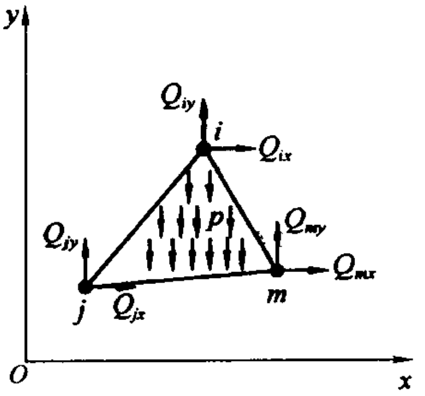

图 1.4　三角形单元作用体积力

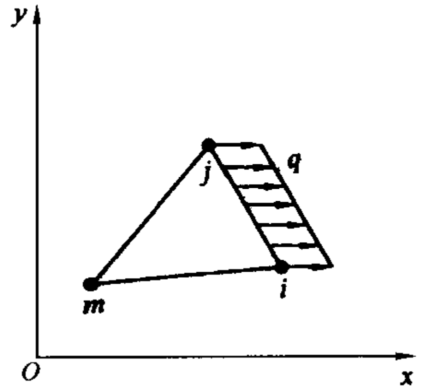

图 1.5　ij 边上作用均布荷载

1.3.4　整体平衡方程

在位移有限元法中,求解结点位移的方程是平衡方程。为了说明整体平衡方程的建立,现在来考虑图 1.6 所示问题上任意一结点 i 的平衡。结点 i 承受由实际荷载转化过来的等效结点荷载 $\boldsymbol{Q}$,其分量为 X_i 和 Y_i。同时,结点 i 还承受相邻单元施加给它的结点力,用 $\sum\limits_e \boldsymbol{F}^e$ 表示。$\sum\limits_e$ 表示对那些环绕结点 i 的所有单元求和。结点力 $\boldsymbol{F}^e$ 的分量为 U_i 和 V_i,它与结点位移间的关系如(1.28)式。由结点 i 的平衡条件,得

$$X_i = \sum_e U_i \qquad Y_i = \sum_e V_i \tag{1.37}$$

写成矩阵的形式,则有

$$\boldsymbol{Q}_i = \sum_e \boldsymbol{F}_i^e \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.38}$$

其中,n 为结点总数。将(1.28)式代入(1.38)中,并集合所有结点的平衡方程,得到

$$\boldsymbol{Ka} = \boldsymbol{Q} \tag{1.39}$$