根据新教材同步编写

SHUANGSE DIANJIN

总 策 划　武家麟 常 成
主　　编　强 华 宏 河
本册主编　宁文苑

双色点津

课文点津　回味无穷
课上良师　课下益友
省时省力　耳目一新

初二数学

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

初二数学

双色点津

总策划　武家麟　常　成
主　编　强　华　宏　河
本册主编　宁文苑

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

双色点津．初二/宁文苑主编．－北京：首都师范大学出版社，2002.6

ISBN 7-81064-314-2

Ⅰ．双…　Ⅱ．宁…　Ⅲ．数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ．G634.413

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第051527号

SHUANGSE DIANJIN·CHUER SHUXUE

双色点津·初二数学

首都师范大学出版社

(北京西三环北路105号　邮政编码100037)

北京嘉实印刷有限公司印刷　全国新华书店经销

2002年6月第1版　2002年6月第1次印刷

开本 850×1168　1/32　印张　12.875

字数 425千　印数　00,001~10,500册

定价：19.50元

双色点津

前　言

本书依据最新颁布的初中数学教学大纲和最新人[illegible]

其次，本丛书在改进学生的学习方法、增长知识面上下了一番功夫，如设置了“课文拓展深化”栏目，不但让学生学习有兴趣，更在有兴趣的学习中增长知识、扩大视野，为进一步的学习作好充足准备。

第三，本丛书对某些重点、难点、考点、疑点等采用“双色”套印，加以“点津”，一目了然，方便记忆和查找。

最后，本丛书的体例设计是全新的，版式设计也独具匠心，这将有助于学生的学习。

常　成

2002. 3

双色点津

目录

代数部分

几何部分

第8章 因式分解（代数部分）

8.1 提公因式法

课文内容注解

1. 因式分解的意义：

把一个多项式化成几个整式的积的形式叫做因式分解.

概念可从三方面来理解：

（1）因式分解是对一个多项式而言：一个单项式本身就是数与字母的积，不需要因式分解.例如 $8a^2b=2a\cdot4ab$ 只是一种恒等变形，不是因式分解.

（2）因式分解与整式乘法是互逆的.例如（$a+b$）（$a-b$）$=a^2-b^2$ 是整式乘法，而 $a^2-b^2=$（$a+b$）·（$a-b$）是因式分解.

（3）因式分解实质上是整式的一种恒等变式，变形前后的值始终保持不变.

2. 因式分解的结果要求：

（1）因式分解的结果必须是几个整式的乘积形式，下列两种变形虽是恒等变形，但都不是因式分解.例如①$ax+ay+z=a(x+y)+z$，右端不是积的形式，而是加的形式，所以不是因式分解；②$2x-y=x\left(2-\frac{y}{x}\right)$，其中 $x\neq0$，右端虽是积的形式，但 $2-\frac{y}{x}$ 是分式，不是整式，所以也不是因式分解.

（2）因式分解必须进行到每一个因式不能再分解为止.例如 $6a^2-3a=a(6a-3)$ 中，右端虽是乘积的形式，而且两个因式 a 和 $6a-3$ 都是整式，但 $6a-3$ 中还有公因式 3，所以这个因式分解不合乎要求，正确应是 $6a^2-3a=3a(2a-1)$.

3. 提公因式法：

（1）公因式的定义：

多项式每一项都含有的因式叫公因式.

例如 $2ax-4bx$ 中，每一项都有 $2x$，所以 $2x$ 是这个多项式的公因式.

（2）公因式的寻找条件：

①系数——各项系数的最大公约数；

②字母——各项都含有的相同字母；

③指数——相同字母的最低次幂.

例如 $-4a^3b^2+6a^2b-2ab$ 中，$-4,6,-2$ 的最大公约数是 2，各项都含有相同字母 a,b，且 a 的最低次幂是 1，b 的最低次幂也是 1，但由于第一项系数是负，所以公因式是 $-2ab$.

（3）公因式的结构特点：

①单项式；

②多项式. 实质上是把相同结构的整式看作一个整体

（4）提公因式后的结果形式：

提公因式法是因式分解中最基础最简单的方法之一，其特点是把公因式作为一个因式，剩下的“部分”作为另一因式组成两部分因式的乘积形式.

用符号描述即为：

$$\text{多项式}\xrightarrow{\text{提公因式}}(\text{公因式})\cdot(\triangle+\square+\bigcirc)$$

课文拓展深化

1. 重点：本节的重点是因式分解的意义和要求，提公因式法.

2. 难点：本节的难点是确定公因式的方法.

3. 考点：本节的内容在中考试题中常以填空题和选择题的形式出现，主要考查因式分解的意义和要求，多项式提公因式的方法.

典型例题剖析

［例 1］ 已知下列五个等式：

（1）$x^2-2x-3=x(x-2)-3$； 分解彻底吗？

（2）$6a^2b^2c=2a^2\cdot 3b^2c$；

这是多项式吗？

（3）$x(x+1)=x^2+x$；

这是积的形式吗？

（4）$a^2-4b^2=(a+2b)(a-2b)$；

(5) $a^2-a=a^2\left(1-\frac{1}{a}\right)$.

这是整式吗?

上式从左到右的变形,属因式分解的序号是____________.

(1)右边没有完全写成因式的乘积的形式,(2)左边是单项式的形式,(3)是整式乘法,(4)符合因式分解结果特点,(5)右边因式 $1-\frac{1}{a}$ 是非整式.

解:答案填上(4).

因式分解的对象是多项式,其结果满足两条件:(1)是因式的乘积形式;(2)各因式都是整式.

[例 2] 把下列各式分解因式:

(1) $-4a^2b+12ab^2$; 第一项系数是什么数?

(2) xy^2+3x^2y-y; 这是几项式?

(3) $3x(a-b)-9x^2(a-b)$. 公因式是什么?

找公因式必须从“大、同、低”三字入手:即各项系数的　　公约数作为公因式的数字因式;各项中　　字母作为公因式中的字母;并取它们的　　次幂作为相同字母的指数.

解:(1)原式 $=-(4a^2b-12ab^2)$ 　第一项系数是负数时,应在提公因式前先把负号提出来

$=-4ab(a-3b)$.

(2)原式 $=y(xy+3x^2-1)$. 　提公因式 y 后,不要漏写“-1”

(3)原式 $=3x(a-b)(1-3x)$. 　把 $a-b$ 看作一个整体对待

(1)多项式的第一项系数是负数时,一般要先提出“-”号,使括号内的第一项的系数是正的;

(2)用多项式每一项除以公因式后的商即为提公因式后剩下的项,其项数与原多项式的项数相同;

(3)公因式要考虑是单项式型还是多项式型,同时注意将多项式型看作一个整体.

[例 3] 把下列多项式分解因式：

(1) $3(a-b)+x(b-a)$；

(2) $(y-x)^2+2x-2y$.

分析 先找出 $3(a-b)$ 与 $x(b-a)$ 及 $(y-x)^2$ 与 $2x-2y$ 的公因式，再提公因式.

解：(1) 原式 $=3(a-b)-x(a-b)$ （$(a-b)$ 与 $(b-a)$ 之间有什么关系？）

$=(a-b)(3-x)$.

(2) 原式 $=(x-y)^2+2(x-y)$ （$(x-y)^2$ 与 $(y-x)^2$ 能相等吗？）

$=(x-y)(x-y+2)$.

或原式 $=(y-x)^2-2(y-x)$

$=(y-x)(y-x-2)$.

评注 对于各项没有公因式必须经过变形"构造"出公因式，其办法是熟记以下结论：$(a-b)^n=\begin{cases}(b-a)^n, & n \text{ 为偶数}, \\ -(b-a)^n, & n \text{ 为奇数}.\end{cases}$

[例 4] 求证：$3^{2002}-4\times3^{2001}+10\times3^{2000}$ 能被 7 整除.

（各项的公因数是什么？）

分析 本题关键是"利用因式分解"提取 3^{2000}，然后求出含有 7 的倍数的因数.

证明：$3^{2002}-4\times3^{2001}+10\times3^{2000}$

$=3^{2000}(3^2-4\times3+10)$ （括号里计算出的数是几？）

$=3^{2000}\times7$

$\because$ 7×3^{2000} 能被 7 整除，

$\therefore$ $3^{2002}-4\times3^{2001}+10\times3^{2000}$ 能被 7 整除.

评注 若一个式子能被 n 整除，则必定含有 n 的式子.

[例 5] 已知 $a-2b=2, ab=16$，求 $2a^2b-4ab^2$ 的值.

分析 $2a^2b-4ab^2$ 提公因式 $2ab$ 后，另一因式为 $a-2b$，其结果正好是两个已知式子乘积的形式.

解：$2a^2b-4ab^2=2ab(a-2b)$. 当 $a-2b=2, ab=16$ 时，

原式 $=2ab(a-2b)=2\times16\times2=64$.

评注　学会将 $a-2b$ 和 ab 看作一个整体,采用整体代入的思想方法解题,而不必求出 a 和 b 的值.

综合能力运用

一、基础知识巩固

1. 填空题:

(1)因式分解是把一个________化或几个________;

(2)多项式 $3ab^2-4ab+5a^2$ 各项的公因式是________;

(3)若多项式 $6xy^2-15x^2y+30y$ 提公因式 $3y$ 后,则另一因式是________;

(4)在下列横线上添上"+"或"-"号,使等式成立.

①$(x-y)=$___$(y-x)$; ②$(x-y)^2=$___$(y-x)^2$; ③$(x-y)^3=$___$(y-x)^3$.

(5)写出一个以 $3x(a-b)$ 为各项公因式的多项式________.

2. 选择题: 公因式是由哪几部分组成的?

(1)下列各式中从左到右的变形属因式分解的是　(　　)

A. $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$　　B. $x^2-\frac{1}{y^2}=\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x-\frac{1}{y}\right)$

C. $a^2-4b^2=(a+2b)(a-2b)$　　D. $x^2-2x+1=x(x-2)+1$

(2)把多项式 $-8m^3+12m^2-4m$ 分解因式,其结果是　(　　)

A. $-4m(2m^2-3m)$　　B. $-4m(2m^2+3m-1)$

C. $-4m(2m^2-3m+1)$　　D. $-2m(4m^2-6m+2)$

(3)分解 $2abc-4a^2b^2+6ab$ 的因式时,应提公因式是　(　　)

A. $2a$　　B. $2b$　　C. $2ab$　　D. $2abc$

(4)将 $-axy-ax^2y^2+2axz$ 提公因式后,则另一因式是　(　　)

A. $xy+x^2y^2-2xz$　　B. $-y+x^2y-2z$

C. $y-xy^2+2z$　　D. $y+xy^2-2z$

二、素质能力培养

3. 把下列各式分解因式:

(1) $2x^3-4x^2-6x$;　　(2) $x(a-b)-a+b$;

(3) $(x-2)^2-2(x-2)$;　　(4) $6x(x-y)^2+3(y-x)^3$.

4. 用简便方法计算: 你观察到了各式的公因数吗?

(1) $\frac{1}{4}\times25.3+0.25\times78.6-3.9\times\frac{1}{4}$;　　(2) 202^2-404;

(3) $1999\times1999+2000+1999$;　　(4) $23\frac{3}{5}\times25-12\frac{2}{5}\times25+8\frac{4}{5}\times25$.

三、综合能力提高

5. 求证：16^3+4^7 能被 20 整除.

能提取 20 的因数吗？

6. 不解方程组 $\begin{cases}2x+y=6,\\x-3y=1,\end{cases}$ 求 $7y(x-3y)^2-2(3y-x)^3$ 的值.

提示：转化为 $2x+y$ 与 $x-3y$ 的形式

8.2 运用公式法

课文内容注解

1. 平方差公式：

(1) 公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(2) 公式的结构特点：

①两项；②两项都是平方项；③两项的符号相反.

用口诀简记为“首平方、末平方，减号在中央”.

2. 完全平方公式：

(1) 公式：$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

(2) 公式的结构特点：

①三项；②首末两项是平方项，中间项是 $2ab$ 项；③首末两项的符号相同.

3. 公式中字母的含义：

公式中 a,b 可为一个数，单项式，也可为多项式.

4. 运用公式方法：

(1) 遇到二项式分解因式，选用平方差公式；

(2) 遇到三项式分解因式，选用完全平方公式.

课文拓展深化

1. 重点:本节的重点是平方差公式与完全平方公式.

2. 难点:本节的难点是灵活运用平方差公式和完全平方公式进行因式分解.

3. 考点:本节的内容在中考试题中常以填空题、选择题和解答题的形式出现,主要考查运用提公因式法和运用公式法分解因式.

典型例题剖析

[例 1]　把下列各多项式,用平方差公式或完全平方公式在有理数范围内分解因式,如果不能,请说明理由.

第一、三项符号有什么关系?

(1) a^2-b;　(2) $-x^2-4y^2$;　(3) $4x^2-12x-9$;

(4) $2a^2-3b^2$;　(5) $-4xy-x^2-4y^2$;　(6) x^2-8x+9.

8x 能分解成 $2\cdot x\cdot 3$ 吗?

分析　用平方差公式和完全平方公式的结构来进行对比分析.

解:(1) a^2-b 不能分解,其理由是 b 不是平方形式.

(2) $-x^2-4y^2$ 不能分解,其理由是两项符号相同,即 $-x^2-4y^2=-(x^2+4y^2)$.

(3) $4x^2-12x-9$ 不能分解,其理由是 $4x^2=(2x)^2$,$9=3^2$,但 $4x^2$ 与 -9 不是相同的符号.

(4) $2a^2-3b^2$ 不能分解,其理由是 2 和 3 不是完全平方数.

(5) $\because x^2=(x)^2, 4y^2=(2y)^2, 4xy=2\cdot x\cdot 2y$,

$\therefore -4xy-x^2-4y^2=-(x^2+4xy+4y^2)=-(x+2y)^2$.

(6) x^2-8x+9 不能分解,其理由是 $x^2=(x)^2, 9=3^2$,但 $8x\neq 2\cdot x\cdot 3$,故不能用完全平方公式来分解.

评注　对于二项式分解必须化成平方差公式结构,对于三项式分解必须先找出"平方和",然后再找中间项 $2ab$ 的方法来判断是否适合公式.

[例 2]　运用平方差公式分解下列因式:

（1）$16x^2-25$;　　（2）a^4-16;

（3）$\frac{1}{3}x^2y^2-3y^2$;　　（4）$4(a-b)^2-9(a+b)^2$.

有公因式吗?

分析　先将上述各项转化成 a^2-b^2 的形式，再对照公式结构进行分解.

解：（1）原式 $=(4x)^2-5^2$　将 $16x^2$ 化成 $(4x)^2$ 形式

$=(4x+5)(4x-5)$.

（2）原式 $=(a^2)^2-4^2$　先化成 a^2-b^2 的形式，再确定公式中 a,b 的值

$=(a^2+4)(a^2-4)$　还能再分解吗?

$=(a^2+4)(a+2)(a-2)$.

（3）原式 $=\frac{1}{3}y^2(x^2-9)$　提公因式时，一般系数因式都应先考虑提出分数因式

$=\frac{1}{3}y^2(x+3)(x-3)$.　化成 $(\ )^2-(\ )^2$ 时，一定要把 4 和 9 考虑放进去

（4）原式 $=[2(a-b)]^2-[3(a+b)]^2$

$=[2(a-b)+3(a+b)][2(a-b)-3(a+b)]$

$=(5a+b)(-a-5b)$　首项含有“负”号，要考虑提取“-”

$=-(5a+b)(a+5b)$.

评注　（1）多项式各项含有公因式，则先提公因式，再进一步分解因式；

（2）分解因式首项含有负号，一般把负号先行提出.

[例 3]　用完全平方公式分解下列各式：

（1）x^4-4x^2+4;　　（2）$-3x^3-6x^2-3x$;

（3）$(a-b)^2-2b(a-b)+b^2$;　　（4）$(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$.

分析　先把各式整理成 $a^2\pm2ab+b^2$ 公式原型的形式，然后确定 a,b 分别代表什么，从而得到最后结果.

解：（1）原式 $=(x^2)^2-2x^2\cdot2+2^2$　公式中 a 代表 x^2，b 代表 2

$=(x^2-2)^2$.

（2）原式 $=-3x(x^2+2x+1)$　先提取公因式 $-3x$

$=-3x(x+1)^2$.

(3) 原式$=(a-b)^2-2\cdot(a-b)\cdot b+b^2$ 化成符合完全平方公式的结构形式

$=[(a-b)-b]^2$ 分解因式中一般不要用中括号

$=(a-2b)^2$.

(4) 原式$=(x^2+y^2)^2-(2xy)^2$ 化成平方形式

$=(x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy)$ 利用平方差公式分解

$=(x+y)^2(x-y)^2$. 利用完全平方公式,得到结果不能再回到$(x^2-y^2)^2$的形式

评注　因式分解后出现两个相同因式,应写成幂的形式.

[例 4]　利用公式,简便计算下列各式:

(1) $100^2-99^2+98^2-97^2+96^2-95^2+\cdots+2^2-1$;

(2) $51^2+51\times98+49^2$.

分析　题(1)中两项适合用平方差公式,而题(2)中,将 51×98 写成 $2\times51\times49$ 适合完全平方公式计算.

解:(1) 原式$=(100+99)(100-99)+(98+97)(98-97)+(96+95)(96-95)+\cdots+(2+1)\cdot(2-1)$

$=199\times1+195\times1+191\times1+\cdots+3\times1$

$=(199+3)\times25$ 分别把(199+3)、(195+7)、(191+11)、…相加,这样的数共有 25 个

$=5050$.

(2) 原式$=51^2+2\times51\times49+49^2$ 98 为什么写成 2×49 的形式

$=(51+49)^2$

$=100^2$

$=10000$.

评注　灵活地运用公式,对于简便运算可带来很多方便.

[例 5]　已知 a,b 互为相反数,求$\frac{1}{4}(a-b)^2+ab$ 的值.

已知$(a+b)^2$和$(a-b)^2$有什么关系?

分析　将$\frac{1}{4}(a-b)^2+ab$ 展开整理,化成含有 $a+b$ 的形式.