大学数学丛书

拓扑学基本教程

J. R. 曼克勒斯著

科学出版社

大学数学丛书

拓扑学基本教程

J. R. 曼克勒斯 著

罗嵩龄 许依群
徐定宥 熊金城 译

科 学 出 版 社

1987

内 容 簡 介

本书是拓扑学基本教程中较有特色的一本。全书分为两部分。第一部分有四章，包括集论初步及点集拓扑学的核心——拓扑空间，连通性和紧性，可数性与分离性公理。第二部分的四章独立成篇，包括 Tychonoff 定理，度量化定理和仿紧性，完备度量空间和函数空间，最后一章是代数拓扑学中的基本群与覆盖空间。每节后面的大量习题及前四章每章后的"附加习题"是正文的补充和引伸。全书编排灵活，为一学期及一学年的教学提供了多种选择方案。

本书可作为大专院校数学系学生或研究生的教学用书，也可供有关专业工作者参考。

James R. Munkres
TOPOLOGY: A FIRST COURSE
Prentice-Hall, Inc., 1975

大学数学丛书
拓扑学基本教程
J. R. 曼克勒斯 著
罗嵩龄 许依群
徐定宥 熊金城 译
责任编辑 杜小杨
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1987年8月第一版 开本：850×1168 1/32
1987年8月第一次印刷 印张：14 1/2 插页：1
印数：0001—5,000 字数：380,000

统一书号：13031·3914
本社书号：5133·13—1

定价：4.20 元

《大学数学丛书》出版说明

本丛书出版的目的是为我国大学数学基础课教学提供优秀的参考读物。我们将精选国外著名大学近年来最受欢迎的数学教本，陆续翻译出版。选择的标准是：内容充实，不但包括基本的教学内容，还能有一些较深的补充阅读材料；取材和观点新颖，能反映现代数学的新成就、新思想；论证严谨，系统性强，便于教学参考。初步计划每一分支学科先出版一、两种，形成一套比较系统的大学数学教学参考书。

近年来我社正在出版《现代数学基础丛书》和《现代数学译丛》，其读者对象主要是大学数学系高年级学生、研究生和青年数学研究工作者；而这套丛书，程度相当于大学本科，适合一般数学系大学生阅读，也可供其他理工科大学生、有关教师和工程技术人员参考，其读者范围更广泛一些。

本丛书的出版已得到一些大学数学系的关心和支持。为了改进工作，我们欢迎读者提供宝贵意见，特别欢迎有经验的教师能够推荐新书，或担任翻译工作。我们热切地希望，经过大家的共同努力，本丛书确实能够对提高我国大学数学教学水平有所助益。

科学出版社

序　言

本书是按照大学高年级或一年级研究生的水平，为开设一学期或两学期“拓扑学引论”而写的教材。

拓扑学本身是十分令人感兴趣的，同时，它也为进一步学习分析、几何及代数拓扑奠定基础。对于拓扑学基本教程应该包括哪些内容，数学家们并没有一致的看法。有许多课题都可以放到这种教程中去，但是，它们不可能同样适合于各种不同的目的。在选择这些材料时，我试图在各种不同观点之间取得一种平衡。

预备知识　学习本书的大部分内容，并不需要很多正式的预备知识，甚至不要求读者通晓很多集合论的内容。然而，我必须指出，如果读者没有学过一些分析或者“严格微积分”的话，那么他对本书第一部分引进那些概念的动机将会感到不解。虽然我们并不要求学生具备连续函数，开集与闭集，度量空间等概念，但是如果事先知道一些，那将方便得多。在第八章中，我们假定读者已熟悉了群论初步。

根据我的经验，在上拓扑学课时，多数学生已经有了一些关于数学基础的知识，但是他们之间悬殊很大。所以开始时我讲了整整一章集合论与逻辑。从初等程度出发，逐步达到一种可被描述为“半通”的水平。我们所论述的那些内容（仅仅那些内容）是本书后面要用到的。许多学生对于前几节的内容比较熟悉，但是不少人会发现，到了本章中间，他们就未必能左右逢源了。因此，在这一章中，教师要花费多少时间和精力，很大程度上取决于学生的数学水平及能力。学生是否掌握了足以开始学习拓扑学的集合论知识，一个有效的检验方法，就是看他能否顺利地（正确地！）完成习题。

本书的内容编排　如果本书作为一个学期的教材，则对所涉

及的材料必须作出某种选择。我试图将这本书编得尽可能地有伸缩性，以便教师可以自由地选取所需要的材料。

本书的第一部分包括前面四章。我认为这些内容都是任何一本正式的拓扑学基本教程所必须具备的。这些材料的"核心"就是我们将要研究的拓扑空间、连通性、紧性(直到有限乘积的紧性)，可数性公理及分离性公理(直到 Urysohn 度量化定理)。在有些节前面加了星号，它们不是最基本的内容，可以把它们略去或者推后，而不会影响本书的系统性。

本书的第二部分包括各自完全独立的四章。它们只与第一部分的内容有关，教师可以按照任一种次序来讲授。此外，如果只想讲授后面这几章中某一章的一部分，则可以看看这一章的引言。那里画了一张图表，说明本章中各节之间的依赖关系。比如，教师想在自己的课程中证明 Jordan 曲线定理，那么由表中可查到，第八章前面的几节中哪些必不可少，哪些节可以略去。

后面几章中有些内容与第一部分里的一个或几个打了星号的节有关。我们把每个这种依赖关系写在有星号的节开始处的脚注里，并在该章的引言里再次指明。有些习题也与前面打星号的节有关，只不过这种依赖关系是十分明显的。

教学安排 大多数把本书作为一个学期课程的教师希望讲完第一部分这个"核心"内容，再加上 Tychonoff 定理(§5-1)。许多人则希望再增加一些东西，比如，第一部分中打了星号的某些节(我主张至少要讲局部紧性)。也可以从第二部分中选择一个或几个专题，比如 Stone-Čech 紧化(§5-3)，度量化定理(第六章)，Peano 曲线(§7-2)，Ascoli 定理的一种或两种表述(§7-3 与 §7-6)，维数论(§7-9)，基本群及其应用(§8-1—§8-10)或 Jordan 曲线定理(§8-13)。上述各种方案，我都在不同学期里采用过。

如果教师想侧重于代数拓扑，教材可以这样安排：第一章到第三章，第八章全部。只要我们跳过 §8-12 的习题 5 (其中涉及到正规性的概念)，略去第四章并不至于引起困难。

另一种可能的安排是取自(美国数学协会)大学数学课程规划委员会对一年级研究生一个学期拓扑学课程的意见，它包括第二、三、四章，§5-1；§6-1，§6-3，§6-4；§7-1；§8-1 至 §8-5，§8-8 至 §8-11 以及 §8-14. 这个方案假定学生已经学过（相当于本书第一章的)集合论初步知识.

如果作为两个学期的教材，则完全可以教完这本书.

J. R. 曼克勒斯

告读者

有两件事要加以说明，这就是习题和例题。

做习题是学习数学的重要一环，没有一个学习拓扑学的人是只靠熟读教科书中的定义、定理及已解出的例题就能学好的。他必须自己做一些。配习题的目的就在提供这种机会。

习题按照难易程度编排，比较容易的一般放在前面，有些题是常规性的，它的证明可以用来检验读者对前一节的定义和例题是否理解了。另外一些题则比较难。比如说要求读者试着推广书中的定理。虽然所得的结论本身就很有意思，但这类习题的主要目的还在于鼓励学生更细心地理解书中定理的证明，更透彻地掌握它的思想实质，这比仅仅记住要更为深刻(我希望如此!)。

有一些用“不写出结论”的形式给出的习题，常常会使学生们感到无从下手。比如这样一道题：“每一个正则的 Lindelöf 空间是正规的吗?”就会使他们感到讨厌。“我不知道如何去解决这个问题，是去证明它，还是去找一个反例，或者是别的什么呢?”但是，(教科书之外的)数学往往正是象这个样子。数学家常常需要去对付一个猜想或问题，而事先不知道正确的答案是什么。读者应在这方面获得一些体验。

有少量习题难一些，我们加了星号。当然也不是太难，最好的学生一般能够解决它们。

掌握任何一个数学对象的另一主要环节是贮备一批有用的例题。当然应该知道那些主要的例子，正是由于对它们的探讨而导致了一般理论，或使理论得到重要应用。手中还应有少量的反例，以备用来检验那些似乎正确的猜想。

在学习拓扑学时，人们往往容易花费许多时间去研究那些“古怪的反例”。做一个反例需要有技巧，也常常是一种乐趣。但是，

这些反例往往对于了解什么是拓扑学并不起决定性作用。好在我们的书是基本教程，不需要太多的反例，有那么几个就够了。下面给出几个：

R^J 任意多个实直线集在积拓扑，一致收敛拓扑与箱拓扑下的积空间。

R_l 实直线以区间 $[a, b)$ 为拓扑基的拓扑空间。

S_Ω 最小不可数良序集。

$I\times I$ 在字典序拓扑下，闭单位正方形。

对于这些例子必须十分精通、熟悉，以后将多次用到它们。

目　录

第 二 部 分

第 一 部 分

第一章　集合论与逻辑

我们象大多数的数学家那样，对于集合论采取一种朴素的观点．我们假定已经清楚地知道对象的集合是什么意思，并且在此基础上进行讨论，而不再深入分析这个概念．这种分析完全属于数学基础和数理逻辑，而对这些领域的研究，不是我们的目的．

逻辑学家十分详细地研究过集合论，并就这个课题给出了若干公理．其中每个公理表示已经被数学家普遍承认的集合的一个性质，全体公理则为建立数学的其余部分提供了极其广泛而坚实的基础．

毫无疑问，使用集合论必须小心，只凭直观可能导致矛盾．事实上，将集合论公理化的原因之一，就是建立与集合有关的一些法则以避免这些矛盾．尽管我们并不深入地讨论这些公理，但在涉及集合时仍要遵循由它们导出的法则．本书的读者可以采取“依样画葫芦”的方式，即通过观察我们怎样处理，再加上自己的实践来学会对待集合．如果对某一方面希望有更深刻、更详细的了解，那么可以去学逻辑学课程或数学基础课程．

1-1　基 本 概 念

我们将在本节介绍集合论的概念，并建立基本的术语和记号．还要讲初等逻辑学中一些根据经验来看容易引起混淆的地方．

基本记号

我们通常用大写字母 A, B, …表示集合，小写字母 a, b, …

表示属于集合的**成员**或**元素**。如果成员 a 属于集合 A，就记作

$$a \in A.$$

如果 a 不属于 A，就记作

$$a \notin A.$$

本书中用到的等号 = 是指逻辑等同。当我们写 $a=b$ 时，就意味着"a"和"b"是同一个成员的符号。这就象在算术中写 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 一样。类似地，$A=B$ 就是说"A"和"B"是同一个集合的符号；也就是说 A 与 B 含有完全相同的成员。

如果 a 与 b 是不同的成员，就写作 $a \neq b$；如果 A 与 B 是不同的集合，就写作 $A \neq B$。例如，设 A 为所有非负实数的集合，B 为所有正实数的集合，则 $A \neq B$，因为数 0 属于 A 而不属于 B。

如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，就说 A 是 B 的**子集**，记作

$$A \subset B.$$

这个定义中并不要求 A 不能等于 B；事实上，如果 $A=B$，那么 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 都成立。当 $A \subset B$ 且 A 不等于 B 时，称 A 为 B 的**真子集**，记作

$$A \subsetneqq B.$$

怎样来描述一个集合呢？如果它只含有为数不多的元素，那么可以把集合中的成员都列出来，写作"A 是由元素 a, b, c 组成的集合"。使用符号就是

$$A=\{a, b, c\},$$

这里的花括号用来把所有的元素包在一起。

当然，描述集合最常用的方法，是给出成员的集合 A 及 A 的元素可能具有也可能不具有的某种性质，我们用 A 中具有这种性质的所有元素来组成集合。例如，可以取实数集，并由所有偶整数组成其子集 B。使用符号将这句话写成

$$B=\{x \mid x \text{ 是偶整数}\}.$$

在这里，花括号表示"…的集合"这个词，竖线表示"使得"这个词，

整个式子读作“B是所有使得 x 为偶整数的 x 的集合。”

集合的并以及“或”的含义

给定两个集合 A, B, 由 A 中所有元素及 B 中所有元素可以组成一个集合,这个集合称为 A 与 B 的**并**,记作 $A\cup B$。正式的定义是

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

现在我们必须停下来,看一看“$x\in A$ 或 $x\in B$”这句话究竟意味着什么。

在通常的英语中,“或”这个词是含糊的。有时“P 或 Q”这句话意味着“P 或 Q, 或者既 P 又 Q”,有时又意味着“P 或 Q, 但不是既 P 又 Q”。通常这要从文章的上下文才能知道究竟指的是哪一种。例如,我对两个学生说:

“Smith 小姐,每一个选修这门课的学生,或者学过线性代数,或者学过分析。”

“Jones 先生,你这门课程的期末考试,或者不低于 70 分,或者不及格。”

从上下文看,Smith 小姐完全知道我说的意思是“每个人要学过线性代数或者学过分析,或者两门课都学过”。Jones 先生也明白我说的是“或者他至少得 70 分,或者不及格,但不是两者都是”。因为,如果两句话都正确的话,Jones 先生一定是很不幸的。

数学中不能容许这种含糊。自始至终只能承认它的一种含义,否则就要引起混乱。因此,数学家们同意在第一种意义下使用“或”这个词,这样,“P 或 Q”这句话总是指“P 或 Q, 或者既 P 又 Q”。如果要指“P 或 Q, 但不是既 P 又 Q”,就必须明确地加上短语“但不是既 P 又 Q”。

按照这种解释,定义 $A\cup B$ 的式子就清楚了;它表明 $A\cup B$ 是由所有属于 A 或属于 B, 或者既属于 A 又属于 B 的元素 x 组成的集合。

集合的交，空集以及“若…则”的含义

给定两个集合 A,B，还可以用另一种方法组成一个集合，就是取A与B的公共部分。这个集合称为A与B的**交**，记作 $A\cap B$。正式的定义是

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}。$$

与 $A\cup B$ 的定义一样，这里也有一个困难．当然与前面的困难并不相同。现在的困难不在于“且”这个词的含义，而是当A与B的公共部分没有元素时，记号 $A\cap B$ 意味着什么？

为了应付这种偶然的情形，需要作一个特殊的约定。我们引进一个称为**空集**的特殊的集合，记成 $\varnothing$，设想成“没有元素的集合”。

使用这种约定，A 与 B没有公共元素这句话就记作

$$A\cap B=\varnothing。$$

这时也说A与B**不相交**。

一些学生对于“空集”的概念感到困惑不解．他们说：“你怎么能够找到一个集合，它什么也没有呢？”这和许多年前第一次引进数 0 时遇到的问题是一样的。

空集仅仅是一个约定，数学中完全不要它也可以。但是这种约定比较方便，能够使定理的叙述及证明更加简洁．例如，不用这个约定，那就必须在使用记号 $A\cap B$ 之前，证明两个集合 A,B 有公共元素．类似地，记号

$$C=\{x|x\in A \text{ 且 } x \text{ 有某性质}\}$$

当A中没有一个元素 x 具有给定的性质时就无法使用。这种时候，如果认为 $A\cap B$ 和C都是空集就要方便多了。

由于空集$\varnothing$只不过是一个约定，所以要对前面引进的概念作出与空集有关的约定。空集既被看成“没有元素的集合”，显然可以约定：对于每一个成员 x，关系式 $x\in\varnothing$ 不成立。类似地，由并及交的定义可知，对于任意集合A有

$$A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing。$$

包含关系要困难得多。给定一个集合 A，可以认为 $\emptyset \subset A$ 吗？我们必须再次注意数学家们对于英语的使用。表达式 $\emptyset \subset A$ 其实是下面这句话“每一个元素属于空集，则必属于集合 A”的缩写，或更正式地“对于每一个成员 x，若 x 属于空集，则 x 必属于集合 A”这句话的缩写。

这种说法对不对呢？有人说“对”，也有人说“不对”。这个问题很难进行论证，只能加以约定。它是“若 P，则 Q”式的断言。在日常英语中，“若…则”结构的含义是模糊的。通常指的是若 P 为真，则 Q 也为真。有时候这就是它所包含的全部内容。有时候它还有另外的含义，即若 P 不真，则 Q 必不真。我们从上下文常常可以区分哪一种理解是对的。

这件事与使用“或”这个词时造成的混乱很相似。我们还是用前面那个关于Smith小姐和Jones先生的例子来说明这里面的含糊。假定我说：

“Smith 小姐，每一个选学这门课的学生，若没有学过线性代数，则必须学过分析。”

“Jones 先生，若你期末考试低于 70 分，你这门课就不及格。”

从上下文看，Smith 小姐知道，如果一个学生要学习这门课程，他没有学过线性代数，则必须学过分析，但是如果学过线性代数，那么他就还可以学过、也可以没学分析了。Jones 先生也明白，如果他考试低于 70 分，他这门课就不及格。如果他至少得了 70 分，那就及格了。

我们再说一遍，数学不允许这种含糊，对它的含义只能作出一种选择。数学家们往往同意对于“若…则”采取第一种解释，所以“若 P，则 Q”式断言的含义是：若 P 为真，则 Q 也真；若 P 不真，Q 可以真，也可以不真。

举一个例子。考虑下面关于实数的一个断言

$$若\ x>0，则\ x^3 \neq 0。$$

这是“若 P，则 Q”式的断言，其中 P 是短语“$x>0$”（称为**断言假设**），Q 是短语“$x^3 \neq 0$”（称为**断言结论**）。它是真断言，因为在任何