梅长林 王 宁 周家良

概率论和数理统计

——学习与提高

西安交通大学出版社

概率论和数理统计

——学习与提高

梅长林　王　宁　周家良

西安交通大学出版社

·西安·

内容提要

本书是为配合高等院校概率论与数理统计课程的教学而编写的教学参考书.书中收集了100多个存在于日常生活中且富有趣味性的实际问题,同时也涉及一些基本概念题与计算问题.可以帮助读者理解概率统计的基本思想,提高分析问题与解决问题的能力.

本书可作为高等院校各专业概率论与数理统计课程的教学参考书,也可供在校的研究生参考使用,对报考硕士研究生的考生也有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

概率论和数理统计学习与提高/梅长林,王宁,周家良编著.—西安:西安交通大学出版社,2001.8
ISBN 7-5605-1421-9

Ⅰ.概…　Ⅱ.①梅…②王…③周…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第036547号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市兴庆南路25号　邮政编码:710049　电话:(029)2668315)
陕西友盛印务有限责任公司印装
各地新华书店经销

*

开本:850 mm×1 168 mm　1/32　印张:8.875　字数:220千字
2001年8月第1版　2001年8月第1次印刷
印数:0 001~5 000　定价:9.80元

前　言

“概率论与数理统计”是高等院校各专业普遍开设的一门重要的基础课.它是学生首次接触的以随机现象为研究对象的课程,开始较难掌握其概念与方法.为了配合本门课程的教学,为学生学习提供进一步辅导,我们编写了这本教学参考书,以期使学生进一步理解概率论与数理统计的基本概念与思想方法,更深入地了解概率统计应用的广泛性,提高学生学习的兴趣与积极性.

本书分为上、下两篇:上篇是概率论内容,下篇是数理统计内容.

在上篇的概率论部分,我们精选了100个典型问题,其中大多数是存在于现实生活之中且富有趣味性的问题,也有在学习概率论过程中容易出错的概念问题与计算问题,以及可用概率论方法解决的各个领域的实际问题,同时适当选入了一些一题多解的问题.有别于一般题解性的教学参考书,本书所选问题一般不涉及教材中的练习题,而是以趣味性的方式提出问题,通过分析,建立适当的概率模型,然后运用所学的知识来解决问题,从而使学生了解用概率论知识解决实际问题的全过程.

在数理统计部分,一方面重点对现行教材中较少涉及,或不可能在课堂上花费大量时间深入展开讨论的概念性问题,作了较为细致的解释分析.如在假设检验中如何确定零假设与备择假设,什么是假设检验犯两类错误的概率以及二者的关系,显著水平对检验结论的影响,假设检验与区间估计的关系等等.这部分内容不是教材中内容的简单重复,而是编者在多年的教学中所发现的学生

不易理解和弄懂，但又在课堂上不易深入展开讨论的概念性问题.另一方面，我们选择了有较强的应用背景且在现实生活中或以后的工作中经常遇到，并有一定趣味性的实际问题.对于这些问题，我们不是简单地利用所学的统计方法套公式地予以解决，而是从所提出的问题.有针对性的进行分析，花较大篇幅对其中的统计思想进行阐述，在解决所提问题的基础上对所用的方法加以总结，给出一般的统计方法并对其应用范围及应注意的事项作进一步阐述.由于这些问题的实用性及趣味性，可使读者在轻松愉快的气氛中掌握统计思想和方法，提高学习兴趣和应用能力.另外，本部分还通过实例分析介绍了Fisher精确检验、抽样调查、列联表的独立性分析以及Logistic模型等选修课的内容，目的在于开阔读者视野，为进一步学习近代统计方法打下一定的基础.

我们以参考文献的形式在书后列出了我们所参考的主要书籍，在此对这些书的作者特表深深的谢意.

另外在本书的编写过程中，得到西安交通大学工科数学基地的资助，我们特表由衷的感谢.

由于编者水平所限，书中难免有不妥或谬误之处，衷心希望广大读者批评指正.

编者

2001.5

目　录

上　篇

下 篇

上篇

概率论

学习与提高

1　古典概型的基本模型(Ⅰ)——摸球模型

A　无放回地摸球

问题 1　设袋中有 4 只白球和 2 只黑球，现从袋中无放回地依次摸出 2 只球，求这 2 只球都是白球的概率.

解　设 $A=\{$摸得 2 只球都是白球$\}$.

方法 1　把 4 只白球(2 只黑球)看成彼此间是可以区分的，分别编号为 1,2,3,4,(5,6). 例如将第一次取到 3 号(白)球和第二次取到 5 号(黑)球这个基本事件与一个 2 - 排列(3,5)相对应，那么基本事件总数等于从 6 个不同元素中取出 2 个元素的无重复元素的排列总数 A_6^2，由排列的乘法定理可知，事件 A 包含的基本事件数为 4×3 即 A_4^2，所以

$$P(A)=\frac{\mathrm{A}_4^2}{\mathrm{A}_6^2}=\frac{4\times3}{6\times5}=\frac{2}{6}$$

注 1　由于取球是有次序的，所以把基本事件对应一个排列，进而求基本事件总数是很自然的.

方法 2　把摸得的 2 只球如 4 号(白)球和 6 号(黑)球看成一个基本事件，它对应了一个 2 - 组合(4,6)，则基本事件总数等于从 6 个不同元素中任取 2 个元素的组合数 C_6^2，事件 A 包含的基本事件数为 C_4^2，所以

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_6^2}=\frac{\mathrm{A}_4^2/2!}{\mathrm{A}_6^2/2!}=\frac{2}{5}$$

注 2　由于是无放回地摸取 2 个球，所以在求古典概型的概率时，如强调次序，可用 2－排列方法计算基本事件数；当可以不强调次序时，可用 2－组合方法计算基本事件数．在本题中摸到 2 只球都是白球，不强调次序，可看成一次取出 2 个(2－组合)都是白球．

注 3　有的同学用组合方法作：一次摸出 2 个的组合观察颜色只能是(白、白)、(黑、白)、(黑、黑)，所以 $P(A)=\frac{1}{3}$．这样做是错误的！因为这 3 个事件发生的概率不相等，所以不能用古典概型求．而方法 2 中的 2－组合基本事件例如(4,6)，(1,2)等事件发生的概率都相等，所以可以用古典概型求 $P(A)$．切记求古典概型的概率时必须注意基本事件的等可能性．

方法 3　设 $B_i=\{$第 i 次摸到白球$\}(i=1,2)$，则

$$P(A)=P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2\mid B_1)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

注 4　方法 3 用事件的"分解"及概率的运算法则求 $P(A)$，这就显得简单得多．

问题 2　设袋中有 10 个相同的球，上面依次编号为 1,2,…,10，每次从袋中任取一球，取后不放回，求第 5 次取到 1 号球的概率．

解　设 $A=\{$第 5 次摸到 1 号球$\}$．

方法 1　把前 5 次依次取到的球的号码这一基本事件对应一个 5－排列，则基本事件总数等于从 10 个不同元素中任取 5 个元素的无重复元素的排列总数 A_{10}^5，而第 5 次取到 1 号球意味着取出的前 4 个球都不是 1 号球，这种 4－排列总数为 A_9^4，而第 5 次取到的必须是 1 号球，这种 1－排列数为 A_1^1．由排列的乘法定理知，由

前 4 个位置不是 1 号的 4 -排列和第 5 个位置必须是 1 号的 1 -排列构成的 5 -排列总数为 $A_9^4A_1^1$，所以

$$P(A)=\frac{A_9^4A_1^1}{A_{10}^5}=\frac{9\times8\times7\times6}{10\times9\times8\times7\times6}=\frac{1}{10}$$

注 1 这里 $A_9^4A_1^1$ 中 $A_1^1=1$ 可以不写，但写上是为了避免犯错误. 总数 A_{10}^5 中反映用 5 -排列，因此，分子也必须用 5 -排列，而 $A_9^4A_1^1$ 中上标之和 $4+1=5$，说明做题分析是考虑到了 5 -排列，不容易用错.

注 2 此题不能直接用组合方法做，因为它强调了次序：规定了第 5 次取到 1 号球.

方法 2 再引入事件 $B=\{$前 4 次没有取到 1 号球$\}$，则

$$P(A)=P(AB)=P(B)P(A|B)=\frac{C_9^4}{C_{10}^4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$$

注 3 方法 2 中 $P(B)$能用组合方法计算，是因为它没有强调次序，只要前 4 次没取到 1 号球即可. 当然也可用排列做，$P(B)=\frac{A_9^4}{A_{10}^4}$.

方法 3 令 $B_i=\{$第 i 次摸到 1 号球$\}(i=1,2,\cdots,5)$，则

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3\bar{B}_4B_5)\\&=P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2|\bar{B}_1)P(\bar{B}_3|\bar{B}_1\bar{B}_2)P(\bar{B}_4|\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3)\times\\&\quad P(B_5|\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3\bar{B}_4)\\&=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

方法 4 由于问题中没说取到第 5 次试验结束，所以所求概率也等于“把试验一直进行到取完为止，求第 5 次取到 1 号球”的

概率.取球 10 次的一个试验结果(基本事件),可对应一个 10 -排列,所以基本事件总数为 A_{10}^{10}.另一方面,前 4 个位置从 2～9 号中任取 4 个元素的 4 -排列数为 A_9^4,第 5 个位置必须为 1 的 1 -排列数为 A_1^1,最后 5 个位置只能从剩下的 5 个数中取 5 个元素的 5 -排列数为 A_5^5,故由排列的乘法定理可得事件 A 所包含的基本事件数,也即第 5 个位置必须为 1 的 10 -排列总数为 $A_9^4A_1^1A_5^5$,因此

$$P(A)=\frac{A_9^4A_1^1A_5^5}{A_{10}^{10}}=\frac{9\times8\times7\times6\times1\times5\times4\times3\times2\times1}{10!}=\frac{1}{10}$$

摸球模型的应用

(1)[检查废品问题]　设 100 只晶体管中有 5 只废品,现从中抽取 15 只,求其中恰有 2 只废品的概率.

分析　把正品看成黑球,废品看成白球,本题相当于从装有 95 只黑球和 5 只白球的袋中,依次无放回地取出 15 只球,求其中恰有 2 只白球的概率.

(2)[抽签问题]　在编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 张赠券中,采用无放回方式抽签,试求在第 k 次($1\leqslant k\leqslant n$)抽到 1 号赠券的概率.

分析　把 1 号赠券看作白球,其它赠券看作黑球,本例相当于从装有 1 个白球和($n-1$)个黑球的袋中,依次无放回地取球,求第 k 次摸到白球的概率.

(3)[分组问题]　把 20 个球队分成两组(每组 10 队)进行比赛,求最强的两队分在不同组的概率.

分析　把强队看作黑球,其它队看作白求,本例相当于袋中有 2 只黑球,18 只白球,采用无放回抽取方式从中取出 10 个球,求恰有 1 个黑球的概率.

(4)[扑克牌花色问题]　求某桥牌选手拿到一副牌(13 张)中恰有黑桃 6 张、方块 3 张、草花 4 张的概率.

分析　把黑桃看作黑球、红桃看作红球、方块看作白球、草花

看作黄球，本例即为袋中有黑、红、白、黄球各 13 个，从中无放回地取出 13 个球中恰有 6 个黑球、3 个白球、4 个黄球的概率.

B 有放回地摸球

问题 3 袋中有 4 个红球，6 个黑球，从中有放回地摸球 3 次，求前两次摸到黑球、第 3 次摸到红球的概率.

解 **方法 1** 用古典概型的方法解. 将 4 个红球和 6 个黑球依次编号为 1～4 和 5～10，则依次有放回地摸球 3 次的每个基本事件可对应一个 3-排列，例如(5,3,5)表示第 1 次、第 3 次摸到 5 号黑球，第 2 次摸到 3 号红球这一基本事件，则基本事件总数为 10^3，而 $A=\{$前 2 次摸到黑球，第 3 次摸到红球$\}$包含的基本事件数为 $6\times6\times4$，故

$$P(A)=\frac{6\times6\times4}{10^3}=0.144$$

方法 2 令 $A_i=\{$第 i 次摸到黑球$\}(i=1,2,3)$

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1A_2\bar{A}_3)=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)\\&=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}=0.144\end{aligned}$$

这里由于是有放回地摸球，所以 $A_i(i=1,2,3)$相互独立.

问题 4 袋中有 4 个红球，6 个黑球，求从中有放回地摸球 200 次中红球出现 30 次的概率.

分析 此题可用上例中的两种方法做，但都显得较繁. 注意这里摸球是有放回的摸球，所以如果把摸一次球看作做一次试验，则摸 200 次球相当于做了 200 次试验，而且这些试验是独立、重复的. 每次试验结果只有 2 个，摸到红球这一结果发生的概率都为 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，所以用伯努利概型解较简便.

解 令 X 为有放回地摸球 200 次中红球出现的次数，则