傅立叶变式

S. 博赫涅尔
K. 坎得拉赛哈兰 著

高等教育出版社

傅立叶变式

S. 博赫涅尔
K. 坎得拉赛哈兰 著
何旭初 譯
叶彥謙 校

高等教育出版社

本书是根据美国普林斯頓(Princeton)大学印刷所出版的博赫涅尔和坎得拉賽哈兰(S. Bochner and K. Chandrasekharan)合著的傅立叶变式(Fourier Transforms)1949年版譯出。

本书討論了在 L_1 及 L_2 空間中的一元与多元函数的傅立叶变式，其內容包括逆轉公式，阿白尔与高斯求和及其在边値問題上的应用，在 $L_2(0,\infty)$ 內的归一变换以及陶伯尔定理等，可供数学工作者及高等学校数学专业高年級学生参考之用。

傅 立 叶 变 式

S. 博赫涅尔　K. 坎得拉賽哈兰著

何 旭 初 譯　叶 彦 謙 校

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业營业許可証出字第054号)

京华印书局印刷　新华书店发行

統一书号13010·695　开本850×1168 1/32　印張6 9/16

字数146,000　印数0001—4,500　定价(6)￥0.75

1959年11月第1版　1959年11月北京第1次印刷

摘譯原序

这是一本討論傅立叶变式以及若干和它們自然地相关联的論題的短文，虽然包含的內容即使不是古典的，也都是熟知的，但与同領域中其他著作却很少重复之处。

著者

1948.11.

目 录

第一章 L_1 內的傅立叶变式(一个变数)

第二章 L_1 內的傅立叶变式(几个变数)

第三章 L_p——空間

第四章 L_2 內的傅立叶变式

第五章 L_2 內的一般变式

第六章 一般的陶伯尔定理

02000

第一章　L_1 内的傅立叶变式(一个变数)

§1. 基本特性

函数 $f(x)$ 的傅立叶变式(*Fourier Transform*),依定义便是泛函数(*Functional*)

$$\phi_f(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)\,dx,$$

α 是一个实数。能被引进傅立叶变式的最簡单的一类函数 $f(x)$ 是:在 $(-\infty,\infty)$ 上的勒貝格(*Lebesgue*)类 L_1。

設 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$,那么 $\phi_f(\alpha)$,或者簡单一些,記为 $\phi(\alpha)$,它对每一个 α 都存在。我們来回忆 $\phi(\alpha)$ 的一些性質。

(1.1)　　$\phi(\alpha)$ 是有界的,因为

$$|\phi(\alpha)|\leqslant \|f\|=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx.$$

(1.2)　　$\phi(\alpha)$ 在 $-\infty<\alpha<\infty$ 内是一致連續的。設 $y>0$,那么我們有:

$$\begin{aligned}|\phi(\alpha+y)-\phi(\alpha)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}(e^{iyx}-1)\,dx\right|\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\cdot|e^{iyx}-1|\,dx\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\cdot 2\left|\sin\frac{xy}{2}\right|dx\end{aligned}$$

$$\leqslant 2\left[\int_{-\infty}^{-R}+\int_{R}^{\infty}\right]|f(x)|dx+yR\int_{-R}^{R}|f(x)|dx,$$

給定了 $\varepsilon>0$, 我們可以选 R 如此之大, 然后再选 y 如此之小, 使最后的式子加起来小于 ε。

(1.3) 設 c_1 和 c_2 都是实数, 并且 T 是变 f 为 ϕ 的运算, 那么

$$\mathrm{T}(c_1f_1+c_2f_2)=c_1\cdot \mathrm{T}f_1+c_2\cdot \mathrm{T}f_2.$$

(1.4) $$\mathrm{T}[f(Rx)]=\frac{1}{R}\phi\left(\frac{\alpha}{R}\right);\quad \mathrm{T}[\overline{f(x)}]=\overline{\phi(-\alpha)},$$

其中($\overline{\quad}$)表示共軛复数。

(1.5) 設函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 L_1 内就范 (*In Norm*) 收斂于 $f(x)$ ($\{f_n(x)\}\to f(x)$), 那么它們的傅立叶变式的序列 $\{\phi_n(\alpha)\}$ 在 $-\infty<\alpha<\infty$ 内一致地收斂于 $\phi(\alpha)$ ($\{\phi_n(\alpha)\}\to\phi(\alpha)$)。

(1.6) 設 $\mathrm{T}f_1=\phi_1$, $\mathrm{T}f_2=\phi_2$, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_1(y)f_2(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_2(y)f_1(y)dy.$$

事实上

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_1(y)f_2(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyx}f_1(x)dx\right)dy$$

而根据福比尼(*Fubini*)定理这便等于

(1.61) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyx}f_1(x)f_2(y)dxdy,$$

因为

(1.62) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(x)|\cdot|f_2(y)|dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(x)|dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|f_2(y)|dy<\infty.$$

然而，重积分(1.61)对 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是对称的，这就証明了我們的論断。

附注：应当注意組合定理 (*Composition Theorem*) (1.6) 和更为重要的对輸定理 (*Convolution Theorem*) 在概念上根本不同，后者具体包含于以后要証明的定理 2 之中。在定理 2 中，函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 自相結合，而它們的变式亦自相結合。然而(1.6)則結合一个函数同一个变式，其所以能够这样，只因为对傅立叶变式的情形，这些函数和它們的变式二者都規定在一个共同的空間上，卽直綫 $-\infty<y<\infty$ 上。

§2. 黎曼-勒貝格引理

定理 1：設 $f(x)\in L_1(-\infty, \infty)$，那么

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\phi(\alpha)=0.$$

这个定理通常称为黎曼-勒貝格引理 (*Riemann-Lebesgue Lemma*)。

証明： 設引进任一个区間

$$I:\ a\leqslant x<b$$

和一个函数

$$W_I(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in I,\\ 0, & 若\ x\in \bar{I},\end{cases}$$

那么，对于 $f(x)=W_I(x)$，我們有

$$\phi_f(\alpha)=\int_a^b e^{i\alpha x}dx=\frac{e^{i\alpha b}-e^{i\alpha a}}{i\alpha},$$

因而有

$$\left|\phi_f(x)\right|\leqslant\frac{2}{|\alpha|}.$$

对于在有限个（有界的）区間上是常数而在其外为零的每一个阶梯函数（*Stepfunction*），由于（1.3），这个結果成立。这些阶梯函数在空間 $L_1(-\infty, \infty)$ 内是稠密的，卽，对应于每一个 $\varepsilon>0$，存在有一个阶梯函数 f_ε 使得

$$\|f-f_\varepsilon\|<\varepsilon.$$

現在，

$$\phi_f(\alpha)=\phi_{f-f_\varepsilon}(\alpha)+\phi_{f_\varepsilon}(\alpha), \qquad (\text{参看}1.3)$$

且

$$\begin{aligned}|\phi_f(\alpha)| &\leqslant |\phi_{f-f_\varepsilon}(\alpha)|+|\phi_{f_\varepsilon}(\alpha)|\\ &\leqslant \varepsilon+|\phi_{f_\varepsilon}(\alpha)|.\end{aligned}$$

于是

$$\varlimsup_{|\alpha|\to\infty}\left|\phi_f(\alpha)\right| \leqslant \varepsilon+\varlimsup_{|\alpha|\to\infty}\left|\phi_{f_\varepsilon}(\alpha)\right|.$$

但是对于一个阶梯函数 f_ε 来說，右端的第二项为零，因此

$$\varlimsup_{|\alpha|\to\infty}\left|\phi_f(\alpha)\right| \leqslant \varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，我們便得結果

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\phi_f(\alpha)=0.$$

§3. 两个函数的对輪函数

設 $f(x), g(x)\in L_1(-\infty, \infty)$，并設 $\phi(\alpha), \psi(\alpha)$ 分別是它們的傅立叶变式。f 和 g 的（結式或）对輪函数（*Convolution*）定义为

$$\begin{aligned}h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy,\end{aligned}$$

其中若对于一个固定的 x，用 $x-y$ 代 y，第二个积分便由第一个积分引出。

現在我們将証明一个結果，它指出：两个函数的对輪函数的傅立叶变式是它們的变式的乘积。

定理 2: **設** $f, g\in L_1(-\infty, \infty)$，**那么定义** $h(x)$ **的积分对几乎所有** (*Almost all*) **的** x **都存在，它属于** $L_1(-\infty, \infty)$ **且**

$$\|h(x)\|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$$

(記号和(1.1)中的相同)。再者，設 $\chi(\alpha)$ **表** $h(x)$ **的傅立叶变式，那么** $\chi(\alpha)=\phi(\alpha)\cdot\psi(\alpha)$。

証明: 首先我們要注意到，若 $f(x)$ 对 x 可测，則 $f(x-y)$ 对 (x, y) 可测。要証明

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

几乎处处存在，我們注意

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-t)|\cdot|g(t)|dx=|g(t)|\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|dy$$

$$=|g(t)|\cdot\|f\|\in L_1(-\infty, \infty),$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-t)|\cdot|g(t)|dx$$

存在，根据福比尼定理可知

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-t)|\cdot|g(t)|dt$$

存在，于是 $h(x)$ 几乎处处存在并且属于 $L_1(-\infty, \infty)$。

其次，

$$\chi(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{i\alpha x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}dx\cdot e^{i\alpha x}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)e^{i\alpha(x-y)}g(y)e^{i\alpha y}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dy\cdot g(y)e^{i\alpha y}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx$$

$$=\varphi(\alpha)\cdot\psi(\alpha).$$

其証明仍系根据福比尼定理，不过用 $f(x-y)e^{i\alpha(x-y)}g(y)e^{i\alpha y}$ 代 $f(x-y)g(y)$ 罢了。

§4. 函数的导数及其变式

我們的目的之一便是去証明：設

$$\phi(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx$$

那末，在某种意义下

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\alpha}\phi(\alpha)d\alpha.$$

但在証明它之前，我們先注意逆轉关系的某些启示性的結果，并且不用逆轉关系而把它們中的一些結果建立起来。我們已經注意到：

(A)：設 $f(x)$ 有傅立叶变式 $\phi(\alpha)$，則 $f(x)e^{ixh}$ 有变式 $\phi(\alpha+h)$，又

(B)：設 $f(x)$ 有傅立叶变式 $\phi(\alpha)$，則 $f(x+h)$ 有变式 $\phi(\alpha)e^{-i\alpha h}$。

現在命題(A)和(B)显示出某些可逆的性質，由此我們推知：

$$\text{(C)}:\quad \mathrm{T}\left[f(x)\cdot\frac{e^{ixh}-1}{h}\right]=\frac{\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)}{h},$$

和

$$\text{(D)}:\quad \mathrm{T}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=\phi(\alpha)\cdot\frac{e^{-i\alpha h}-1}{h}.$$

若在(C)和(D)中試令 $h\to 0$, 我們便在形式上得到

$$\text{(E)}:\quad \mathrm{T}[f(x)\cdot ix]=\phi'(\alpha),$$

$$\text{(F)}:\quad \mathrm{T}[f'(x)]=-i\alpha\phi(\alpha),$$

而現在我們將在严格的基础上去建立(E)和(F)。

定理 3: (i) 設 $f(x)\in L_1$, $ixf(x)\in L_1$, 則 $\phi'(\alpha)$ 存在, 并且 $\phi_{ixf}(\alpha)=\phi'(\alpha)$。

(ii) 設 $f(x)\in L_1$, $f'(x)\in L_1$, 則

$\phi_{f'}(\alpha)=-i\alpha\phi(\alpha)$, 且

$$f(x)=-\int_x^\infty f'(x)dx. \tag{4.1}$$

証明: (i) 我們有

$$\frac{\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)}{h}=T\left[f(x)\cdot\frac{e^{ixh}-1}{h}\right]$$
$$=T[f_h(x)],\ (\text{設})。$$

現在, 在 L_1 内 $f_h(x)$ 就范收斂于 $ixf(x)$, 因为在每一点 x, $f_h(x)\to ixf(x)$ 并且

$$|f_h(x)|\leqslant|f(x)|\left|\frac{e^{ixh}-1}{h}\right|\leqslant|x|\cdot|f(x)|\in L_1.$$

利用性质(1.5), 当 $h\to 0$ 时我們得

$$\mathrm{T}[f_h(x)]\to\mathrm{T}[ixf(x)]\quad(\text{一致地})。$$

因此, 在每一点 α, 存在有在普通意义下的导数 $\phi'(\alpha)$, 且

$$\phi_{ixf}(\alpha)=\phi'(\alpha).$$

(ii) 我們的假設的精确意义为: 存在一个我們用 $f'(x)$ 来表示

的函数 $g(x)\in L_1$ 和它的一个不定积分

$$f(x)=\int^{x} g(y)dy$$

使得

$$f(x)\in L_1(-\infty,\infty).$$

現在,

$$f(A)-f(a)=\int_{a}^{A} g(x)dx.$$

若固定 a, 幷令 $A\to\infty$, 由于 $g(x)\in L_1$, 我們有

$$\int_{a}^{A} g(x)dx\to c.$$

所以, $f(A)\to l$; 同样 $f(-A)\to -m$ (設)。因为 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$, 我們必有 $l=-m=0$, 这首先便証明了(4.1)。

現在, 設 $T[f'(x)]=\psi(\alpha)$, 那么

$$\psi(\alpha)=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} e^{i\alpha x}df(x)$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left[\left\{e^{i\alpha x}f(x)\right\}_{-A}^{A}-i\alpha\int_{-A}^{A} e^{i\alpha x}f(x)dx\right]$$

但是, 由于 $l=-m=0$, 末式右端第一項的极限等于零, 于是

$$\psi(\alpha)=-i\alpha\phi_f(\alpha).$$

从而得証。

附注: 还有一个更强的定理: 設 $f(x)\in L_1$, 且 $f^{(r)}(x)\in L_1$, 那么 $f^{(1)}(x),\cdots,f^{(r-1)}(x)\in L_1$。我們把这个定理放到后面的課文里。

§5. 逆轉公式

我們希望給出些簡单的条件, 在这些条件下使得在所給点 x,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\phi(\alpha)d\alpha,$$

这里系假定 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$。

令

(5.1)
$$S_R(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}e^{-i\alpha x}\phi(\alpha)d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Rt}{t}\cdot f(x+t)dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin Rt}{t}\cdot\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}dt.$$

令

(5.2)
$$g_x(t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x).$$

于是

(5.3)
$$S_R(x)-f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin Rt}{t}g_x(t)dt.$$

定理 4: 設

$$\int_{0}^{\delta}\left|\frac{g_x(t)}{t}\right|dt<\infty,$$

那么

$$\lim_{R\to\infty}S_R(x)=f(x).$$

証明: 設 $\delta>0$ 是固定的。則

$$S_R(x)-f(x)=\frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\delta}+\int_{\delta}^{\infty}\right]\frac{g_x(t)}{t}\sin Rt\,dt=I_1+I_2\ (\text{設}).$$

現在，据黎曼——勒貝格引理知 $I_2=0(1)$。并且，由于$\frac{g_x(t)}{t}$在$(0,\delta)$内为絕对可积，从而可知当 $\delta\to 0$ 时，$I_1=\varepsilon(\delta)\to 0$。

附注：定理4 証明：若 $f(x)\in L_1$，則在某一点 $S_R(x)$ 趋于 $f(x)$ 的收斂性只和 $f(x)$ 在这点的邻域内的特性有关。这便是黎曼的局部性定理（*Localization Theorem*）。

注意，若函数 $f(x)$ 在所論点有左右导数，且 $f(x)$ 在該点被規化（*Normalized*）成

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],$$

这个定理的条件便滿足了。

§6. 傅立叶变式的唯一性

定理 5: 設 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$且对每一个 α，都有 $\phi(\alpha)=0$，則几乎处处有 $f(x)=0$。

証明： 設 $g_{a,\varepsilon}(x)$ 为定义如下的函数：

$$g_{a,\varepsilon}(x)=\begin{cases}1, & -a\leqslant x\leqslant a;\\ 0, & x>a+\varepsilon,\ x<-a-\varepsilon;\\ \dfrac{a-x+\varepsilon}{\varepsilon}, & a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon;\\ \dfrac{x+a+\varepsilon}{\varepsilon}, & -a-\varepsilon\leqslant x\leqslant -a.\end{cases}$$

令

$$\mathrm{T}[g_{a,\varepsilon}(x)]=\psi_{a,\varepsilon}(\alpha),$$

于是

$$\psi_{a,\varepsilon}(\alpha)=2\int_0^\infty g_{a,\varepsilon}(x)\cos x\alpha dx$$

$$=-\frac{2}{\alpha}\int_0^{\infty} g'_{a,\varepsilon}(x)\sin x\alpha dx$$

$$=\frac{2}{\alpha\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon}\sin x\alpha dx.$$

因此,

$$当\ |\alpha|\to\infty时,\ \psi_{a,\varepsilon}(\alpha)=0\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

因为 $\psi_{a,\varepsilon}(\alpha)$ 是(連續的和)有界的,所以我們有

$$(6.1)\qquad \psi_{a,\varepsilon}(\alpha)\in L_1(-\infty,\infty).$$

并且,在 $-\infty<x<\infty$ 内的每一点,$g_{a,\varepsilon}(x)$ 都滿足定理 4 中的条件。因此,根据那一个定理我們有

$$(6.2)\qquad g_{a,\varepsilon}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\alpha}\psi_{a,\varepsilon}(\alpha)d\alpha.$$

再者,借助于(6.1)知(6.2)右端的积分为絕对收斂。最后,

$$(6.3)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}f(y)g_{a,\varepsilon}(x-y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\alpha)\psi_{a,\varepsilon}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha.$$

这可以(由(1.6)中的組合規則或者直接地)若用(6.2)中的积分去代替 $g_{a,\varepsilon}$ 并且交換积分次序(这是由于(6.2)的絕对收斂性)来証明。

因为 $\phi(\alpha)=0$,我們有:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g_{a,\varepsilon}(x-y)dy=0,$$

或

$$对每一个\ a,\ \int_{x-a}^{x+a}f(y)dy=0,$$

或

$$\text{对所有的 } \alpha \text{ 和 } \beta, \int_{\alpha}^{\beta} f(y)\,dy = 0.$$

因此,对几乎所有的 x, 都有 $f(x)=0$; 卽 $f(x)$ 为 $L_1(-\infty,\infty)$ 类中的零函数(*Null-Functun*), 或者說它是巴拿赫(*Banach*)空間 $L_1(-\infty,\infty)$ 中的零元素(*Null-element*)还更为恰当些。

附注: 我們很容易把这个定理推广到多变数的情形, 这在下一章中就要看到。

然而, 对于一个变数, 有一个更加深入的定理, 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 內的(絕对)可积性是完全省去了,仅仅預先假定对每一个 α, 歌西(*Cauchy*)极限

$$\phi(\alpha) = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{i\alpha x} f(x)\,dx$$

存在。这种形式的定理, 似乎从来还沒有被推广到多于一个变数的情形,而在这一方面的任何不平凡的結果都是极其盼望的。

§7. 求和定理(Summability Theorem)

設 $f(x)\in L_1$, $K(\alpha)\in L_1$。我們知道若 $T[f(x)]=\phi(\alpha)$, 則 $T[f(x+t)]=\phi(\alpha)e^{-it\alpha}$。令 $T[K(\alpha)]=H(t)$, 那么 $T\left[K\left(\dfrac{\alpha}{R}\right)\right]=$ $=RH(Rt)$。假定:

(7.1)　　$K(\alpha)\in L_1(-\infty,\infty)$.

(7.2)　　$K(0)=1$, $K(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 連續,

(7.3)　　$K\left(\dfrac{\alpha}{R}\right)$在原点能够被逆轉(*Inverted*); 卽

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} RH(Rt)\,dt.$$