大　　学

奥林匹克数学竞赛试题解答集

B. A. 萨多夫尼奇　A. C. 波德科尔津编
王英新 李世华 译　古　青 校

湖南科学技术出版社

大学奥林匹克数学竞赛试题解答集

〔苏〕B. A. 萨多夫尼奇　A. C. 波德科尔津编

王英新　李世华译　古　青校

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1981年4月第1版　1982年4月第2次印刷

开本：787×1092毫米 1/32　印张：8.125　字数：186,000

印数：21,201——31,500

统一书号：13204·28　定价：0.85元

前　　言

近年来，大学奥林匹克数学竞赛，作为活跃大学生科学创造的方式之一，得到广泛开展。由于这种竞赛的命题，具有灵活性的特点，因此它要求学生不仅要牢固掌握教学大纲上所规定的必要知识，而且在方法上要有所发现，有所创造。一般说来，试题多以简易的形式阐明某个深奥数学思想。

同时，虽说在数学竞赛方面已经拥有各种丰富的资料，但至今还没有一本较为全面而又通俗的奥林匹克数学竞赛试题集问世。

因此，我们向读者提供的这本试题集，在一定程度上能够填补上述空白。本书是以下列试题为其编写基础的。计有：各类国立高等院校的大学奥林匹克数学竞赛试题(初赛)，莫斯科市大学奥林匹克数学竞赛试题(复赛)，《大学和科学技术进步》全苏奥林匹克数学竞赛试题，国际大学奥林匹克数学竞赛的某些试题,以及莫斯科大学数学力学系的数学竞赛试题与口试题。

我们认为：本试题集对于广大读者，首先是各类高等院校的大学生、研究生、教员、高年级中学生、中学教师以及所有数学爱好者，都有所裨益。

我们将正文中所遇到的一些符号、定义、证明、公式汇编成附录:《本书所用数学基本知识和符号》和《本书采用的符号》。这些资料，将有助于理解试题条件及其解法，而且能以此作为掌握专门数学教程中的相应数学内容的出发点。

在第一章里，《高等学校大学生奥林匹克数学竞赛(初赛)》是由莫斯科高等学校奥林匹克数学竞赛试题整理成的。该章，凡单号试题都附有完全解答或详尽提示；凡双号试题都未列解，建议读者独立解算。

在第二章里，《全苏大学生奥林匹克数学竞赛试题(复赛)》，是由全苏奥林匹克数学竞赛试题整理而成的。在这种竞赛中，根据数学大纲将各参加大学分组，并按学生年级高低，分开比赛。所有这些情况，在正文的各题号之后的圆括号内注明。第二章的全部试题均附有解答。

最后，我们将许多有兴趣的而又不冗繁的大学竞赛题、国际奥林匹克数学竞赛题、口试题，等等整理成第三章：《大学竞赛试题及其他试题》。这里，同样给单号试题以解答。

第一、三两章的试题，我们按下述选题原则加以归类，即在每类题目的范围之内，力图本着由浅入深的原则大致地编排的。

我们对举行高等学校奥林匹克数学竞赛的所有团体，筹备、举办一系列市与全苏奥林匹克数学竞赛的莫斯科大学数学力学系全体成员，奥林匹克数学竞赛的各位参加者，表示深切地感谢。

此外，莫斯科大学教授Ю.А.卡基明，副教授A.B.米哈廖夫和Ю.B.涅斯捷连科曾对许多试题的条件和解法进行过有益的讨论，多次奥林匹克数学竞赛的参加者和优胜者——莫斯科大学数学力学系学生C.康亚金曾参与过讨论本试题集的编写计划。对此，尤为表示感谢。

B.A.萨多夫尼奇

A.C.波德科尔津

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　高等学校大学生奥林匹克数学竞赛试题(初赛)

数 学 分 析

图　　形

1．(莫斯科轻工业工艺学院，1977年)作函数$y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$的图形.

2．(莫斯科航空学院，1976年)绘制函数

$f(x)=e^{\log_{\sqrt{e}}(\sin x+\cos x)}$　的图形.

3．(莫斯科自动机械学院，1977年)试作函数

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{1/|x|} & \text{当}x\neq 0\\ 1 & \text{当}x=0\end{cases}\quad\text{的图形}$$

4．(莫斯科国民经济学院，1977年) 作函数

$y=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2-e^{\alpha x}}$　的图形.

5．(莫斯科经济统计学院，1975年) 作函数

$y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(x^2/2)^n}$　的图形.

6．(莫斯科测量、空测及制图学院，1977年) 作函数

$$y=\frac{x^2}{|x|+e^{1/x}}\quad\text{的图形}$$

7．(莫斯科机床及工具学院，1977年) 作函数$y=\cos(2\arccos x)$ 的图形.

8．(莫斯科铁道运输工程学院，1977年) 作函数

$y=\mathrm{tg}(3\,\mathrm{arc\ tg}\,x)$ 的图形.

9.（莫斯科自动机械学院，1975年）作函数

$$y=\lim_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arc\,tg}x^n$$

的图形。

10.（莫斯科机床及工具学院，1977年）证明：函数 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$，当$x>0$时为增函数，并作其当$x>0$时的图形。

11.（莫斯科国民经济学院，1976年）作函数$y=x^x(x>0)$的图形。

12.（莫斯科民航工程学院，1976年）作函数

$f(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}dt$的图形。

13.（莫斯科经济统计学院，1977年）作给定方程

$$x^3+y^3-3xy=0$$

的曲线图。

多　项　式

14.（莫斯科工艺学院，1976年）证明：多项式$p(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$没有重根。

15.（莫斯科自动机械学院，1975年）试求一个次数最低的多项式，使之当$x=1$时有最大值6，而当$x=3$时有最小值2。

16.（莫斯科水利土壤改良学院，1977年）为使三项式x^3+px+q对其自变量x的三个不等实数值变成零，问系数p，q应满足何种条件？

17.（莫斯科国民经济学院，1975年）证明：任何具有正系数的非零多项式，若为偶函数，则处处向上凹且仅有一个极值点。

18.（莫斯科国民经济学院，1975年）证明：$n\geqslant3$的任何奇次多项式，至少有一个拐点。

19.（莫斯科机床及工具学院，1976年）证明：任何具有整系数的多项式$p(x)$，它不可能满足等式：$p(7)=5, p(15)=9$。

20.（莫斯科公路工程学院，1976年）已给一整系数多项式$p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，且$p(0)$与$p(1)$是奇数。证明：$p(x)$无整根。

21.（莫斯科国立师范学院，1976年）设$p(x)$是一整系数多项式，它在5个整点上的值均为5。证明：$p(x)$没有整根。

22.（莫斯科电力工程学院，1975年）若一整系数的多项式，其全部系数没有公质因数，则称此多项式为本原多项式。证明：本原多项式的乘积，仍为本原多项式。

23.（莫斯科大学数学力学系，1976年）系数属于域P的多项式$p(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$称为线性可约的．若它可以表为

$$p(z)=(b_0z+b_1)(c_0z^{n-1}+\cdots)\qquad(b_0\neq0),$$

式中c_i，$b_i\in P$。今随机抽取Z_2上的一个n次多项式$p(z)$，求$p(z)$在Z_2上线性可约的概率q_n，并计算$\lim\limits_{n\to\infty}q_n$。

24.（莫斯科钢与合金学院，1977年）设对每个多项式p有适于下列关系的对应的数$D(p)$：

(1) $D(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2)=\alpha_1D(p_1)+\alpha_2D(p_2)$；

(2) $D(p_1p_2)=D(p_1)p_2(1/2)+p_1(1/2)D(p_2)$，式中$\alpha_1$，$\alpha_2$是任意实数。

(*a*) 证明：$D(p)=cp'(1/2)$　　（c是常数）

(*b*) 以区间$[0, 1]$上任意连续函数f在上述D的定义中替换多项式p。试证：对所有这样的f，都有$D(f)=0$。

25. 设$p(x)$是n次多项式且$p(a)\geqslant0$，$p'(a)\geqslant0$，…，

$p^{(n-1)}(a)\geqslant 0$，$p^{(n)}(a)>0$，证明：方程 $p(x)=0$ 的实根不超过a。

26．（莫斯科钢与合金学院，1975年）证明：方程 $x^n=p(x)$ 有唯一正根．其中，$p(x)$是含正系数的$(n-1)$次多项式．

27．（莫斯科石油化工和天然气工业学院，1976年）证明：若实系数多项式$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$的全部根都是实数，则它的各阶导数$p'(x)$，$p''(x),\cdots$，$p^{(n-1)}(x)$也只有实根$(a_0\neq 0)$．

28．设多项式$p(x)$只有实根，证明：若a为$p'(x)$的重根，则$p(a)=0$．

29．（莫斯科动力机械制造学院，1975年）已给$c_0+\dfrac{c_1}{2}+\cdots+\dfrac{c_n}{n+1}=0$．证明：多项式 $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ 至少有一实根．

30．（莫斯科国民经济学院，1975年）证明：对于任意一组实数a_0，a_1，…，a_n和任一点$x=x_0$，存在这样的n次多项式，使得 $p^{(s)}(x_0)=a_s(s=0，1，\cdots，n)$． 这个多项式的系数用数$a_s$表示．

31．（莫斯科大学数学力学系，1977年）设 $p_1(x)$，…，$p_r(x)$分别为$n_1,\cdots,n_r$次多项式．证明：若$n_1+\cdots+n_r<\dfrac{r(r-1)}{2}$，则多项式$p_1$，…，$p_r$线性相关．

32．（莫斯科钢与合金学院，1977年）设$p_1(x)$，…，$p_n(x)$是不大于$(n-1)$次的多项式．证明此多项式的伏朗斯基行列式是一常量．

33．（莫斯科经济统计学院，1976年）证明：若多项式$p(z)=a_0z^n+\cdots+a_n$的所有根都在上半平面，则其一阶导数的

所有根也都在上半平面。

34．（莫斯科无线电工程、电子学和自动化技术学院，1976年）设$p(z)$是多项式．试证：多项式$p'(z)$的根位于以多项式$p(z)$的根为顶点的凸多边形内部。

35．（莫斯科物理技术学院，1977年）试证：多项式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}$$ 能被x^{n+1}所整除。

36．（莫斯科经济统计学院，1977年）证明：若当$x\to\infty$时，函数$\varphi(x)\to\infty$，而其导数$\varphi'(x)\to 0$，则$\varphi(x)$不可能表成两个多项式的比的形式。

37．（莫斯科大学数学力学系，1977年）设$p(x)=c_nx^n+\cdots+c_0$是实系数多项式，其中，$c_p=0$ $(1\leqslant p\leqslant n-1)$ 且当$i\neq p$时$c_i\neq 0$。试证：若$p(x)$有n个不等实根，则$c_{p-1}\cdot c_{p+1}<0$。

38．证明：若次数不高于n的多项式的序列在区间(a,b)内一致收敛，则它们的极限多项式的次数不高于n。

39．（莫斯科大学数学力学系，1975年）设$f(x)$是任意复系数多项式．试证：存在这样的常数c，使得对任何整系数多项式$p(x)$，多项式$f(p(x))$的不相等整根的个数不大于$\deg p+c$。这里$\deg p$是多项式$p(x)$的次数。

序列和极限

40．（莫斯科高等技术学校，1977年）若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1975}}{n^x-(n-1)^x}=\dfrac{1}{1976}$，求$x$值。

41．（莫斯科电信技术学院，1977年）已给$s_1=\sqrt{2}$，$s_{n+1}=\sqrt{2+s_n}$．试证：序列$\{s_n\}$有极限，并求之。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

42.（莫斯科财经学院，1976年）计算下列极限：

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$；

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$。

43.（莫斯科国民经济学院，1975年）证明：序列$2, 2+\frac{1}{2}$，$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$，…有极限，并求之。

44.（莫斯科国民经济学院，1977年）证明：序列$a_1=0$，$a_n=\frac{a_{n-1}+3}{4}$有极限，并求之。

45.（莫斯科航空工艺学院，1977年）试考察线段AB。点列$\{M_n\}$由下述方式构成：$M_1=A$，$M_2=B$，而每个M_{n+1}点是连接点M_{n-1}和M_n的线段的中点。问点列$\{M_n\}$趋于线段AB上的哪一点？

46.（莫斯科国民经济学院，1976年）在双曲线$xy=1$上取横坐标分别为$\frac{n}{n+1}$与$\frac{n+1}{n}$的点A_n与B_n($n=1, 2, 3, \cdots$)，且以M_n表示上述点A_n，B_n与双曲线顶点的圆的圆心.试求当$n\to\infty$时$\{M_n\}$的极限。

47.（莫斯科公路工程学院，1976年）求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$$

48.（莫斯科物理技术学院，1977年）求序列

$$x_n=\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{2}{\sqrt{k}}$$

的极限。

49．（人民友谊大学，1976年）设n是自然数，问$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$存在极限吗？

50．（莫斯科轻工业工艺学院，1977年）求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

51．（莫斯科钢与合金学院，1976年）计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

52．（莫斯科国民经济学院，1976年）函数$f(x)$在区间[0，1]上连续且恒正。试证：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\exp\left(\int_0^1\ln f(x)dx\right).$$

53．（莫斯科航空学院，1977年）已给序列：$x_0=a$，$x_1=1+bx_0,\cdots,x_{n+1}=1+bx_n$，…，当$a$、$b$为何实数值时它才收敛？

54．（莫斯科省师范学院，1976年）证明：集合$M=\left\{\frac{1}{2}\pm\frac{n}{2n+1}\right\}(n\in N)$的极限点只有0和1。

55．（莫斯科大学数学力学系，1975年）序列$\{x_n\}$（$n=1$，2，…）依下述方式构成：$x_1=x$是区间[0，1]上的某点；若$n\geqslant 2$，则当n为偶数时$x_n=\frac{1}{2}x_{n-1}$；当n为奇数时$x_n=\frac{1+x_{n-1}}{2}$。问此序列可能有多少个极限点？

56．点$x=0$是否为序列$x_n=\sqrt{n}\sin n$的极限点？

57．（莫斯科电力工程学院，1975年）计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\right).$$

58. 序列$\{x_n\}$是：当$n\geqslant 1$时，$x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$。证明极限$\lim_{n\to\infty}x_n$存在，并求之。

59. (莫斯科动力学院，1975年)一数列由递推公式：$u_1=b$，$u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2(n\geqslant 1)$ 所 确定。当a与b为何值时 数列$\{u_n\}$收敛？它的极限等于什么？

60. (莫斯科工程经济学院，1975年) 序列 $\{x_n\}$ 为关系式 $x_0=1/3$，$x_n=0.5x_{n-1}^2-1$所给定。试求$\lim_{n\to\infty}x_n$。

61. (莫斯科高等技术学校，1975年)证明序列

$$x_0>0,\ x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}\qquad (a\geqslant 0)$$

的极限存在，并求之。

62. (莫斯科钢与合金学院，1977年) 设

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(2x_k+\frac{a}{x_k^2}\right)(a>0,\ x_0>0).$$

(a) 证明：序列$\{x_k\}$有极限，并求出它。

(b) 用z_k表示x_k与其极限间的差，又设$z_1\neq 0$。证：对所有的$k\geqslant 1$下列不等式成立：

$$z_k>0,\ z_{k+1}<\frac{2}{3}z_k,\ z_{k+1}<\frac{1}{\sqrt[3]{a}}z_k.$$

63. (莫斯科动力学院，1977年)设$a_1=1, a_k=k(a_{k-1}+1)$。计算$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)$。

64. 求无穷乘积：

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdots\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}\cdots\text{之值。}$$

65. (莫斯科航空学院，1976年)设序列$\{x_n\}$的$x_0=25$，$x_n=\operatorname{arc\,tg}x_{n-1}$。试证此序列有极限，并求之。

66。(莫斯科航空工艺学院，1976年)设x_1，x_2，…是将方程$\operatorname{tg}x=x$的全部正根按由小到大的次序编号而成的。试问$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})$等于什么？

67. (莫斯科钢与合金学院，1975年) 求序列 $y_1=x$，$y_{n+1}=a\sin y_n(n\geqslant1)$ 的极限。其中$|a|\leqslant\pi/2$而x是实数。

68. (莫斯科物理技术学院,1975年)证明方程$x=\cos x$有唯一的根x_0，并证按$x_1=20$，$x_n=\cos x_{n-1}$ ($n\geqslant2$) 定义的序列$\{x_n\}$收敛于x_0。

69. 试求$\lim\limits_{n\to\infty}[n\sin(2\pi en!)]$之值。

70. (莫斯科公路工程学院,1976年)求$\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}(\pi m!x)\right)$。

71. (莫斯科物理技术学院，1977年)序列$\{x_n\}$由递推公式求出：$x_n=\sin x_{n+1}(n=2, 3, \cdots)$，$x_1$是区间$(0, \pi)$内的任意数。求证：在$n\to\infty$时，$x_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{n}}$。

72. (莫斯科公路工程学院，1976年) 设$a>b>0$。定义如下：序列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$：

$$a_1=\frac{a+b}{2},\quad b_1=\sqrt{ab},\quad a_2=\frac{a_1+b_1}{2},$$

$$b_2=\sqrt{a_1b_1},\quad\cdots,\quad a_{n-1}=\frac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\cdots$$

试证：这两个序列的极限存在且等同。

73. (莫斯科物理技术学院，1976年) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$。证：序列

$$z_n=\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}$$

收敛于ab。

74. 在三维空间里，已给点列$\{A_k\}$，$\{B_k\}$，$\{C_k\}$，$\{D_k\}$，$\{E_k\}$，并且这些点A_{k+1}，B_{k+1}，C_{k+1}，D_{k+1}，E_{k+1}分别是线段A_kB_k，B_kC_k，C_kD_k，D_kE_k，E_kA_k的中点。证明：这五个点列全都收敛于某点O。

75. （莫斯科电力机械制造学院，1976年）在三角形的三条边上写上三个数$a_1^{(1)}$，$a_2^{(1)}$，$a_3^{(1)}$。然后擦掉这些数，将每边换成刚才另外两边的算术平均值（即换$a_1^{(1)}$为$a_1^{(2)}=\dfrac{a_2^{(1)}+a_3^{(1)}}{2}$，换$a_2^{(1)}$为$a_2^{(2)}=\dfrac{a_1^{(1)}+a_3^{(1)}}{2}$，换$a_3^{(1)}$为$a_3^{(2)}=\dfrac{a_1^{(1)}+a_2^{(1)}}{2}$。）据所得各数再作类似计算，如此下去。证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_i^{(n)}$存在$(i=1,2,3)$且等于$\dfrac{a_1^{(1)}+a_2^{(1)}+a_3^{(1)}}{3}$。

76. （莫斯科国立师范学院，1975年）设P是素数；a与b是整数，$a^2+ab-b^2\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)$，$v_0=a$，$v_1=b$，$v_{n+1}=v_{n-1}+v_n$ $(n\geqslant 1)$。证明：序列$\{v_n(\mathrm{mod}\,p)\}$是纯周期的，且其周期与数a、b无关。

77. （莫斯科大学数学力学系，1977年）设a_1，a_2，…是不小于2的互不相等的自然数序列。证：从中可选出序列a_{i_1}，a_{i_2}，…满足关系$a_{i_k}>i_k$。

78. （莫斯科电力机械制造学院，1975年）已给正数数列$\{a_n\}$。证：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\dfrac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geqslant e$。

79. 已给一组正数序列$\{a_{jk}\}$ $(j,k=1,2,\cdots)$，且对任何j有$\lim\limits_{k\to\infty}a_{jk}=+\infty$。证：存在如下序列$\{b_k\}$ $(k=1,2,\cdots)$，满足：

$$\lim_{k\to\infty} b_k = +\infty, \ \lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{a_{jk}} = 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots)$$

80.（莫斯科机床与工具学院，1976年）已知序列$\{b_n\}$收敛，设$C_n = n(b_n - b_{n-1})$。问序列$\{C_n\}$能否趋于∞？

81.（人民友谊大学，1977年）计算极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3+6k^2+11k^2+5}{(k+3)!}.$$

82. 设数$S > -1$是定数。求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^s+2^s+\cdots+n^s}{n^{s+1}}.$$

83.（莫斯科铁道运输工程学院，1977年）设$[x]$为不超过x的最大整数，而$\{x\}=x-[x]$。求$\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}$。

84.（莫斯科大学数学力学系，1977年）设$\{f_n\}$为一实数列，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}f_n - f_{n-1}f_{n+2}}{f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}} = \alpha+\beta;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1}}{f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}} = \alpha\beta. \qquad (|\alpha| < |\beta|)$$

证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}} = \alpha.$$

85.（莫斯科工程经济学院，1975年）设序列$\{x_n\}$对所有的m与n皆满足条件：$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_n + x_m$。证明：序列$\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$收敛。

86.（莫斯科大学数学力学系，1976年）已给定义在整个数轴上的实值、可微、周期为1的函数$f(x)$，且设在任何点x上估值$|f'(x)| < 1$正确。兹考察下列直线映射P：$x \to x + f(x)$。试证：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com