矩阵初步

上海教育出版社

矩阵初步

张　弛

上海教育出版社

矩 阵 初 步

张　　弛

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷六厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 5　字数 109,000

1979年7月第1版　1979年7月第1次印刷

印数 1—100,000 本

统一书号：7150·2050　　定价：0.40 元

目　录

1. 矩阵、初等变换

1.1 线性方程组的消去解法，初等变换

矩阵是数学中一个重要的概念，它是线性代数的主要研究对象之一，并且是解决许多工程问题的有力工具．下面，我们先结合大家比较熟悉的线性方程组（即多元一次方程组），介绍一下什么是矩阵．

［例 1］ 对于线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2+\ \ x_3=1, \\ 2x_1 \qquad\ \ +3x_3=-2, \\ -4x_1+2x_2-6x_3=6, \end{cases} \tag{1}$$

我们知道，它的未知数是用 x_1, x_2, x_3 来代表，还是用 x, y, z 或其他什么记号来代表，是无关紧要的．这里起决定作用的，是未知数的系数和方程的常数项（“＝”右端的项）．若是把系数和常数项分离出来，并按原来的行列次序写出，就得到

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

象这样的一张表就叫做一个**矩阵**．矩阵中横的叫行，竖的叫列，这个矩阵有 3 行 4 列，所以也叫做一个 3×4 矩阵，这个矩阵由 $3\times4=12$ 个数组成，组成矩阵的这些数，叫做这个**矩阵的元素**．

我们用字母 A 来记这个矩阵．矩阵 A 就可以反映出方程组(1)的本质特征，比如，在解方程组(1)的过程中，我们可

以把第二个方程的 2 倍加到第三个方程上以消去未知数，得到

$$2x_2=2,$$

用它代替原方程组(1)中的第三个方程，则组(1)化为如下的等价(同解)方程组:

$$\begin{cases}3x_1+5x_2+\ x_3=1,\\ 2x_1\qquad\quad +3x_3=-2,\\ \qquad 2x_2\qquad\quad =2.\end{cases}\tag{1'}$$

而另一方面，把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第二行每一元素的 2 倍加到第三行的相应元素上，得到的矩阵

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}3&5&1&1\\2&0&3&-2\\0&2&0&2\end{pmatrix}$$

正是由方程组(1′)的系数和常数项所得到的矩阵.

再如，将新方程组(1′)的第三个方程两边乘以 $\frac{1}{2}$，相当于将矩阵 A_1 的第三行的每一元素分别乘以 $\frac{1}{2}$，得到

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}3&5&1&1\\2&0&3&-2\\0&1&0&1\end{pmatrix},$$

与矩阵 A_2 相应的方程组是

$$\begin{cases}3x_1+5x_2+\ x_3=1,\\ 2x_1\qquad\quad +3x_3=-2,\\ \qquad x_2\qquad\quad =1,\end{cases}\tag{1''}$$

这个方程组是与组(1′)从而也与原方程组 (1) 等价(同解)的.

我们知道，在用消去法解线性方程组的过程中，常用下面两种变换以使方程组逐步化简: (i) 用适当的数 λ 去乘某个

方程的两边，然后把它加到另一个方程上；(ii)用一个不等于零的数 λ 去乘某个方程的两边. 我们已经看到，这分别相当于对矩阵的行施行如下的变换：

(i) 消法变换：将矩阵某行各个元素的 k 倍，加到另一行的相应元素上；

(ii) 倍法变换：以不等于零的数 k 乘矩阵的某一行.（即用 k 去乘矩阵某一行的每个元素.）

现在，我们对矩阵 A_2 继续施行一些消法变换和倍法变换，以完成对方程组(1)的求解过程：

$$A_2=\begin{pmatrix}3&5&1&1\\2&0&3&-2\\0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{加到第一行上}]{\text{第二行的 }-5\text{ 倍}}\begin{pmatrix}3&0&1&-4\\2&0&3&-2\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{加到第一行上}]{\text{第二行的 }-1\text{ 倍}}\begin{pmatrix}1&0&-2&-2\\2&0&3&-2\\0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{加到第二行上}]{\text{第一行的 }-2\text{ 倍}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-2&-2\\0&0&7&2\\0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{以 }\frac{1}{7}\text{ 乘第二行}}\begin{pmatrix}1&0&-2&-2\\0&0&1&\frac{2}{7}\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{加到第一行上}]{\text{第二行的 }+2\text{ 倍}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{-10}{7}\\0&0&1&\frac{2}{7}\\0&1&0&1\end{pmatrix},$$

或者，为了形式上整齐清楚起见，把最后所得矩阵的第二、三行的位置对调(这相当于把两个方程的位置对调)，即对矩阵的行施行

(iii) 位置变换：把矩阵的某两行的位置对调.

这样，矩阵最后化成如下形状：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{pmatrix},$$

相应的方程组是

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad = -\frac{10}{7}, \\ \quad x_2 \quad = 1, \\ \qquad x_3 = \frac{2}{7}. \end{cases}$$

这实际上已解出了方程组(1).

矩阵的上述三种变换即位置变换、倍法变换和消法变换，统称为*矩阵的初等变换*. 从上可知，用消去法解线性方程组的过程，可以用对相应的矩阵的行施行初等变换来实现. 下面我们再举两个例子.

1.2 例

为书写简便起见，我们约定，以 $\mathrm{I}_{p,q}$ 表示将第 p 行与第 q 行的位置互换的位置变换；以 II_p^λ 表示以不等于零的数 λ 去乘第 p 行的倍法变换；以 $\mathrm{III}_{q+p}^\lambda$ 表示以第 q 行的 λ 倍加到第 p 行上的消法变换.

[例 2] 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 \qquad\quad + 5x_4 = 7. \end{cases}$$

解
$$\begin{pmatrix}1&-1&2&3&3\\1&-1&1&2&3\\1&-1&3&4&3\\1&-1&0&5&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{III}_{1+2}^{-1},\ \mathrm{III}_{1+3}^{-1},\ \mathrm{III}_{1+4}^{-1}}$$
$$\begin{pmatrix}1&-1&2&3&3\\0&0&-1&-1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&-2&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{III}_{3+2}^{1},\ \mathrm{III}_{3+4}^{2},\ \mathrm{III}_{3+1}^{-2}}$$
$$\begin{pmatrix}1&-1&0&1&3\\0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&4&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{III}_{4+1}^{-\frac14},\ \mathrm{III}_{4+3}^{-\frac14},\ \mathrm{II}_4^{\frac14}}$$
$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&2\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix},$$
即经过初等变换后，得到原方程组的同解方程组是
$$\begin{cases}x_1-x_2\qquad\quad=2,\\ \qquad\qquad x_3\quad=-1,\\ \qquad\qquad\quad x_4=1.\end{cases}$$
由此可知，$x_3=-1$，$x_4=1$. 而 x_1，x_2 可以是满足 $x_1-x_2=2$ 的任何数. 如设 $x_2=k$（k 为任意数），则 $x_1=k+2$，于是，方程组的解是 $x_1=k+2$，$x_2=k$，$x_3=-1$，$x_4=1$.

［例 3］ 解线性方程组
$$\begin{cases}2x_1+\ x_2+\ x_3=-1,\\ \ x_1-2x_2+2x_3=3,\\ 3x_1-\ x_2+3x_3=1.\end{cases}$$

解 $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{III}_{2+1}^{-2},\ \mathrm{III}_{2+3}^{-3}}\begin{pmatrix}0 & 5 & -3 & -7\\ 1 & -2 & 2 & 3\\ 0 & 5 & -3 & -8\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}_{1+3}^{-1}}\begin{pmatrix}0 & 5 & -3 & -7\\ 1 & -2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

最后一个矩阵说明，所得同解方程组中有一个方程是

$$0x_1+0x_2+0x_3=-1,$$

显然任何 x_1、x_2、x_3 都不会满足这个方程，因而原方程组无解。

从上面的例子里，我们不仅看到了矩阵与线性代数方程组之间的内在联系，而且看到在这个问题中引入矩阵概念带来了不少方便．随着学习的逐步深入，我们将进一步看到矩阵的重要性和有力作用，比如，我们会看到：使用矩阵概念，可以很好地回答，一个线性方程组在什么时候无解，什么时候有解，有唯一解还是有许多解．

矩阵不仅可以用来表示线性方程组，也可以表示别的一些内容．这里我们只举几个简单的例子．

［例 4］ 在解析几何中，平面直角坐标系的旋转公式是

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.\end{cases}\tag{2}$$

其中 θ 为 x 轴与 x' 轴的夹角．于是，新旧坐标之间的关系，完全可以由下面的一个 2×2 矩阵表示出来：

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

这时，上述矩阵就表示了平面上的一个坐标变换（坐标轴的旋转）．

[例 5] 含三个变量 x, y, z 的一个二次齐次函数（又称二次型）

$$F=ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fzx,$$

可以改写成

$$F=ax^2+\frac{d}{2}xy+\frac{f}{2}xz+\frac{d}{2}yx+by^2+\frac{e}{2}yz+\frac{f}{2}zx+\frac{e}{2}zy+cz^2.$$

于是，这个二次型由下面的 3×3 矩阵所确定

$$\begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{f}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{f}{2} & \frac{e}{2} & c \end{pmatrix}.$$

这时，上述矩阵表示的是一个二次型.

[例 6] 某种物资由 m 个产地运往 n 个销地. 设已经定下由第 i 个产地 $(i=1, 2, \cdots, m)$ 运往第 j 个销地 $(j=1, 2, \cdots, n)$ 的数量是 a_{ij}，那么这样一个调运方案就可用下面的 $m\times n$ 矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1.3 矩阵

恩格斯指出：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。这些材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实。但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它

们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；……”①.

为了研究矩阵的一般的规律性的东西，我们暂时撇开矩阵所表示的具体内容，抽象地把 $m\times n$ 矩阵理解为如下的一张表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

其中 $a_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 叫作这个矩阵的**元素**．它们可以是数，也可以是某种别的东西，但我们主要讨论以数为元素的矩阵．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示这个元素位置在矩阵的第 i 行，第二个下标 j 表示它位于第 j 列，$(i,\ j)$ 完全确定了 a_{ij} 在矩阵 A 中的位置．以后我们往往用大写的拉丁字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, …等代表矩阵．如上面的 $m\times n$ 矩阵可以用 $\boldsymbol{A}$ 来表示．有时也用 $(a_{ij})_{m\times n}$ 来表示上面这个矩阵 $\boldsymbol{A}$，它说明 $\boldsymbol{A}$ 是一个第 i 行第 j 列的元素为 $a_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ m 行 n 列矩阵．又如写 $\boldsymbol{B}=(b_{pq})_{s\times t}$ 就表示如下的一个 $s\times t$ 矩阵：

$$\boldsymbol{B}=(b_{pq})_{s\times t}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1t} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{st} \end{pmatrix}.$$

特别地，矩阵 $\boldsymbol{G}_{m\times 1}$ 有 m 行但只有一列，矩阵 $\boldsymbol{H}_{1\times n}$ 则只有一行但有 n 列，例如

---

① 《反杜林论》，人民出版社 1970 年版，第 35 页。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (3,\ 5,\ 0,\ -1,\ -1)$$

分别是 3×1 矩阵和 1×5 矩阵．而单独一个元素构成一个 1×1 矩阵．

一个 $n\times n$ 矩阵（即行数和列数相等的矩阵）叫做 n 阶矩阵或 n 阶方阵．如例 4、例 5 中的两个矩阵分别是 2 阶矩阵和 3 阶矩阵．由单独一个元素所构成的矩阵就是 1 阶矩阵．

习　题　一

讨论下列各线性方程组的解的情况．

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 4x_2 - 17x_3 = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 + x_3 - x_4 = -1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = -1. \end{cases}$

2. 矩阵的运算

我们来介绍有关矩阵的基本运算，以下如无特别说明，矩阵的元素都是数．

所谓两个矩阵相等，是指这二矩阵的行数相同，列数也相同，而且对应的元素都一一相等．也就是说，若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，则当且只当 $a_{ij}=b_{ij}$（对所有 $i=1,$

2, …, m; $j=1, 2, \cdots, n$) 成立时，我们说这两个矩阵相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

2.1 加法运算，减法运算

定义 1 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵：

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

则矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

求和的运算叫做矩阵的加法. 从定义知道，两个矩阵只有当它们的行数相同，列数也相同时，才可以相加；两个矩阵相加归结为其对应元素相加.

矩阵的加法满足以下规律：

(1) 结合律：

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C},$$

(2) 交换律：

$$A+B=B+A,$$

读者可自行验证.

我们将元素全为0的矩阵叫做零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$. 显然,对任何矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 均有

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}+\boldsymbol{O}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}.$$

此外,取矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(-a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn}\end{pmatrix},$$

我们称 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵,显然有 $\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{O}$; 若记 $\overline{\boldsymbol{A}}=-\boldsymbol{A}$, 就有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

我们可以把 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$ 记为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, 即定义

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

而称上述运算为减法.

2.2 数与矩阵的乘法

定义2 以数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的每一个元素所得的矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 叫做数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘的积，记作 $k\cdot\boldsymbol{A}$ 或 $k\boldsymbol{A}$.

例如: $$k=2,\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

则

$$k\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 10 & 4\\ 6 & 0 & -2\end{pmatrix};$$

又例如: $$l=-2,\quad \boldsymbol{B}=\left(1,\ 2,\ 0,\ \frac{1}{2}\right),$$

则

$$l\boldsymbol{B}=-2\boldsymbol{B}=(-2,\ -4,\ 0,\ -1).$$

数与矩阵的乘法满足以下规律:

(1) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(2) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

(3) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;

(4) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$; $(-1)\cdot\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$.

其中 k, l 是数, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是矩阵.

2.3 矩阵的乘法

在引入矩阵和矩阵相乘——矩阵的乘法之前，我们先来看一个例子.

设变量 x_1, x_2, x_3, x_4 与变量 y_1, y_2, y_3 之间有如下关系:

$$\begin{cases} x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3, \\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3, \\ x_3=a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3, \\ x_4=a_{41}y_1+a_{42}y_2+a_{43}y_3. \end{cases} \tag{1}$$

变量 y_1, y_2, y_3 与变量 z_1, z_2 之间有如下关系:

$$\begin{cases} y_1=b_{11}z_1+b_{12}z_2, \\ y_2=b_{21}z_1+b_{22}z_2, \\ y_3=b_{31}z_1+b_{32}z_2. \end{cases} \tag{2}$$

为求变量 x_1, x_2, x_3, x_4 与变量 z_1, z_2 之间的关系，我们将(2)代入(1), 得

$$\begin{cases} x_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})z_1 \\ \qquad +(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})z_2, \\ x_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})z_1 \\ \qquad +(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})z_2, \\ x_3=(a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31})z_1 \\ \qquad +(a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32})z_2, \\ x_4=(a_{41}b_{11}+a_{42}b_{21}+a_{43}b_{31})z_1 \\ \qquad +(a_{41}b_{12}+a_{42}b_{22}+a_{43}b_{32})z_2. \end{cases} \tag{3}$$

或把(3)式写成

$$\begin{cases} x_1=c_{11}z_1+c_{12}z_2, \\ x_2=c_{21}z_1+c_{22}z_2, \\ x_3=c_{31}z_1+c_{32}z_2, \\ x_4=c_{41}z_1+c_{42}z_2. \end{cases} \tag{3'}$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}, \quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ j=1,\ 2. \tag{4}$$

(1) 式确定一个 4×3 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times3}$, (2) 式确定一个 3×2 矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{3\times2}$, (3) 式或 (3′) 式确定一个 4×2 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{4\times2}$. 由(4)式可以看到, 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素 c_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和.

定义 3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{s\times n}$, 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}①,$$

则 $\boldsymbol{C}$ 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积, 记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 或简写成 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

由此定义可知, 只有当第一个矩阵的列数与第二个矩阵的行数相同时,这二个矩阵才可以相乘.

[例 1] 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}_{2\times3}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}_{3\times2},$$

则

① $\sum$ 是求和的记号. $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 表示对 $i=1, 2, \cdots, n$ 求 a_i 的和, 即 $a_1+a_2+\cdots+a_n$.