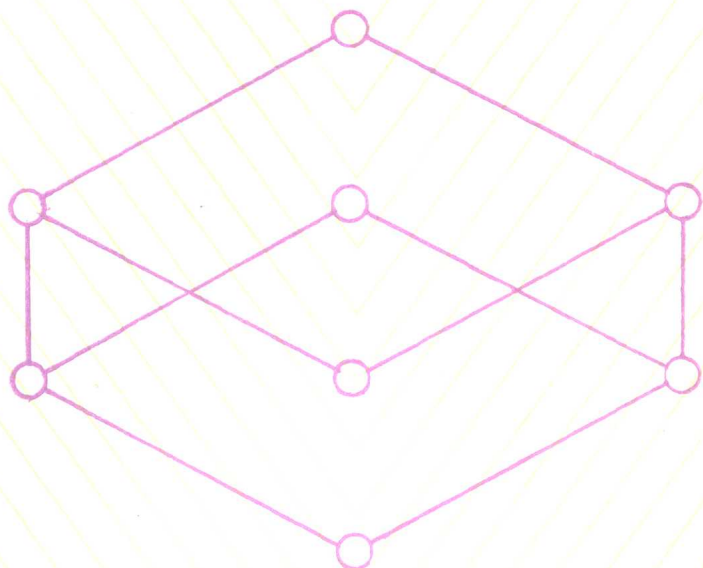
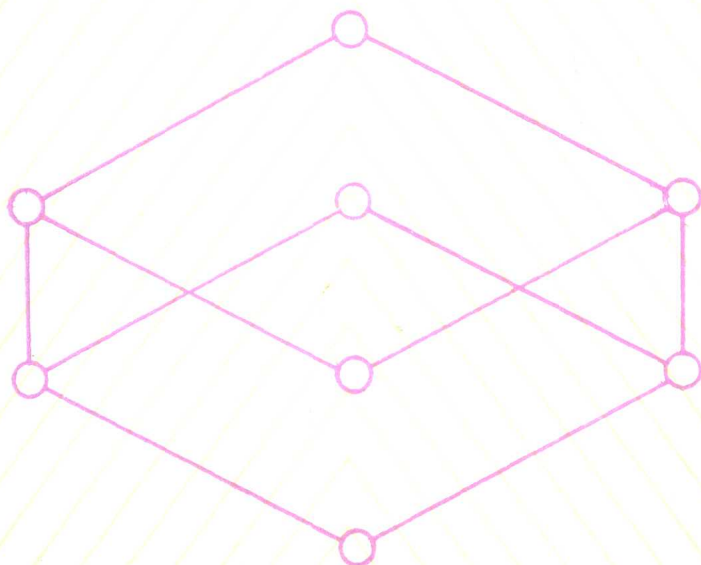


信息与逻辑丛书



离散数学引论

张锦文 沈瑞民 编著



天津科学技术出版社

信息与逻辑丛书

离散数学引论

张锦文 沈瑞民 编著

天津科学技术出版社

本丛书编委会名单

主编：张锦文

编委：陈景润、王树林、王 联、王建方、张宏裕、邵品瑞、
赵沁平、徐书润、廖艾迪

信息与逻辑丛书

离散数学引论

张锦文 沈瑞民 编著

责任编辑：黄立民

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷四厂印刷

新华书店天津发行所发行

开本 850×1168毫米 1/32 印张 11.875 字数 299,000

一九八六年六月第一版

一九八六年六月第一次印刷

印数：1—6,400

书号：17212·15 定价：2.40元

编 者 的 话

在现实世界与人类社会中，信息的传输、存取与加工的重要性和价值是无法估价的。由于科学技术的进步、工农业生产的发展、军事活动、气象与交通运输、商品交流、文化生活等领域都在不断地提供大量的信息，这就要求迅速而准确地对信息进行传输、存取与加工。信息是通过各种形式表达的，有自然语言（汉语的、英语的等等）形式，数字形式，符号形式和物质形式。信息的内容是多种多样的，有些可以公开传输，有些又必须加以保密，秘密传输。当今世界，无线电秘密传输信息是困难的，它必须设法使预定传输的有规则的、含有重要信息的信息加以扰乱，使接受了这些信息的敌方无法识别它所表达的内容，而又必须使接受到它的我方把扰乱的信息迅速地恢复它的原始含意。有些信息无长期保存的价值，而有些不仅要长期存贮，而且还要能够随时提取。有些信息必须进行大量的加工，提取有用的部分。无线电通讯中的编码、加保护码、译码与破码也是一例。合理地使用信息，有时比合理地使用物质更为重要。在这个意义下，我们可以说，现在是信息的时代，具体地说是信息量巨增、信息的意义与价值巨增、信息的研究与利用巨增的时代。人们不仅借助于物质器件传输、存取与加工信息，而且还要借助于数字、符号与语言的工具才能迅速、准确地处理信息。不仅需要设计与制做传输、存取与加工信息的硬件，而且还必须设计与制做相应的软件。现阶段，在一定意义下，设计与制做软件是更为重要的，因此，人们称八十年代为软件的时代。

数字与语言都可以用符号、符号串和它们的集合所表达，处理信息也就是处理符号串和相应的集合（即符号语言或形式语

官)。信息来源是广泛的、系统的,并且常常是相互关联的。这样,形式语言、形式系统也是丰富多采的。

数据库、知识库、专家咨询系统、专家系统、自动程序设计、自动证明数学定理、机器人和各种智能工程等领域的研究和应用已成为当前科学技术的重要课题。这一系列课题中不仅需要已有的逻辑知识,而且在不断地发展新逻辑工具。应用逻辑方法是上述各个课题的共性。众所周知,数学方法是一切自然科学、技术科学和工程技术的重要工具之一,然而在信息系统与智能工程中,逻辑方法不仅比一般的数学方法应用更广泛,而且它是更为基本的方法。一个加法运算必须分解为一系列基本的逻辑步骤,每一次加法运算本身都是通过一条很长的逻辑链条而完成的。所以,数学运算都是通过逻辑运算的链条而完成的。正如由微小的力量可以聚集成巨大的力量一样,由微小的逻辑步骤也可以以各种结构形式聚集成巨大的逻辑步骤,实现巨大的智能活动,高速的电子元件为这种琐碎的、冗长的步骤提供了可能。把数学运算和其它的逻辑过程(判断、推演)组成有机的部分,再把各个部分组成各种系统,由若干小系统组成大系统。大系统的组成以及工作的过程和环节,都存在着逻辑的联系、逻辑转换和逻辑过程。这不仅运用了来自人类的思维过程,特别是数学的思维过程中发展起来的数理逻辑理论与方法(它起源于莱布尼兹,经过布尔、施莱德、德·摩根、弗雷格、罗素、希尔伯特和哥德尔形成独立学科,近五十年来它又有了新的重大的发展,解决了一批引人注目的数学难题,还使一批数学难题获得重大进展,产生了一批令人发省的数学结果),而且又为数理逻辑提供了新概念、新方法和实际背景,使纯逻辑的某些研究有了新的生命力。在这个意义下,我们可以说,计算机、信息系统和智能工程促进了数理逻辑的研究与发展,可能为数理逻辑的研究与发展开辟新的前景。

本丛书的宗旨是阐述信息系统、计算机、智能工程与数理逻辑

辑的联系，借以促进它们的发展。一方面从信息系统、计算机和智能工程的角度阐述数理逻辑的若干重大的逻辑成果（某些纯数学的成果如连续统假设、群论、字的判定问题等除外）和基本方法，借以促进前者的发展，也阐述一些逻辑问题，希望寻求计算机解决它们的方法，或者证明不存在计算机解决的方法。另一方面是阐述信息系统、计算机和智能工程等领域的进展，特别是逻辑方法，借以促进它们的发展与推广，并进而为数理逻辑研究提供新的资料和问题。任何一门学科，当它能够不断地提出大量的研究问题，它就充满着生命力，而问题的缺乏则预示着独立发展的衰竭与中止。我们的领域是不断提出问题，充满生命力和蓬勃发展的研究领域。

我们希望通过本丛书的十数卷本能够阐明我们的研究领域的各项专题及它们的联系，使本丛书能成为这一领域的广大科学技术工作者、教师和学生较系统的由浅入深的读物，从而对读者有所裨益。

本丛书的撰写和出版过程中，我们得到学术界许多部门和许多朋友的多方支持，得到许多学者、专家与权威的大力支持和指教，得到天津科技出版社的热情有力支持。借此机会表示由衷的感谢。

《信息与逻辑》丛书编委

1983年10月

目 录

前言	(1)
第一章 基本概念	(4)
§1 引言	(4)
§2 命题	(8)
§3 命题连接词	(12)
§4 集合	(14)
§5 量词	(21)
§6 字母表与字	(22)
§7 次序	(24)
§8 计算程序	(26)
§9 算法	(28)
§10 逻辑运算与布尔矩阵	(30)
习题一	(33)
第二章 关系与函数	(36)
§1 关系	(36)
§2 关系的图形表示和矩阵表示	(38)
§3 关系的运算	(41)
§4 关系的性质	(45)
§5 关系的闭包运算	(50)
§6 等价关系	(54)
§7 序关系	(59)
§8 函数	(67)
§9 两个集合之间的一一对应	(73)
习题二	(74)

第三章 信息图 (78)

§1 基本概念与术语	(78)
§2 路与连通性	(80)
§3 无向图、加权图、多重图及同构	(82)
§4 图的一些基本性质	(86)
§5 图的矩阵表示	(88)
§6 欧拉通路及哈密尔顿通路	(98)
§7 根树	(108)
§8 根树的应用	(113)
§9 无向树	(118)
§10 生成树与割集	(119)
习题三	(122)

第四章 代数系统与布尔代数 (126)

§1 基本概念	(126)
§2 群	(134)
§3 环与域	(138)
§4 格	(140)
§5 布尔代数	(143)
§6 二值布尔代数	(148)
§7 逻辑结构	(151)
习题四	(153)

第五章 命题演算 (156)

§1 原始符号及形成规则	(156)
§2 形式公理与形式推演规则	(160)
§3 形式证明与形式定理	(161)
§4 形式推演	(163)
§5 演绎定理	(170)
§6 归谬律及反证法	(174)

§7 斜式证明法	(175)
§8 一些重要的形式定理	(178)
§9 等值词	(188)
§10 范式	(189)
习题五	(194)
第六章 谓词演算	(196)
§1 原始符号与形成规则	(196)
§2 形式公理与形式推演规则	(201)
§3 形式证明与形式定理	(203)
§4 形式推演	(205)
§5 演绎定理	(207)
§6 辅助导出规则	(213)
§7 一些重要的形式定理	(214)
§8 前束范式	(224)
习题六	(227)
第七章 一阶逻辑的语义与模型	(228)
§1 真值概念	(228)
§2 一致性与完全性	(231)
§3 判定问题	(234)
§4 真值表方法	(235)
§5 检查范式法	(237)
§6 分支法	(239)
§7 归结法	(246)
§8 论域与模型	(249)
§9 归结法(续)	(252)
§10 一阶逻辑的基本定理	(254)
习题七	(256)

第八章 形式语言与形式文法	(257)
§1 形式命题语言	(257)
§2 形式文法	(258)
§3 文法的类型	(263)
§4 1 型文法的递归性	(266)
§5 2 型文法的派生树	(269)
§6 3 型文法的状态图	(271)
习题八	(274)
第九章 有穷自动机	(275)
§1 基本概念	(275)
§2 状态图	(278)
§3 状态输出机	(282)
§4 有穷自动机的简化	(287)
§5 有穷识别器与正规语言	(295)
§6 有穷识别器的模型	(302)
习题九	(303)
第十章 图灵机器	(305)
§1 引言	(305)
§2 指令形式的图灵机	(307)
§3 图灵机的四元有序组形式	(315)
§4 两种图灵机的等价性	(321)
§5 可计算函数	(324)
§6 图灵识别器	(343)
习题十	(345)
第十一章 初等形式系统与递归关系	(346)
§1 初等形式系统举例	(346)
§2 初等形式系统的定义	(348)

§3 可表达性	(350)
§4 形式命题集合的形式可表达性	(354)
§5 命题演算中定理集合的形式可表达性	(354)
§6 正整数的递归可枚举集合	(356)
§7 哥德尔数	(357)
§8 形式可表达的集合在存在可定义下的封闭性	(358)
§9 存在可定义的几个实例	(360)
§10 某些基本关系的递归可枚举性	(362)
§11 递归函数	(363)
§12 车赤论题与图灵论题	(365)
习题十一	(367)
参考文献	(368)

前 言

离散与连续是现实世界中物质运动的对立统一的两个方面，离散数学与连续数学是描述、刻划和表达现实世界物质运动的两种有力的工具，也是数学发展中相互促进的两个重要方面。因此，在数学的研究中不可能也没有必要把两者截然分开。从数学角度来说，连续的结果与离散的结果是可以相互通达的。这里，着重于阐述离散数学的基本原则只是为了方便初学者和关心离散数学应用的读者。

数字计算机的发展与应用，促进了信息数字化、符号化与离散化，这样，离散数学自然成了计算机、信息系统、智能工程等方面重要的理论基础之一。在国内外，离散数学已成为有关专业的必修课程。但是，就我们所见，目前在国内外流行的课本都有一个共同的特点，这就是把形式上很不同的几个部分拼在了一起，其中有集合论、布尔代数、数理逻辑初步、可计算函数、图论、抽象代数等。这几部分之间是否存在着统一的内在联系呢？或者说，是否可形成一个整体呢？这是许多师生所关心的问题。因为一门课程如果总是保持在“拼盘”的状态下，对于教师和学生来讲，都是一件不愉快的事。我们对此曾有感触，是因为我们曾在中国科学院计算技术研究所软件专修班讲授过两次这一课程，也曾为所内部分从事工程技术和软件工作的青年同志讲授过这一课程，这促使我们改变这种“拼盘”式的状态。

从信息的数字化、符号化与离散化的目的来看，主要是为了便于进行传输、存取、加工，这就必须从不同的角度把握它们的逻辑结构与过程。用这样的观点来分析现行离散数学课本中所列几个部分的内容，或者说去分析这一“拼盘”的几个部分，我们

认为它们不仅有着内在的联系，而且就是一个整体的不同的表现方式和不同的发展阶段。具体地说，我们必须研究各种集合（数字集合、符号集合、符号串集合等等），这些集合是我们传输、存取、加工的对象，我们还需要用新的集合去描述、刻划和表达初始集合之间的联系，这就是关系的概念，关系是描述、刻划和表达事物之间、集合之间的联系的特殊集合，人们最感兴趣的是关系间的逻辑联系，这是内容丰富的关系逻辑。函数是特殊的关系，并且在研究逻辑联系中又起着重要的作用。信息图是有穷关系的一种直觉的表现方式，我们借助信息图去显现各种图形以及它们相应的关系的逻辑特征。代数系统是第二章中简单的关系结构 $\langle S, R \rangle$ 的推广，它首先把关系 R 限制为 S 上的函数 f ，进而再推广到 S 上两个（或更多个）函数 f, g 所形成的结构 $\langle s, f, g \rangle$ ，并考查这些函数 f, g 在 S 上的运算性质和联系，这就形成各种代数系统。布尔代数是初等逻辑的一部分，它是用数学方法研究古典逻辑所产生的结果。在第四章§7中我们建立了结构的观念，说明了逻辑结构的特征和研究目的。这样，一至四章可以作为本书的第一部分，它构成了信息的数字化、符号化和离散化的一个直观的逻辑结构。第五章与第六章是对这一逻辑结构进行形式化处理。众所周知，计算机乃至一切能完成一定智能的机器（乃至现在的与未来的机器人）都是通过了解形式语言、形式系统来完成自己的使命的。因此，为了我们的目的，必须把直觉的逻辑结构给予形式化，建立逻辑演算系统（命题演算与谓词演算），并借以阐述计算机语言中常用的一个重要方法——元语言方法。第七章通过解释与赋值的概念，建立了逻辑结构与逻辑演算之间的桥梁，弄清凡是通常的直观逻辑结构中的概念、性质与问题都可以在逻辑演算中加以描述、刻划和表达，并且给出了若干验证定理集合的方法。这样，第五至七章可以作为本书的第二部分，称为一阶逻辑的语法与语义理论。第八至十一章，我们讨论了形式文法、形式语言、有穷自动机、图灵机器和初等形式系

统理论，并借以引进了递归可枚举集合、递归集合、递归函数的概念，这构成了算法论的初等内容。这一部分从第五章讨论的形式系统入手，进而把一些元逻辑的内容给予形式化，给出形式文法的概念，由形式文法引入算法，由算法进入初等形式系统，这是对第一、二部分的逻辑问题、逻辑结构、逻辑过程给予深化，借此寻求现实问题（计算机、信息系统、智能工程）的逻辑描述、刻划和表达，并且寻求信息的传输、存取与加工过程中的逻辑结构、逻辑过程。

还应指出，虽然逻辑结构与逻辑演算之间存在着桥梁，后者能够描述、刻划和表达前者，但是从推演和证明角度来看，后者虽然严格了，但也贫乏了，即在前者之中存在着许多问题，这些问题从证明与推演的角度来看后者是无法解决的，这是形式系统的局限性，当然也是一切机器系统的局限性。本书作为引论就不作深入讨论，我们将在本丛书其它各卷中阐述这些问题。

形式系统与算法之间也有着密切的联系，它们在一定意义下是可以相互转化的，但是它们之间也有着本质的区别，即使是算法概念之间，也尚有许多差别，对这类问题的研究与揭示不仅对现实的信息系统、计算机领域、智能工程有着重要的意义，而且对连续数学的发展也将产生影响。

本书力求深入浅出、文字通俗易懂，它既可作为高等学校有关专业离散数学课程的教材，也可供科学技术人员、教师和具有高中毕业以上文化程度的读者自学。

限于作者水平，错误之处在所难免，欢迎指正。

作 者

1983年9月

第一章 基本概念

§1 引言

在智能工程、系统工程、计算机科学、管理科学、技术经济学、数量经济学和技术语言学等新兴科学领域的研究中，常常涉及到许多以离散量作为研究对象的问题，也常涉及到许多逻辑过程和逻辑问题。这些过程和问题与离散数学研究领域内的许多理论和方法密切相关。本节从一些简单的例子引伸出基本概念。

【例1·1】 一旅馆内某房间有四个人，现在知道他们中一人在写信，一人在看书，一人在修指甲，而另一人在算账，并且也知道

- (1) 张三不在修指甲，也不在看书；
- (2) 李四不在写信，也不在修指甲；
- (3) 王五不在看书，也不在修指甲；
- (4) 大刘不在看书，也不在写信；
- (5) 如果张三不在写信，那么大刘不在修指甲。

问，他们每人都在做什么呢？

回答上述问题是不困难的，并且它的步骤可以是机械的。人们可以向计算机提出这类问题，由计算机作出回答。

首先，画一个 4×4 的表格（图1·1），左边分别写张三、李四、王五和大刘，而在表头上写写信、看书、修指甲和算账。

第二步，根据已知条件（1），张三不在修指甲，就在第1行修指甲下边打个“×”，张三也不在看书，在同一行看书下边也打上“×”；同理根据已知条件（2）、（3）、（4）分别在相应格中打上“×”。

第三步，我们把他们四人中一人在写信，一人在看书，一人在修指甲，一人在算账称做此题的基本条件，并且可看到张三、李四、王五都不在修指甲。由基本条件，他们中有一人在修指甲，这只能是大刘了。同理可得到李四在看书的结论。这样，在图1.1的基础上，我们把断定的大刘在修指甲，李四在看书用符号“√”表示出来，这就得到图1.2。并且由于每人只在作一件事情，因此李四就不在算账，大刘也不在算账了。我们在图1.2的相应格子上打上“×”，这就完成了图1.2。

	写信	看书	修指甲	算账
张三		×	×	
李四	×		×	
王五		×	×	
大刘	×	×		

图 1.1 由条件(1)~(4)直接获得的结果

	写信	看书	修指甲	算账
张三		×	×	
李四	×	√	×	×
王五		×	×	
大刘	×	×	√	×

图 1.2 由条件(1)~(4)和基本前提推得的结果

第四步，用已知条件(5)，如果张三不在写信(此时他只能是在算账了)，那么大刘不在修指甲。前边已经推得大刘在修指甲，这样，张三就不能不在写信，亦即张三在写信，因而，张三就不在算账了。因此，算账的就只能是王五了，王五也就不在写信了。这就是图1.3中的结果。

	写信	看书	修指甲	算账
张三	√	×	×	×
李四	×	√	×	×
王五	×	×	×	√
大刘	×	×	√	×

图 1.3 由基本条件和条件(1)~(5)推得的结果

【例1.2】关于抓堆游戏的必胜策略问题。这类游戏是可以交给计算机进行的，而且计算机可以掌握许多抓法并存储大量信息，问题是人们要把这种过程描述清楚，分析清楚，用计算机能够理解的语言教给计算机。为了把问题陈述清楚，举一个具体的例子，如图1.4所示，三堆小圆球，(a)堆有3个圆球，(b)

堆有 5 个，(c) 堆有 6 个。游戏者甲、乙二人轮流抓取这些球，每次每人从任一堆中（而且只能在一堆中，虽然每一轮中他可以随意改变他要抓取的堆）抓走任意数量的圆球。他可以从他抓的那堆中抓走现有的全部圆球，也可以留下一些，但每次他必须至少抓走一个。谁最后抓完谁就为胜者，另一人为败者。由于有穷多个圆球最终必抓尽，所以总有一胜一败，不可能有和局出现。

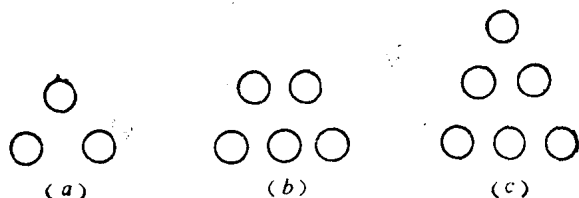


图 1.4 三堆小圆球

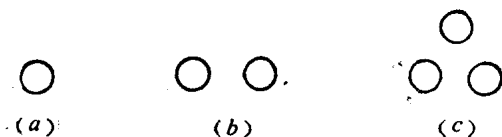


图 1.5 六球的1-2-3的三堆

下面通过 6 个圆球分成 3 堆（如图 1.5）的情形，讨论抓堆的取胜策略问题。有趣的是，在这一特殊情况下，先抓者甲不可能有必胜的策略，并且当后抓者乙没有失误时，甲是不能取胜的。换言之，后抓者乙有一必胜策略，也就是说，乙有一些抓法，使用这些抓法，不管甲每一次怎样抓，乙都能最后一个抓完，从而取胜。比如，先抓者甲在 (c) 堆中抓走 1 个圆球，这时 (a) 堆中已没有圆球了，就成了图 1.6 的情形。后抓者乙又从 (c) 堆中抓走 1 个，这样，(c) 堆中就剩下 2 个了，这就成了图 1.7 的情形了。下一步，如果甲再从 (c) 堆中抓走 1 个，(c) 堆中就只剩下 1 个了（其它堆与图 1.7 相同，这就形成了图 1.8 的情形）。后抓者乙应从 (b) 堆中也抓走 1 个，此时 (b) 堆中仅剩 1 个