误差理论

周江文 著

测绘出版社

误差理论

周江文 著

测绘出版社

内 容 提 要

误差理论近三十年来和数理统计结合，理论上有较大进展；研究范围也由独立观测平差和误差估计向关联平差、误差分析和随机变量的推估等方面扩展。本书重点在探讨这些扩展方面。

本书是论文集，共收集作者近二十年来陆续写作的论文十四篇。

本书可供测量、数理统计、数据处理等专业科技人员及有关院校师生参考。

误 差 理 论

周江文 著

*

测 绘 出 版 社 出 版

89920 部队印刷厂

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

*

开本787 × 1092 1/32. 印张 4 ½. 字数99千字

1979年11月第一版. 1984年 9 月第三次印刷

印数 18501 — 25000 册. 定价1.10元

统一书号：15039. 新128

序

这是一部论文集，写作时间1958—1978，其中绝大部分以不同形式非正式发表过，这次作了小修改。

误差理论近三十年来和数理统计结合，理论上有较大进展，研究范围也由独立观测平差和误差估计向关联平差、误差分析和随机变量的推估等方面扩展，本书重点正是在这些扩展方面。

附录(14)是为了读者参考的便利而写的，建议对有关问题不很熟悉的读者先看(14)及(7)中第一、二节。

参考文献以直接引用者为限。本书各文用统一编号(1)至(14)，其他文献在各文内自行编号，用方括号。

周江文

1978.7.

Preface

This is a collection of papers written in the period 1958-78. Most of them have been printed in an informal way. In preparing this collection, minor revisions have been made.

During the last thirty years, the theory of errors, by virtue of integration with mathematical statistics, has made remarkable theoretical advances, its field of study having been extended accordingly from adjustment of independent observations and estimations of variances to correlated observation adjustment, error analysis and prediction of random variables. Right in such fields of extensions lie the principal topics of this book.

The appendix (14) is written for the benefit of those unfamiliar with the topics, to whom reading (14) and sections 1, 2 of (7) first would be helpful.

In the references of a paper, only those directly referred to are listed. Papers of this book are given unified numbers (1) to (14), others are numbered respectively under each paper, using square brackets.

Zhou Jiangwen

July, 1978

Institute of Geodesy and Geophysics
The Chinese Academy of Sciences

目　　次

THEORY OF ERRORS

(A Collection of Papers)

by

Zhou Jiangwen

Unified
Reference
Nos.

观测权的估值

当不同精度或不同性质的观测参加同一平差时，必须知道它们的权。根据观测求出它们的方差估值是平差问题的一个组成部分。

为此，Rao[1]提出了方差的MINQUE 估值：估式以观测量的二次齐式表示，齐式方阵之差的欧式范数(元素平方和)极小，估值无偏。

Helmert[2] 很早就提出了用余差表示的估式，可以证明它就是MINQUE估值。

本文介绍 Helmert、Welsch[3] 的演证，并作了必要的加工。MINQUE理论请参看〔1〕，这里不讨论。

以下基本公式请参看〔7〕。

观测方程

$$\underset{nm}{A}\ \underset{m1}{X} = \underset{n1}{L} + V \qquad (1)$$

观测按精度分组(块)(演证时分两组，相互独立，方差 σ_1^2，σ_2^2，结果直接推广于多组)，

$$\begin{pmatrix} \underset{n_1 m}{A_1} \\ \underset{n_2 m}{A_2} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \underset{n_1 1}{L_1} \\ \underset{n_2 1}{L_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

取权 $P = \begin{pmatrix} \underset{n_1 n_1}{p_1} & \\ & \underset{n_2 n_2}{p_2} \end{pmatrix}$，其中$p_i$不必与$\sigma_i^2$联系。

法方程

$$\overbrace{(\underbrace{A_1' p_1 A_1}_{C_1} + \underbrace{A_2' p_2 A_2}_{C_2}}^{C})X = (A_1' p_1 L_1 + A_2' p_2 L_2) \qquad (3)$$

设L的真误差 $\Delta=\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{pmatrix}$、则有[7]

$$V=(I-AC^{-1}A'P)\Delta$$

$$\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}C^{-1}A'P\Delta \qquad (4)$$

上式对于权的任意取值皆成立（例如可取$P=I$），V随P而不同，Δ与P的取值无关。由(4)

$$\begin{aligned}V_1'p_1V_1&=(\Delta_1'-\Delta'PAC^{-1}A_1')\,p_1\,(\Delta_1-A_1C^{-1}A'P\Delta)\\ &=\Delta_1'p_1\Delta_1-2\underbrace{\Delta'PA}_{1m}\underbrace{C^{-1}A_1'p_1\Delta_1}_{m1}\\ &\quad+\underbrace{\Delta'PA}_{1m}\underbrace{C^{-1}C_1C^{-1}A'P\Delta}_{m1}\\ &=p_1\Delta_1'\Delta_1-2\mathrm{Sp}\,C^{-1}A_1'p_1\Delta_1\Delta'PA\\ &\quad+\mathrm{Sp}\,C^{-1}C_1C^{-1}A'P\Delta\Delta'PA \qquad (5)\end{aligned}$$

求上式期望，注意$A'P\Delta=A_1'p_1\Delta_1+A_2'p_2\Delta_2$，$E\Delta_1'\Delta_1=n_1\sigma_1^2$，$E\Delta_1\Delta_1'=\underset{n_1n_1}{\sigma_1^2}$　$E\Delta_1\Delta_2'=0$，于是

$$\begin{aligned}E(V_1'p_1V_1)&=n_1\underbrace{p_1\sigma_1^2}_{\sigma_{01}^2}-2\mathrm{Sp}\,(\underbrace{C^{-1}C_1}_{K_1})p_1\sigma_1^2\\ &\quad+\mathrm{Sp}\,(C^{-1}C_1C^{-1}C_1)p_1\sigma_1^2\\ &\quad+\mathrm{Sp}\,(C^{-1}C_1\underbrace{C^{-1}C_2}_{K_2})\underbrace{p_2\sigma_2^2}_{\sigma_{02}^2}\\ &=\{n_1-2\mathrm{Sp}\,K_1+\mathrm{Sp}\,(K_1K_1)\}\sigma_{01}^2\\ &\quad+\mathrm{Sp}(K_1K_2)\sigma_{02}^2 \qquad (6)\end{aligned}$$

同样有$E(V_2'p_2V_2)=\mathrm{Sp}\,(K_1K_2)\sigma_{01}^2+\{n_2$

$$-2\mathrm{Sp}\,K_2+\mathrm{Sp}\,(K_2K_2)\}\sigma_{02}^2 \qquad (7)$$

（6）（7）两式左方代以$V_1'p_1V_1$，$V_2'p_2V_2$，右方相应

σ^2_{01}，σ^2_{02} 得到估值$\hat{\sigma}^2_{01}$、$\hat{\sigma}^2_{02}$，然后由 $\frac{\hat{\sigma}^2_{01}}{p_1} = \hat{\sigma}^2_1$、$\frac{\hat{\sigma}^2_{02}}{p_2}$ $= \hat{\sigma}^2_2$得到所求方差估值。

式中$K_1 = C^{-1}C_1$、$K_2 = C^{-1}C_2$，C_1、C_2 是法方程系数中由两组分别提供的部分系数。$K_1 + K_2 = I$可作检验。K的计算一般较繁，而权的要求并不高，因此可作一定的简化。由于 C、C_1、C_2 一般非对角项相对较小，略去它们仍可得到较好的近似。这时

$$C = C_1 + C_2 \approx \begin{pmatrix} C_1 & \\ & C_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \\ & C_{1m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{21} & \\ & C_{2m} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

而

$$SpK_1 \approx \left[\frac{C_{1i}}{C_i}\right] \qquad i = 1 \text{至} m$$

$$SpK_1^2 \approx \left[\frac{C_{1i}^2}{C_i^2}\right] \qquad (9)$$

$$SpK_1K_2 \approx \left[\frac{C_{1i}C_{2i}}{C_i^2}\right]$$

应当指出，上述估值不需要象 Helmert、Welsch 所说的那样，使用迭代法，以达到解的收敛。估值可以有好坏，但不以收敛为标志。

如果P是正确的，应有 $\sigma^2_{01} = \sigma^2_{02} = \sigma^2_0$，即单位权方差，这时

$$\begin{aligned} V'PV &= V_1'p_1V_1 + V_2'p_2V_2 \\ &= \{n_1 - 2SpK_1 + Sp[K_1(K_1 + K_2)] \\ &\quad + n_2 - 2SpK_2 + SpK_2(K_1 + K_2)\}\hat{\sigma}^2_0 \\ &= \{n - Sp(K_1 + K_2)\}\hat{\sigma}^2_0 \\ &= (n - m)\hat{\sigma}^2_0 \end{aligned} \qquad (10)$$

这就是通常已知权的情况下求σ^2_0的估式。

参 考 文 献

〔1〕 Rao,C.R., Linear Statistical Inference and Its Applications,John Wiley and Sons,Inc.(1973)

〔2〕 Helmert,F.R., Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate,B.G.Teubner,Leipzig(1924)

〔3〕 Welsch,W., A posteriori Varianzschätzung nach Helmert,AVN,85(2), (1978)

ESTIMATION OF WEIGHTS OF OBSERVATIONS

We are often confronted with adjustment problems involving observations of different orders or of different quantities, alloting them appropriate weights is important in that inadequate weighting would cause systematic distortion of the whole system, especially when the case is a free net. Helmert[2] gave a method of estimating variances from the residuals of a preliminary adjustment, which Welsch[3] et al. found to be MINQUE recently. Here some refinements in reasoning are given, and it seems to the author that an iteration process, as suggested by Helmert and by Welsch, is unnecessary in principle.

论　Collocation

一、问题

二、条件平差法

三、间接平差法

四、其他方法

一、问　　题

Collocation 问题在国际上讨论很盛。这个词用于大地测量学，含义还不很明确，大致是由观测推估（随）机（变）量，其中有拟合问题，由于是机量，又是推估问题，因此可称“拟合推估”。例如由差距或垂差通过Stokes 公式（积分化为有限和）推估重力异常，或由重力——高程关系推估空白区重力异常，重力异常或经过改正的重力异常是机量，在拟合的同时，还要把重力异常的分布信息考虑进去。问题的解法可以有多种，例如余方差极小法（包括回归法），如 Rao，Argentiero 等。作者认为一般的关联平差法是此问题有效和完整的现成解法，在《重力异常与区均的推估》[5] 一文中，作者就用了间接平差法。本文着重说明条件平差法和间接平差法，并和回归法作了比较。

设观测方程

$$\underset{nm}{A}\ \underset{m1}{X} = Y = \underset{n1}{L} + N \qquad (1)$$

其中X是机量(列向量)（EX，σ_{xx}），(EX是期望，σ_{xx} 是积差(阵)，定义$\sigma_{xy} = E(X-EX)(Y-EY)'$)；N是噪声（0，$\sigma_{NN}$)；L是观测值（EL，$\sigma_{LL} = \sigma_{NN} + A\sigma_{XX}A'$)；所有积差都设是已知的，并设$\sigma_{NX} = 0$，即机量N与X无关联。(1)式求

期望，

$$AEX = EY = E(L+N) = EL \tag{2}$$

注意X、$Y = AX = L + N$ 都是机量，这和一般平差问题有别。

这里假设EX已知，以下的讨论也以此种情形为限（不包括EX未知，或部分未知之情形）。

二、条件平差法

（1）—（2）得到机量差方程

$$A\Delta X = \Delta L + N \tag{3}$$

其中除N外，ΔX也是机量差（0，σ_{XX}），因此（3）式应看作条件方程，$\Delta L = L - EL = L - AEX$是已知"闭合差"，（3）式可写成

$$(I\ -A)\begin{pmatrix} V \\ \Delta \end{pmatrix} + \Delta L = 0 \tag{4}$$

其中N已用估值V换入，ΔX 的估值记为Δ，$\begin{pmatrix} N \\ \Delta X \end{pmatrix}$的积差是

$\begin{pmatrix} \sigma_{NN} & \\ \cdot & \sigma_{XX} \end{pmatrix}$。按照条件平差法[7]，在机量差函数

$(V'\ \Delta')\begin{pmatrix} \sigma_{NN}^{-1} & \\ & \sigma_{XX}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ \Delta \end{pmatrix}$极小条件下求解。联系数K法方程的系数

$$D = (I\ -A)\begin{pmatrix} \sigma_{NN} & \\ & \sigma_{XX} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ -A' \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_{NN} + A\sigma_{XX}A' = \sigma_{LL} \tag{5}$$

$$K = -\sigma_{LL}^{-1}\Delta L \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} V \\ \Delta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sigma_{NN} & \\ & \sigma_{XX} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ -A' \end{pmatrix}\sigma_{LL}^{-1}\Delta L \tag{7}$$

即
$$\left.\begin{aligned} V &= -\sigma_{NN}\sigma_{LL}^{-1}\Delta L \\ \underset{m1}{\Delta} &= \sigma_{XX}A'\sigma_{LL}^{-1}\Delta L = \hat{X} - EX \end{aligned}\right. \tag{8}$$

$\hat{X}$是X的估值。由于 $E\Delta L = 0$，∴ $E\hat{X} = EX$，即$\hat{X}$是无偏的。

由（8） $$\sigma_{\hat{X}\hat{X}} = \sigma_{XX}A'\sigma_{LL}^{-1}A\sigma_{XX} \tag{9}$$

其他如机量差函数及其与 χ^2 变量之关系，单位权方差 σ_0^2（以上取$\sigma_0^2 = 1$）估值，均可照(7) 直接写出。例如

$$\begin{aligned}(V'\Delta')\begin{pmatrix} \sigma_{NN}^{-1} & \\ & \sigma_{XX}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ \Delta \end{pmatrix} &= V'\sigma_{NN}^{-1}V + \Delta'\sigma_{XX}^{-1}\Delta \\ &= \Delta L'\sigma_{LL}^{-1}\Delta L \\ &= \chi_n^2 \end{aligned} \tag{10}$$

估值积差用估值相对被估值之差来定义时，请参看另文[4]。

三、间接平差法

把（3）式作为“误差”方程是不够的，因为机量差除了N之外，还有ΔX。完全的机量差方程应为

$$\left.\begin{aligned} A\Delta &= \Delta L + V \\ \Delta &= \quad\quad \Delta \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

或
$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}\Delta = \begin{pmatrix} \Delta L \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V \\ \Delta \end{pmatrix}$$

其中左方Δ是未知量，右方Δ和V是机量差，仍在

$$(V'\Delta')\begin{pmatrix} \sigma_{NN}^{-1} & \\ & \sigma_{XX}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ \Delta \end{pmatrix}$$

极小条件下求未知量 Δ。

法方程

$$(A'I)\begin{pmatrix}\sigma_{NN}^{-1} & \\ & \sigma_{XX}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ I\end{pmatrix}\Delta=(A'I)\begin{pmatrix}\sigma_{NN}^{-1} & \\ & \sigma_{XX}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta L\\ \end{pmatrix}$$

或 $$(\underset{mn}{A'}\sigma_{NN}^{-1}\underset{nm}{A}+\sigma_{XX}^{-1})\underset{m1}{\Delta}=A'\sigma_{NN}^{-1}\Delta L \tag{12}$$

由于 $$\begin{aligned}A'\sigma_{NN}^{-1}A\sigma_{XX}A'+A'&=(A'\sigma_{NN}^{-1}A+\sigma_{XX}^{-1})\sigma_{XX}A\\&=A'\sigma_{NN}^{-1}(A\sigma_{XX}A\ \ +\sigma_{NN})\\&=A'\sigma_{NN}^{-1}\sigma_{LL}\end{aligned} \tag{13}$$

因此 $$\begin{aligned}\Delta&=(A'\sigma_{NN}^{-1}A+\sigma_{XX}^{-1})^{-1}A'\sigma_{NN}^{-1}\Delta L\\&=\sigma_{XX}A'\sigma_{LL}^{-1}\cdot\Delta L\end{aligned}$$

可见与(8)式完全相同。

从(12)可见，推估未知量的个数m不受A的秩的限制。一般平差问题则要求$n\geqslant m$，$R_A=m$。

四、其他方法

回归法为Argentiero[2]等所取用，从与上不同的出发点，得出相同的结果。为便于读者比较，这里也作简要陈述。

机量X中取任一个x，以机量L的线性函数去表达，由于要求无偏，取机量差式不需常数项，即

$$\Delta=b_i\Delta L_i=B'\ \Delta L \tag{14}$$

中间一式用Einstein求和符号，$B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_n\end{pmatrix}$。$\Delta$是$\Delta x$的估值，

余差

$$u=\Delta x-\Delta=\Delta x-B'\Delta L \tag{15}$$

在余方差Eu^2极小条件下定B及x，可得

$$\sigma_{xL} = B'\sigma_{LL} \tag{16}$$

因而
$$\Delta = \underset{1n}{\sigma}{}_{xL}\sigma_{LL}^{-1}\Delta L \tag{17}$$

每一x有一相应的行阵σ_{xL}，对于全体X，有

$$\Delta = \underset{mn}{\sigma}{}_{XL}\sigma_{LL}^{-1}\Delta L \tag{18}$$

其中 $\sigma_{XL} = E\Delta X\Delta L' = E\Delta X\Delta X'A' = \sigma_{XX}A'$ (19)

(用(3)及$\sigma_{NX} = 0$)，代入(18)，可见仍得(8)式。

Koch[3] 取与 Rao[1] 相同的方法，即以L表达X的函数，在线性无偏及余方差极小条件下求解，也得到与上述相同的结果。Koch 把结果和一般间接平差法公式对比，看出形式上需要引进"高度不真实"的观测（类似(11)的下式），似乎不理解这个方程的实质。

以上诸人的工作间接证明了拟合推估X的函数的余方差极小。

参 考 文 献

[1] Rao, C.R., Linear Statistical Inference and its Applications, John willey and Sons, Inc.(1973)

[2] Argentiero, P.and Lowrey, B., On Estimating Gravity Anomalies—A Comparison of Least Squares Collocation with Conventional Least Squares Techniques, Bulletin Géodésique, 51, (2), (1977)

[3] Koch, K.R., Least Squares Adjustment and Collocation, Bulletin Géodésique, 51, (2), (1977)

[4] 周江文，拟合推估的两种解法(即将付印)
Zhou Jiangwen, Collocatian by Two Variant Methods (to be printed soon)