



小学六年级用
(普及本修订版)

SHU

XUE

数 学

奥林匹克教材

中国教育学会数学教育研究发展中心 审定

首都师范大学出版社

shuxue
aolinpike
jiaocai

奥 林 匹 克

前 言（第一版）

体育奥林匹克是关于灵活、力量与美的竞赛，解数学难题同样需要灵活机智、力量与美，因而就有了数学奥林匹克，最早举行的数学奥林匹克只是 100 多年以前的事情。我国于 1956 年首先在部分地区（北京、上海等）开始举办省、市一级的高中学生数学竞赛，1978 年举办全国性高中生数学竞赛，1983 年举办全国性初中生数学竞赛。现在数学奥林匹克已几乎被全国每一位中小学学生所知晓、所向往。

首都师范大学出版社是为数不多的在国内最早出版数学奥林匹克图书的出版社。到目前为止，已出版数学奥林匹克用书 30 余种，发行量 500 余万册，受到了越来越多的中小學生、学生家长及老师的欢迎和好评，并得到了上级有关部门的肯定，还有 10 余个图书品种在日本、台湾公开出版发行。

现在这套由中国教育学会数学教育研究发展中心和首都师范大学出版社联合推出的 10 余种中小學生数学奥林匹克用书，是对以前所出图书的一种补充和完善，作者阵容强大，有中央教育科学研究所数学研究室的专家，有北京数学奥林匹克研究所的研究员，有获得'94 全国小学数学奥林匹克总决赛学校队团体总分第一名荣誉的参赛队教练员，还有北京数学奥林匹克业余学校的教练员等。全书从小学三年级起到初中三年级止，每个年级一册。另配有供赛前强化训练和供平时常规训练之用的试题库。试题库覆盖面大，信息量强，题型新颖，有坡度有力度，全部题目附答案，所附题解及说明充分地展示了数学解题的基本技巧和基本方法。

近几年，数学奥林匹克图书的出版工作，若用如火如荼来形容也并不过分。无疑，这些图书的出版对天才青少年的教育及成长具有莫大的帮助。然而天才青少年总是少数，为数众多的是上

千万的普普通通的中小學生。這些學生中間未必就沒有天才，許多天才還沒有出現或者還沒有被老師、家長發現。如何盡早地發現並培養天才青少年？如何使為數眾多的普通中小學生由怕數學，轉變為愛數學，由不習慣於數學解題轉變為擅長數學解題？這是我們數學工作者及數學教育工作者多年研究的一個課題，也正是我們編寫這套普及版數學奧林匹克圖書的一個目的。正像體育奧林匹克強調人人參與一樣，數學奧林匹克也特別強調人人參與。

數學是研究物質世界中數和形的科學。從算術到代數，從常量到變量，從微積分到概率論，從概率論到模糊數學……雖然基本知識在延伸拓展提高，然而解決問題的基本方法和基本技巧卻是相通的，甚至是一致的。觸類旁通，舉一反三，這就是一種良好的數學素質。從小培養孩子們的**數學頭腦**（注意，不一定人人都成為數學家，但人人都自覺地用數學，是我們所應提倡的），也是我們編書的目的之一。

數學來源於五彩的客觀世界，但數學圖書卻往往給人以枯燥乏味之感。為改變這種狀況，我們在編寫此書時（尤其是小學生用書）特別注意融基本知識、基本技能和基本方法於豐富有趣的語言材料中去，其目的是吸引更多的中小學生自覺自願地坐下來，從第一頁閱讀到最後一頁，從第一道習題做到最後一道習題。

我們還認真地處理了與現行中小學數學教材的關係，仔細地研讀了中國數學會數學普及工作委員會制定的中小學數學競賽大綱。全書由淺入深，深入淺出，圖文並茂，言簡意賅。

我們希望這套叢書能真正成為廣大青少年的良師益友，並誠懇地希望得到廣大讀者的批評指正。

董鳳舉

1994年8月於首都師範大學

前 言（第二版）

在人类进入新的一个千年前夕，中国召开了一次全国教育工作会议，在这次会议上，江泽民主席关于创新精神和创新人才的培养问题说了这样一段话：“在出人才的问题上，要鼓励和支持冒尖，鼓励和支持当领雁，鼓励和支持一马当先。这不是提倡个人突出，个人英雄主义，而是合乎人才成长规律的必然要求。”这段话的含义极为深刻，上至名牌大学、研究院，下至中小学，大家都在思考江泽民主席在世纪之交讲这段话的含义，都在寻求早出人才、快出人才的途径。

小学该怎样培养冒尖人才？我们认为这是一件该十分小心的工作，小学生中肯定有智力超常的人才，但也有被顽妄掩盖着的璞玉；有在城市长大，见多识广，灵犀一点即通的机灵鬼，也有长于僻壤乡村，未见世面，但一经点拨，进步长足，前途不可斗量的憨厚之童；既有在老师指点下，一路顺风，年年名列前茅的得意门生，也有靠自己好学钻研、无师自通，取得点滴进步，但不知外部世界有多精彩的可畏少年……总之，不该在小学阶段把真正的苗子埋没。我们认为在小学阶段主要应该是激发小学生的兴趣，求知的兴趣，好奇的兴趣，学习的兴趣。数学奥林匹克活动在小学、初中阶段正是为了培养他们对数学的兴趣，而且只要有了对数学的兴趣，必然会形成对物理、化学、生物、计算机等其他学科的兴趣。首都师范大学出版社在五年前策划和推出《数学奥林匹克教材》普及版正是想在更大众化、更低的起点上把小学生的学习兴趣调动起来，其眼光是很长远的。这次对原版本的重新修订，试图把这种调动工作做得更好。

这次修订有以下几个显著特点：其一，注重分析。让学生们

学会自己能分析问题，把老师的本领变成自己的本领。书中的不少例题给出了几种解法，不同的解法就是不同的分析方法、不同的思路。学生们在学习不同的方法后，就有可能创造出更新更好的方法。我们试图以这样的方法培养创新精神。所谓创新精神不是一时的心血来潮，不是突然的灵感，而是在学习基础上的再创造。其二，强调通俗。我们的版本既然称之为普及版，必须让更大范围的读者看懂，既要适合他们的语言程度，又要适合他们的理解水平。其三，突出趣味性。数学竞赛本身是为了培养小学生学习数学的兴趣，切不可因为教材枯燥无味而使学生烦腻。所以我们在教材中尽量增加趣味的例题和练习，并且配以有趣的插图。

说到趣味性，有人主张用游戏来替代数学竞赛，甚至认为小学生就是应该让他们玩，让他们在游玩、欢乐中成长，认为欧美小学生就是从游玩中长大的，他们不是很聪明、很有创新精神吗？我们十分赞赏这一想法，可惜的是我们的教育中还没有形成一整套游戏的教育方法，各地不少老师和专家都正在探索和设计这方面的游戏，我们希望我们国家也会有一套轻松培养创新精神的方法。在目前的义务教育制下，配合教材搞一些课外活动，以激发学习的兴趣，也不失为一个好方法。爱玩，是任何一个小朋友的天性，我们担心（尤其是家长更担心）放手一玩，不加引导，有可能玩到另一个极端，创新的能力没学会，不良习气倒沾上不少，有的甚至断送了一生的前途。所以我们主张，书要读，要读好书，玩也要玩，要玩得健康。

我们再次感谢出版社组织重新修订这套教材。我们为出版社的这种不断推陈出新的精神所鼓舞。热情欢迎读者为本教材提意见、找错误、发建议，以期推出更好的教材。

余文熊

2000年元旦于浙江师范大学

首都师大奥林匹克图书 助你叩击成功之门

目 录

一、分数大小的比较	(1)
二、循环小数化分数	(9)
三、繁分数化简	(12)
四、单位分数	(15)
五、分数计算的技巧	(19)
六、估算	(27)
七、分数、百分数应用题	(31)
八、工程问题	(37)
九、找规律	(42)
十、周期性问题	(48)
十一、反证法	(52)
十二、举反例	(56)
十三、对应问题	(59)
十四、体育比赛中的推理问题	(66)
十五、真真假假	(71)
十六、列方程解应用题	(76)
十七、倒推法	(82)
十八、比	(86)
十九、正、反比例	(91)
二十、圆	(97)
二十一、圆柱和圆锥	(104)
二十二、简单统筹规划	(108)
二十三、完全平方数	(111)
二十四、整数的分拆	(114)

二十五、定义新数	(118)
二十六、定义新运算	(121)
二十七、变换	(123)
二十八、加法原理和乘法原理	(127)
二十九、包含与排除	(134)
三十、抽屉原则	(140)
自测题一.....	(148)
自测题二.....	(150)
自测题三.....	(152)
自测题四.....	(154)
参考答案或提示.....	(156)

一、分数大小的比较

比较两个分数大小的方法很多,通常的做法有三种。

1. 分母相同的分数比较大小,分子大的分数比较大

例 1 比较 $\frac{4}{7}$ 和 $\frac{3}{7}$ 的大小。

解 $\frac{4}{7} > \frac{3}{7}$ 。

2. 分子相同的分数比较大小,分母大的分数反而小

例 2 比较 $\frac{3}{5}$ 和 $\frac{3}{4}$ 的大小。

解 $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$ 。

3. 分子和分母都不相同的分数比较大小,可以把它们转化为分母相同的分数比较大小;也可以把它们转化为分子相同的分数比较大小

例 3 比较 $\frac{7}{12}$ 和 $\frac{13}{21}$ 的大小。

解 先通分

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \times 7}{12 \times 7} = \frac{49}{84}, \frac{13}{21} = \frac{13 \times 4}{21 \times 4} = \frac{52}{84}。$$

因为 $\frac{49}{84} < \frac{52}{84}$,

所以 $\frac{7}{12} < \frac{13}{21}$ 。

例 4 比较 $\frac{15}{19}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{20}{37}$ 这四个分数的大小。

分析 这四个分数的分母 19, 9, 25, 37 两两互质,通分后分母较大,计算麻烦。分子 15, 4, 12, 20 的最小公倍数是 60, 因此可以根据分数基本性质,把以上四个分数转化为分子相同的分数进行比较,较为简便。

解 $\frac{15}{19} = \frac{15 \times 4}{19 \times 4} = \frac{60}{76}$,

$$\frac{4}{9} = \frac{4 \times 15}{9 \times 15} = \frac{60}{135},$$

$$\frac{12}{25} = \frac{12 \times 5}{25 \times 5} = \frac{60}{125},$$

$$\frac{20}{37} = \frac{20 \times 3}{37 \times 3} = \frac{60}{111}.$$

因为 $\frac{60}{76} > \frac{60}{111} > \frac{60}{125} > \frac{60}{135}$,

所以 $\frac{15}{19} > \frac{20}{37} > \frac{12}{25} > \frac{4}{9}$ 。

比较几个分数的大小,还可以采用一些比较灵活的方法。

4. 把分数化成小数比较大小

例 5 比较 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{7}{20}$ 的大小。

解 $\frac{2}{5} = 0.4$, $\frac{7}{20} = 0.35$ 。

因为 $0.4 > 0.35$,

所以 $\frac{2}{5} > \frac{7}{20}$ 。

5. 用交叉相乘的方法比较大小

一般地,如果有两个分数 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$, 当 $ad > bc$ 时, 便有 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ 。

这是因为 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$,

当 $ad > bc$ 时, $ad - bc > 0$,

又 $bd > 0$,

所以 $\frac{ad-bc}{bd} > 0$,

故 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ 。

例 6 比较 $\frac{7}{11}$ 和 $\frac{9}{13}$ 的大小。

解 用 $\frac{7}{11}$ 的分子 7 乘以 $\frac{9}{13}$ 的分母 13, $7 \times 13 = 91$, 再用 $\frac{9}{13}$ 的分子 9 乘以 $\frac{7}{11}$ 的分母 11, $9 \times 11 = 99$ 。

因为 $91 < 99$,

所以 $\frac{7}{11} < \frac{9}{13}$ 。

6. 与“第三个数”相比较的方法

例 7 比较 $\frac{24}{25}$ 和 $\frac{34}{35}$ 的大小。

解 先将 $\frac{24}{25}$ 和 $\frac{34}{35}$ 分别与 1 相比较:

$$1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25}, 1 - \frac{34}{35} = \frac{1}{35}。$$

根据被减数相同,减数越大,差反而小。因为 $\frac{1}{25} > \frac{1}{35}$, 所以 $\frac{24}{25}$

$< \frac{34}{35}$ 。

下面继续研究较复杂的比较分数大小的问题。

例 8 比较下面各组中两个分数的大小。

(1) $\frac{7}{8}$ 和 $\frac{7+2}{8+2}$; (2) $\frac{93}{98}$ 和 $\frac{93+14}{98+14}$ 。

解 (1) 先化简: $\frac{7+2}{8+2} = \frac{9}{10}$,

再比较 $\frac{7}{8}$ 和 $\frac{9}{10}$ 的大小: $\frac{7}{8} < \frac{9}{10}$ 。

所以 $\frac{7}{8} < \frac{7+2}{8+2}$ 。

(2) 先化简: $\frac{93+14}{98+14} = \frac{107}{112}$ 。

把 $\frac{93}{98}$ 和 $\frac{107}{112}$ 分别与 1 相比较:

$$1 - \frac{93}{98} = \frac{5}{98}, 1 - \frac{107}{112} = \frac{5}{112}。$$

因为 $\frac{5}{98} > \frac{5}{112}$,

所以 $\frac{93}{98} < \frac{93+14}{98+14}$ 。

说明 通过例 8 的比较发现: 一个真分数的分子和分母都加上同一个自然数, 所得的新分数比原分数大。

例 9 比较下面每组中两个分数的大小。

(1) $\frac{7}{8}$ 与 $\frac{7-2}{8-2}$; (2) $\frac{93}{98}$ 与 $\frac{93-14}{98-14}$ 。

解 (1) 先化简: $\frac{7-2}{8-2} = \frac{5}{6}$ 。

再比较 $\frac{7}{8}$ 和 $\frac{5}{6}$ 的大小: $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$ 。

所以 $\frac{7}{8} > \frac{7-2}{8-2}$ 。

(2) 先化简: $\frac{93-14}{98-14} = \frac{79}{84}$ 。

把 $\frac{93}{98}$ 与 $\frac{79}{84}$ 分别与 1 相比较:

$$1 - \frac{93}{98} = \frac{5}{98}, 1 - \frac{79}{84} = \frac{5}{84}。$$

因为 $\frac{5}{98} < \frac{5}{84}$,

所以 $\frac{93}{98} > \frac{93-14}{98-14}$ 。

说明 通过例 9 的比较发现: 一个真分数的分子、分母都减去同一个自然数(这个自然数小于真分数的分子), 所得的新分数比原分数小。

例 10 比较下面每组中两个分数的大小。

(1) $\frac{5}{4}$ 和 $\frac{5-2}{4-2}$; (2) $\frac{82}{79}$ 和 $\frac{82-10}{79-10}$ 。

解 (1) $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$, $\frac{5-2}{4-2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ 。

因为 $1\frac{1}{4} < 1\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{5}{4} < \frac{5-2}{4-2}$ 。

(2) $\frac{82}{79} = 1\frac{3}{79}$, $\frac{82-10}{79-10} = \frac{72}{69} = 1\frac{3}{69}$ 。

因为 $1\frac{3}{79} < 1\frac{3}{69}$,

$$\text{所以 } \frac{82}{79} < \frac{82-10}{79-10}.$$

说明 通过例 10 的比较发现:一个假分数的分子、分母都减去同一个自然数(这个自然数小于假分数的分母),所得的新分数比原分数大。

例 11 比较下面每组中两个分数的大小。

$$(1) \frac{5}{4} \text{ 和 } \frac{5+2}{4+2}; \quad (2) \frac{82}{79} \text{ 和 } \frac{82+10}{79+10}.$$

$$\text{解 } (1) \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}, \frac{5+2}{4+2} = \frac{7}{6} = 1 \frac{1}{6}.$$

$$\text{因为 } 1 \frac{1}{4} > 1 \frac{1}{6},$$

$$\text{所以 } \frac{5}{4} > \frac{5+2}{4+2}.$$

$$(2) \frac{82}{79} = 1 \frac{3}{79}, \frac{82+10}{79+10} = \frac{92}{89} = 1 \frac{3}{89}.$$

$$\text{因为 } 1 \frac{3}{79} > 1 \frac{3}{89},$$

$$\text{所以 } \frac{82}{79} > \frac{82+10}{79+10}.$$

说明 通过例 11 的比较发现,一个假分数的分子、分母都加上同一个自然数,所得的新分数比原分数小。

例 12 试比较 $\frac{111}{1111}$ 和 $\frac{1111}{11111}$ 哪个分数大?

解法一 先求出这两个分数的倒数,哪个分数的倒数越大,原来的分数就越小。

$$\frac{111}{1111} \text{ 的倒数是 } \frac{1111}{111} = 10 \frac{1}{111},$$

$$\frac{1111}{11111} \text{ 的倒数是 } \frac{11111}{1111} = 10 \frac{1}{1111}.$$

$$\text{因为 } 10 \frac{1}{111} > 10 \frac{1}{1111},$$

$$\text{所以 } \frac{111}{1111} < \frac{1111}{11111}.$$

解法二 根据一个真分数的分子、分母都加上同一个自然数,

所得的新分数比原来的自然数大进行比较。

$$\begin{aligned} \text{因为 } \frac{111}{1111} &= \frac{111 \times 10}{1111 \times 10} = \frac{1110}{11110}, \\ \frac{1110}{11110} &< \frac{1110+1}{11110+1} = \frac{1111}{11111}, \\ \text{所以 } \frac{111}{1111} &< \frac{1111}{11111}. \end{aligned}$$

例 13 比较 $\frac{666665}{666667}$ 和 $\frac{777776}{777778}$ 的大小。

$$\begin{aligned} \text{解法一 } 1 - \frac{666665}{666667} &= \frac{2}{666667}, \\ 1 - \frac{777776}{777778} &= \frac{2}{777778}. \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \frac{2}{666667} > \frac{2}{777778},$$

$$\text{所以 } \frac{666665}{666667} < \frac{777776}{777778}.$$

$$\text{解法二 } \frac{666665}{666667} \times 666667 = 666665,$$

$$\begin{aligned} &\frac{777776}{777778} \times 666667 \\ &= \frac{777776 \times 666667}{777778} \\ &= \frac{(777778-2) \times 666667}{777778} \end{aligned}$$

$$= 666667 - \frac{2 \times 666667}{777778}$$

$$= 666667 - \frac{666667}{388889}$$

$$= 666667 - 1 \frac{277778}{388889}$$

$$= 666665 \frac{111111}{388889}.$$

$$\text{因为 } 666665 \frac{111111}{388889} > 666665,$$

$$\text{所以 } \frac{666665}{666667} < \frac{777776}{777778}.$$

解法三 666665×777778

$$= 666665 \times (777776 + 2)$$

$$= 666665 \times 777776 + 666665 \times 2$$

$$666667 \times 777776$$

$$= (666665 + 2) \times 777776$$

$$= 666665 \times 777776 + 777776 \times 2$$

因为 $666665 \times 2 < 777776 \times 2$,

所以 $666665 \times 777778 < 666667 \times 777776$.

故 $\frac{666665}{666667} < \frac{777776}{777778}$.

比较两个分数的大小的方法很多,应用这些方法时要注意根据题目的特点,进行具体分析,采用哪种方法比较简便,同时要注意灵活运用这些方法,不断地总结出新的方法。

练习一

1. 比较下面各组中两个分数的大小。

(1) $\frac{11}{17}$ 和 $\frac{10}{19}$; (2) $\frac{13}{24}$ 和 $\frac{37}{76}$;

(3) $\frac{45}{88}$ 和 $\frac{35}{66}$; (4) $\frac{63}{85}$ 和 $\frac{45}{77}$ 。

2. 把下列各分数用“<”连接起来。

(1) $\frac{10}{17}, \frac{12}{19}, \frac{15}{23}, \frac{20}{33}, \frac{60}{37}$;

(2) $\frac{13}{24}, \frac{9}{16}, \frac{3}{8}, \frac{7}{9}, \frac{2}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{12}$ 。

3. 比较下面每组中两个分数的大小。

(1) $\frac{369}{453}$ 和 $\frac{333}{417}$; (2) $\frac{12345}{98761}$ 和 $\frac{12346}{98765}$;

(3) $\frac{235861}{235862}$ 和 $\frac{652971}{652974}$; (4) $\frac{1234567}{9876543}$ 和 $\frac{12345671}{98765431}$;

(5) $\frac{123456}{123457}$ 和 $\frac{987648}{987656}$; (6) $\frac{7765}{8876}$ 和 $\frac{77655}{88765}$ 。

4. 比较 $\frac{8888887}{8888889}$ 与 $\frac{9999991}{9999994}$ 的大小。

5. $A = \frac{111111110}{22222221}$, $B = \frac{44444443}{88888887}$, 那么 A 和 B 中哪个数较

大?

二、循环小数化分数

同学们一定都会很熟练地把一个分数化成有限小数或无限循环小数。反过来,任给一个小数又怎样化成分数呢?

把一个有限小数化成分数是大家早已熟悉的,下面研究把循环小数化成分数的问题。

例 1 将下列循环小数化成分数。

$$(1) 0.\dot{4}3; \quad (2) 5.\dot{1}2\dot{3}.$$

分析 我们可以用移动循环节的方法化循环小数为分数。

解 (1) $0.\dot{4}3 = 0.4343\dots$, ①

$$\begin{aligned} & 0.\dot{4}3 \times 100 \\ &= 0.4343\dots \times 100 \\ &= 43.4343\dots \end{aligned} \quad \text{②}$$

将②和①两边分别相减,得到

$$0.\dot{4}3 \times (100 - 1) = 43,$$

所以 $0.\dot{4}3 = \frac{43}{99}$ 。

(2) 先看小数部分 $0.\dot{1}2\dot{3}$ 。

$$0.\dot{1}2\dot{3} = 0.123123\dots, \quad \text{①}$$

$$0.\dot{1}2\dot{3} \times 1000 = 123.123123\dots \quad \text{②}$$

将②和①两边分别相减,得到

$$0.\dot{1}2\dot{3} \times (1000 - 1) = 123,$$

所以 $0.\dot{1}2\dot{3} = \frac{123}{999}$,

故 $5.\dot{1}2\dot{3} = 5 \frac{123}{999} = 5 \frac{41}{333}$ 。

说明 由例 1 可知,一个纯循环小数的小数部分化成分数,这个分数的分子是一个循环节表示的数,分母各位数字都是 9,9 的