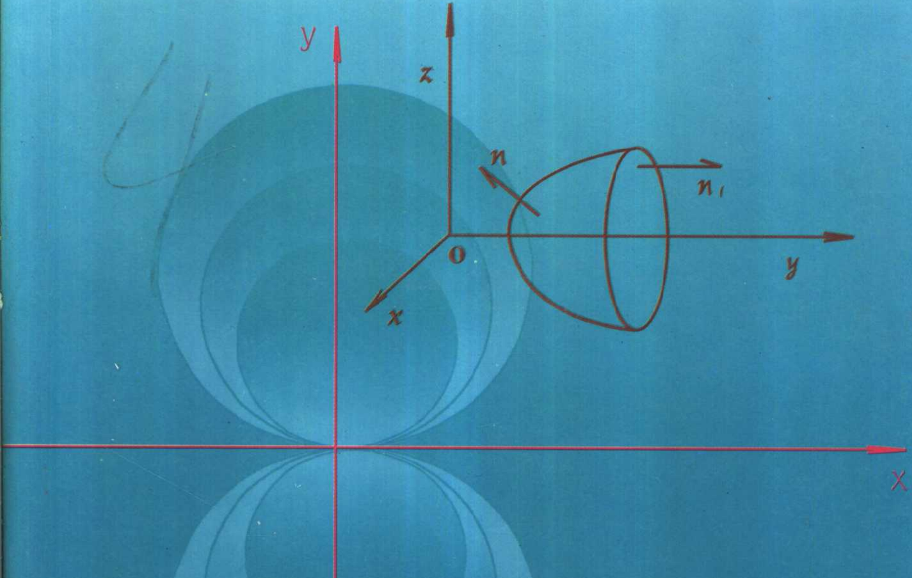
面向21世纪 高职、高专辅导教材

高等数学能力试题题解

张学元 主编



华中理工大学出版社

面向21世纪高职高专辅导教材

高等数学能力试题题解

张学元　主编
张孝理　审校

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学能力试题题解/张学元 主编
武汉:华中理工大学出版社, 1999年10月
ISBN 7-5609-2072-1

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①张… ②张…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-题解
Ⅳ. O13

高等数学能力试题题解 张学元 主编

责任编辑:李立鹏
封面设计:刘 卉
责任监印:张正林

出版发行:华中理工大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经销:新华书店湖北发行所

录排:武汉皇荣文化发展有限责任公司
印刷:华中理工大学出版社沔阳印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:18.25 字数:443 000
版次:1999年10月第1版 印次:2000年9月第3次印刷 印数:11 001—17 000
ISBN 7-5609-2072-1/O·199 定价:19.80元

内容简介

本书以能力培养为主线，精选了新近问世的《高等数学》能力试题，为方便读者使用，采用专题与教材相匹配的编写方式，全书共分九章，对综合性较强的题目，先给出解题思路分析，然后正式解答. 为了帮助学生加深基本概念的理解，除第八章外均配有是非判断题，并对“是”、“非”作了例证说明；为使学生自我测试学习水平，为教师在教学中提供题源，除第九章外，都配有选择题，并附有答案.

本书的主要读者对象是各类高等职业技术学院和专科学校的学生，也可供各层次大学生（理、工、师范、财经、医、农的本、专科，电大、职大、函大及高等教育自学考生）学习高等数学时使用.

前　言

本书主要是为高等职业技术学院和高等专科学校的学生编写的. 这类院校的人才培养目标是为区域经济培养高素质、强能力的实用型人才,因此教与学的着眼点是能力培养. 多年来的教学实践表明:他们在学习《高等数学》课程时,对处理高等数学问题的能力和用数学方法处理实际问题的能力都显得不尽人意,综合、分析、运用能力差. 究其原因,固然是多方面的,但主要是学习者在运用必备的知识,分析问题和解决问题的能力方面,没有得到足够的训练和培养.

本书的主要特点是以能力培养为主线,贯穿"能力—技能—知识"的思维链条,编者参阅和研究了大量的各类高等数学试题,精选出有启发性、典型性和针对性的能力试题,通过对这些题目的分析解答,为引导读者运用必备知识去独立解题提供了思维的钥匙,培养读者的综合、分析与实际运作能力.

本书是一本有综合功能、能对学生进行全方位能力培养的教学参考书,读者对象主要是高职、高专的学生,也适用于各层次大学生(理、工、师范、财经、医、农的本、专科、职大、函大及高等教育自学考生)学习高等数学时使用.

参加本书编写的教师(按姓氏笔画为序)有:王达运、王一蒙、李训德、李林、刘乾、刘给禹、刘秋生、刘改平、陈端堂、陈勇、张学元、周丽群、曹进成. 株洲职业技术学院副院长张孝理副教授审阅了此书,并提出了宝贵意见,在此表示衷心的谢意!

由于编者水平有限,书中缺点错误在所难免,敬请读者批评指正.

编者

1999 年 6 月

目　　录

第一章　极限与连续

§1.1　函数

1.1.1　求下列函数的定义域：

(1)$y=\sqrt{16-x^2}+\lg(\sin x)$；　　(2)$y=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3)$y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}+\arccos\dfrac{2x}{1+x}$；

(4)$y=\sqrt{2+x-x^2}+\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$；

$$(5)y=\begin{cases}(x+\pi)^2-1, & -5<x<-\pi;\\ \cos x, & -\pi\leqslant x\leqslant\pi;\\ (x-\pi)\sin\dfrac{1}{x-\pi}, & \pi<x<9.\end{cases}$$

分析　如果函数是由解析式给出的，求其定义域就是求函数表达式有意义的自变量可取的一切实数值的集合，一般是列出不等式(组)，再求解.

如果函数是分段函数，它的定义域就是求各个子区间的并集.

解　(1) 要使函数表达式有意义，必须

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0;\\ \sin x>0,\end{cases}即\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi(n=\pm 1,\pm 2,\cdots),\end{cases}$$

故所求函数的定义域 $D=[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

(2) 所给函数在 $x\neq 0$，$(1-x)/(1+x)>0$ 时有意义，解上述不等式，得 $-1<x<1$ 且 $x\neq 0$，即所求函数的定义域

$$D=(-1,0)\cup(0,1).$$

(3) 所给函数在

$$\begin{cases}-x\geqslant 0,\\ 2+x>0,\\ \left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1\end{cases}\text{时有意义,解之得}\begin{cases}x\leqslant 0,\\ x>-2,\\ -\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

故所求函数的定义域为 $D=\left[-\dfrac{1}{3},0\right]$.

(4) 要使函数 $y=\sqrt{2+x-x^2}+\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$ 有意义,必须要求自变量 x 满足

$$\begin{cases}2+x-x^2\geqslant 0;\\ \left|\lg\dfrac{x}{10}\right|\leqslant 1,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}(2-x)(1+x)\geqslant 0;\\ -1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1.\end{cases}$$

由 $(2-x)(1+x)\geqslant 0$ 解得 $-1\leqslant x\leqslant 2$,由 $-1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1$ 解得 $1\leqslant x\leqslant 100$,故所求函数的定义域

$$\begin{aligned}D&=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}\cap\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 100\}\\&=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}=[1,2].\end{aligned}$$

(5) 这是一个分段函数,直接求各个子区间的并,即得定义域

$$D=(-5,-\pi)\cup[-\pi,\pi]\cup(\pi,9)=(-5,9).$$

1.1.2 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1) $f\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$; (2) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$.

分析 要保证复合函数 $f[\varphi(x)]$ 有意义,自变量 x 既要在 $\varphi(x)$ 的定义域之中,又要 $\varphi(x)$ 的值落在 $f(x)$ 的定义域之中.

解 (1) 依题意有 $0\leqslant\sin\dfrac{\pi}{x}\leqslant 1$,即

$$2n\pi\leqslant\frac{\pi}{x}\leqslant(2n+1)\pi\quad(n=0.\ \pm 1,\cdots).$$

当 $n\neq 0$ 时,$2n\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant(2n+1)$,即 $x\in\left[\dfrac{1}{2n+1},\dfrac{1}{2n}\right]$,

当 $n=0$ 时,$0<\dfrac{1}{x}<1$,即 $x>1$.

故 $f\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$ 的定义域 $D=\left[\dfrac{1}{2n+1},\dfrac{1}{2n}\right]\cup(1,+\infty)$.

(2) 由题设，有

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1;\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a;\\a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$$

注意到 $a>0$，只可能有两种情形，当 $1-a\geqslant a$ 时，即 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，解得 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，即 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域

$$D=[a,1-a].$$

当 $1-a<a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，上述不等式组无解，$f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域不存在.

1.1.3 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},|x|<1;\\x^2+1,|x|\geqslant 1,\end{cases}$ 试求：

(1) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-2)$； (2) $f[f(x)]$.

分析 求分段函数的函数值，必须根据自变量取值的所在区间代入到相应区间的表达式中进行计算.

解 (1) $\because\ \left|-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}<1$；$|-2|=2>1$，

$$\therefore\ f(-\frac{1}{2})=\sqrt{1-(-\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f(-2)=(-2)^2+1=5.$$

$$(2) f[f(x)]=\begin{cases}\sqrt{1-f^2(x)},|f(x)|<1;\\f^2(x)+1,|f(x)|\geqslant 1.\end{cases}$$

因为当 $0<|x|<1$ 时，$|f(x)|=\sqrt{1-x^2}<1$. 故 $f[f(x)]=\sqrt{1-f^2(x)}=\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}=\sqrt{x^2}=|x|$.

当 $x=0$ 时，$|f(0)|=\sqrt{1-0^2}=1$，故

$$f[f(0)]=f^2(0)+1=1^2+1=2.$$

当 $|x|\geqslant 1$ 时，$|f(x)|=|x^2+1|>1$，故

$$f[f(x)] = f^2(x) + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2.$$

综上所述，得

$$f[f(x)] = \begin{cases} -x, & -1 < x < 0; \\ 2, & x = 0; \\ x, & 0 < x < 1; \\ x^4 + 2x^2 + 2, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

1.1.4 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, |x| < 1, \\ 0, |x| = 1, \\ -1, |x| > 1; \end{cases} \quad g(x) = e^x,$$

求 $f[g(x)$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解 $$f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1; \\ 0, & |e^x| = 1; \\ -1, & |e^x| > 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, x < 0; \\ 0, x = 0; \\ -1\ x > 0. \end{cases} \quad \text{(见图 1-1)}$$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1 = e, |x| < 1, \\ e^0 = 1, |x| = 1, \\ e^{-1}, \quad |x| > 1. \end{cases} \quad \text{(见图 1-2)}$$

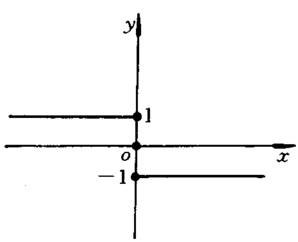


图 1-1

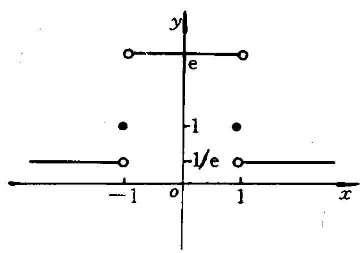


图 1-2

1.1.5　已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$ 的表达式.

分析　函数符号 f 是表示函数关系中的对应法则，$f\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 表示该法则作用在变量 $x+\frac{1}{x}$ 上，$f(x)$ 表示此法则作用在变量 x 上，本题是要求这个函数的特定法则. 解答这类问题，往往采用代换和拼凑两种方法.

解　$\because$　$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，

$\therefore$　$f(x)=x^2-2$.

1.1.6　已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$，求 $f(x)$.

解法 1　令 $\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$，代入所给函数，有

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1+\sqrt{t^2+1}}{t}.$$

由于函数关系与自变量用什么字母表示无关，故

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

解法 2　$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$，故

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

1.1.7　设 $f(x)$ 满足条件 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$（$a$ 为常数），且 $f(0)=0$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　将 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$ 中的 x 换成 $\frac{1}{x}$，得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=ax$$

由上两式消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 得

$$f(x)=\frac{a(2-x^2)}{3x}\quad (x\neq 0),f(0)=0.$$

1.1.8 设单值函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f^2(\ln x)+2xf(\ln x)+x^2\ln x=0\quad (0<x<\mathrm{e}),$$

且 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

解 将 $f^2(\ln x)+2xf(\ln x)+x^2\ln x=0$ 看成 $f(\ln x)$ 的一元二次方程，解得

$$f(\ln x)=x\left(1\pm\sqrt{1-\ln x}\right)=\mathrm{e}^{\ln x}\left(1\pm\sqrt{1-\ln x}\right),$$

故 $f(x)=\mathrm{e}^x\left(1\pm\sqrt{1-x}\right)$，由 $f(0)=0$，得

$$f(x)=\mathrm{e}^x(1-\sqrt{1-x}).$$

1.1.9 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$ 且 $y=1/z=x$，求 $f(x)$ 及 z 的解析表达式.

解 将 $y=1,z=x$ 代入 z 的表达式，得

$$x=1+f\left(\sqrt[3]{x}-1\right),x-1=f\left(\sqrt[3]{x}-1\right).$$

令 $\sqrt[3]{x}-1=t$，即 $x=(t+1)^3$，则上式成为

$$f(t)=(t+1)^3-1=t^3+3t^2+3t,$$

故 $$f(x)=x^3+3x^2+3x,\text{从而}$$

$$z=\sqrt{y}+(x-1).$$

1.1.10 判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$；

(2) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{(1-2x)^2}$；

(4) $f(x)=\sin x-\cos x+1$.

分析 判断函数的奇偶性常用定义：若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数. 无论是偶函数还是奇函数，它们的定义域都是关于原点的对称区间.

解 (1)$f(-x)=\log_a\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$$=\log_a \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\log_a \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$

故该函数为奇函数.

$$(2)f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e^x}{1+e^x}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$=-\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}=f(x),$$

故所给函数为偶函数.

$$(3)f(-x)=\sqrt[3]{(1-2x)^2}-\sqrt[3]{(1+2x)^2}$$

$$=-\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{(1-2x)^2}\right)=-f(x),$$

故所给函数为奇函数.

(4)$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq\pm f(x)$,所以此函数是非奇非偶函数.

1.1.11 试证:定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数之和,且表示法是唯一的.

证 令$F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$. 因为$F(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=F(x)$,故$F(x)$为偶函数. 同理可证$G(-x)=-G(x)$,即$G(x)$为奇函数,而

$$F(x)+G(x)=f(x),$$

故$f(x)$可表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

设有偶函数$\varphi(x)$和奇函数$\Psi(x)$,使得

$$f(x)=\varphi(x)+\Psi(x),$$

从而有 $$f(-x)=\varphi(-x)+\Psi(-x)=\varphi(x)-\Psi(x).$$

由以上两式即得

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=F(x);$$

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=G(x).$$

这就证明了表示法是唯一的.

1.1.12　下列两函数中哪个是周期函数，对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=x\cos x$;　　　(2) $y=\sin^2 x$.

分析　判断一个函数的周期性一般有两个方法：一是用反证法，利用定义证明周期的不存在性；另一个是将其恒等变形为周期函数的和、差、积、商.

解　(1) 用反证法. 设 $y=x\cos x$ 的周期为 $T>0$，则有

$$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x.$$

令 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{2}$，有

$$\begin{cases}T\cos T=0;\\ \left(T+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{T+\pi}{2}\right)=0,\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}\cos T=0;\\ \sin T=0.\end{cases}$$

显然这样的 T 是不存在的，故 $y=x\cos x$ 不是周期函数.

(2) 用恒等变形法，因为

$$y=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x,$$

又 $\frac{1}{2}\cos 2x$ 是周期为 π 的周期函数，而常数 $\frac{1}{2}$ 也可以看作是周期为 π 的周期函数. 因此它们的差即 $y=\sin^2 x$ 是周期为 π 的周期函数.

1.1.13　若函数 $f(x)$ 在定义域内满足 $f(x)=f(2a-x)$，则称 $f(x)$ 对称于直线 $x=a$. 试证：当函数 $f(x)$ 对称于直线 $x=a$ 及 $x=b(a<b)$ 时，$f(x)$ 必为周期函数.

证　因为 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b$，故有

$$f(x)=f(2a-x),f(x)=f(2b-x).$$

由第二式知

$$f(2a-x)=f[2b-(2a-x)]=f(2b-2a+x).$$

再注意到第一式，有

$$f(x+(2b-2a))=f(x).$$

这就证明了 $f(x)$ 是以 $(2b-2a)>0$ 为周期的周期函数.

1.1.14　求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$，又问 a、b、c、d 满足什么条件时，这反函数与直接函数相同？

(3) $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<-1;\\ -x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ \ln(x+1), & 0<x\leqslant \mathrm{e}.\end{cases}$

分析　求 $y=f(x)$ 的反函数，先由 $y=f(x)$ 解出 $x=\varphi(y)$，再按习惯自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，得反函数 $y=\varphi(x)$.

解　(1) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，所以反函数为

$$y=\frac{1-x}{1+x}.$$

(2) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$，所以反函数为

$$y=\frac{-dx+b}{cx-a}.$$

欲使反函数与直接函数相同，只需

$$\frac{-dx+b}{cx-a}\equiv\frac{ax+b}{cx+d},$$

去分母化简得 $(a+d)[cx^2+(d-a)\cdot x-b]\equiv 0$，所以这时的条件是

$$a+d=0 \text{ 或 } b=c=0 \text{ 而 } a=d\neq 0.$$

(3) 当 $-\infty<x<-1$ 时，由 $y=x$ 解得

$x=y(-\infty<y<-1)$；当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，由 $y=-x^2$ 解