蔡大用 编

4.

数值分析与实验学习指导

TUP
清华大学出版社

Springer
施普林格出版社

数值分析与实验学习辅导

蔡大用　编

清华大学出版社　施普林格出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书是为学习“数值分析(或称计算方法)”课程的各类人员编写的辅导用书。按现在流行的教课书的章节来编排内容。在每章中包括本章的主要内容简介,以备练习或复习时查阅。然后分两个层次给出一定数量的例题和习题,相应地还设计了一些实习题。其中,第一个层次是基本要求,大致相当于对一般大学生的要求;第二个层次是为研究生及要求较高的读者准备的。对于例题,作者尽可能给出多种解法,而对于习题和实习题,作者并不给出标准答案,只是必要时给一点提示,目的在于给读者提供一个施展自己才华的空间。最后,给出了 15 个综合型案例供有兴趣的读者进一步研究时选用。

读者对象为理工类大学高年级学生和研究生,也可供科技人员参考。

书　名:数值分析与实验学习辅导
作　者:蔡大用　编
出版者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)
　　　　http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者:北京顺义振华印刷厂
发行者:新华书店总店北京发行所
开　本:850×1168 1/32　**印张**:5.25　**字数**:132 千字
版　次:2001 年 9 月第 1 版　2001 年 9 月第 1 次印刷
书　号:ISBN 7-302-04749-9/O·267
印　数:0001～5000
定　价:10.00 元

前　言

近年来，随着计算机的广泛应用和各个学科的量化需求不断提高。越来越多的人士希望学习数值分析(原称计算方法)课程。这些人中包括各专业大学生、研究生甚至已经工作多年的工程技术人员。学习的人员水平不同，需求各异，但是他们有一个共同的困惑：学的时候感到内容繁杂、公式太多，考试时心里没底，甚至无法通过。为了帮助学习者克服所面临的困难，我们尝试着编撰此书，作为大家学习时的一根拐杖。

内容安排上我们还是按照现在流行的教科书的章节。第一部分的每一章首先列出本章的重点和主要内容，以备练习时查阅。然后分两个层次给出一定数量的练习题。第一个层次是基本要求，大概相当于对一般大学生的要求；第二个层次的题目为研究生或要求较高的人准备的。作者对每个类型题目有选择地分析几个供读者参考，但决不意味着我们的分析方法是最好的。在此之后，我们推荐一些“实验性”练习。其目的不是应付考试，而是强化已经学到知识，逐步完成从学到用的过程。所有的“实验性”练习都需要借助软件 Matlab 完成。在本书的第二部分，我们给出几个综合性题目，他们可能涉及前面几个章节的材料，甚至超出教材的内容，供有兴趣的读者选用。

我们赞成“少而精”，不希望使用题海战术。因此读者没有必要逐一地完成所列出的练习题，只要精心地完成少许几个足矣。此外，我们不准备写出也没有给出“标准答案”，那样也许会限制甚至误导读者的思维，甚至纵容一些懒人。只是必要时给出某些习题的提示。当然，这样做自然增加了一些难度，但是“书山万仞勤

为路，学海无涯苦作舟"，不付出足够的勤奋是不可能有收获的！

选择练习题时参考的教材有：

[1] Steven C Chapra, Raymond P Canale. Numerical Methods for Engineers. McGraw-Hill, 1998

[2] 李庆阳，关治，白峰杉．数值计算原理．北京：清华大学出版社，2000

[3] 关治，陆金甫．数值分析基础．北京：高等教育出版社，1998

[4] 施妙根，顾丽珍．科学和工程计算基础．北京：清华大学出版社，2000

有些习题经过了作者的改编。有些习题（特别是实习题和综合练习）是作者教学过程中学生们提供的。因此，难免有考虑不周甚至出现某些错误。恳请读者和同行批评指正。

本书编写过程中得到我的同事陆金甫、陆小援很多很好的建议，在此表示作者诚挚的谢意。如果没有清华出版社的刘颖同志的鞭策和鼓励本书也很难付梓，在此一并致谢。

作者　于清华园

2001/6/1

数值分析与实验学习指导

本书是为学习“数值分析（或称计算方法）”课程的各类人员编写的辅导用书。按现在流行的教科书的章节来编排内容。在每章中包括本章中的主要内容简介，以备练习或复习时查阅。然后分两个层次给出一定数量的例题和习题，相应地还设计了一些实习题。其中，第一个层次是基本要求，大致相当于对一般大学生的要求；第二个层次是为研究生及要求较高的读者准备的。对于例题，作者尽可能给出多种解法，而对于习题和实习题，作者并不给出标准答案，只是必要时给一点提示，目的在于给读者提供一个展示自己才华的空间。最后，给出了15个综合型案例供有兴趣的读者进一步研究时选用。

读者对象为理工科大学高年纪学生和研究生，也可供科技人员参考。

ISBN 7-302-04749-9

9 787302 047490

定价：10.00元

目　　录

第 1 章　方程和方程组的迭代法

第 1 部分　基本内容及要求

1.1　主要结果回顾

对含一个未知数的非线性方程 $f(x)=0$ 建立迭代法。判断给定迭代法的收敛性和收敛速度．深入理解牛顿(Newton)法及其简化形式．

主要概念

定义 1.1　对于方程 $f(x)=0$ 通过某种方法建立了迭代法

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)\qquad k=0,1,2,\cdots.\tag{1.1.1}$$

如果 x^* 满足 $x^*=\varphi(x^*)$，则有 $f(x^*)=0$. 这时称所建立的迭代法是**相容的**．满足 $x^*=\varphi(x^*)$ 的 x^* 称为 $\varphi(x)$ 的**不动点**．

定义 1.2　对于迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,2,\cdots$. 如果存在 $x_0\neq x^*$ 使得极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_k)$ 存在，则称该迭代法是**收敛的**．如果存在 $\varepsilon>0$，对于 $|x_0-x^*|<\varepsilon$ 中所有的 x_0 迭代法是收敛的，则称该迭代法是**局部收敛的**．如果对于 $\mathbf{R}$ 中所有的 x_0 迭代法是收敛的，则称该迭代法是**全局收敛的**．使得迭代法收敛的全体 $x_0\in\mathbf{R}$ 称为**收敛域**．

定义 1.3　对于收敛的迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,2,\cdots$. 如果存在常数 $p\geqslant 1,c>0$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p}=c \tag{1.1.2}$$

成立，其中 $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$，则称该迭代法是 **$p$ 阶收敛的**．当 $p=1$ $(c<1)$ 时称迭代法是**线性收敛的**．当 $1<p<2$ 时称迭代法是**超线性收敛的**．当 $p=2$ 时称迭代法是**二次收敛的**．

主要算法和定理

定理 1.1 对于迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,2,\cdots$. 如果：

(i) 在 $[a,b]$ 区间上的任何 x 都有 $a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$；

(ii) 在 $[a,b]$ 区间上 $\varphi(x)$ 满足利普希茨(Lipschitz)条件，即

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant L|x-y|，\text{而且 } L<1. \tag{1.1.3}$$

则有：

a) 在 $[a,b]$ 上有惟一的 α，满足 $\alpha=\varphi(\alpha)$.

b) 对于所有的 $x_0\in[a,b]$ 迭代法是收敛的．

c) 不等式 $|x_k-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$ 成立．

说明 (1) 定理中的条件(ii) 可以更改为"在 $[a,b]$ 区间上 $\varphi(x)$ 满足 $|\varphi'(x)|\leqslant L<1$.

(2) 定理的条件是充分的但不是必要的．

(3) 结论 c) 说明尽管很难事先知道常数 L，但是相邻两次迭代的值越靠近，迭代值越接近精确解．所以可以利用相邻两次迭代的值差的绝对值作为判断迭代终止的条件．

定理 1.2 对于迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,2,\cdots$. 如果：

(i) 存在 $\alpha\in\mathbf{R}$ 满足 $\alpha=\varphi(\alpha)$；

(ii) 而且 $|\varphi'(\alpha)|=L<1$.

则迭代法是局部收敛的，其收敛阶至少是 1.

说明 定理中条件(ii) 的 $|\varphi'(x)|=L<1$ 也是充分条件．例

如：$\varphi(x) = x - x^3$，显然有 $0 = \varphi(0)$，而且 $\varphi'(0) = 1$；计算表明当 $|x| < 0.1$ 是迭代法收敛到 $x^* = 0$.

定理 1.3 对于迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0,1,2,\cdots$. 如果：

(i) 存在 $\alpha \in \mathbf{R}$ 满足 $\alpha = \varphi(\alpha)$；

(ii) 而且存在 p 使得 $\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \cdots = \varphi^{(p)}(\alpha) = 0$, $\varphi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$.

则迭代法是局部收敛的，其收敛阶是 p.

二分法 假设 $f(x)$ 在 $[a_0, b_0]$ 上连续，而且 $f(a_0)f(b_0) < 0$，要求解方程 $f(x) = 0$. 由连续函数性质可知在该区间内 $f(x) = 0$ 至少有一个根. 取 $c = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$（把区间二等分），计算 $f(c)$. 如果 $f(c)f(b_0) < 0$，则取 $[a_1, b_1] = [c, b_0]$，否则取 $[a_1, b_1] = [a_0, c]$. 于是区间长度缩小了一半. 继续这个过程直到区间足够小，就可以把最后区间的中点作为方程的近似解. 此法称为**二分法**.

牛顿法 计算公式为

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k) \qquad k = 0,1,2,\cdots. \tag{1.1.4}$$

定理 1.4 设所要求解的方程为 $f(x) = 0$，且此方程有根 x^*. 如果 $f'(x^*) \neq 0$，而且 $f''(x^*)$ 在 x^* 的某个邻域上连续，则牛顿法是局部收敛的，并且至少是二阶收敛的.

简化牛顿法 计算公式为

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_0) \qquad k = 0,1,2,\cdots. \tag{1.1.5}$$

计算重根的牛顿法 计算公式为

$$x_{k+1} = x_k - mf(x_k)/f'(x_0) \qquad k = 0,1,2,\cdots. \tag{1.1.6}$$

其中 m 为根的估计重数.

斯蒂芬森(Steffensen)加速 如果利用某种迭代法 $x_{k+1} =$

$\varphi(x_k)$ 得到 $x_k, y_k = \varphi(x_k), z_k = \varphi(y_k)$，斯蒂芬森加速公式是

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}. \tag{1.1.7}$$

注 求解方程 $f(x) = 0$ 更一般的迭代法是 $\phi(x_{k+1}) = \varphi(x_k)$，只要方程 $\phi(x) = c$ 非常容易求解就可以用于计算.

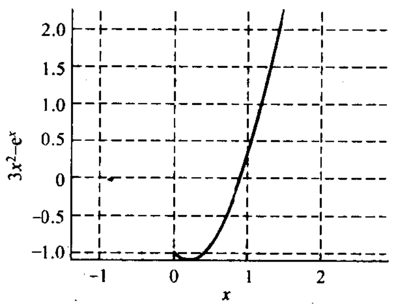
1.2 例题分析

例 1.1 求出

$$3x^2 - e^x = 0 \tag{1.2.1}$$

的根.

解 首先，利用 Matlab 的绘图功能估计出方程根的大概位置. 我们画一张 $f(x) = 3x^2 - e^x$ 的草图如下：



可以看出此方程在 $x \approx 1^-$ 时有一个根. 不妨在[0.5,1.0]区间里找方程的根 x^*.

其次，我们建立迭代法：

a) 把 $3x^2 - e^x = 0$ 的左端第二项移到右端并除以 3，然后两端开方得到

$$x_{k+1} = \varphi_1(x_k) = \sqrt{\frac{e^{x_k}}{3}}, \qquad k = 0,1,2,\cdots. \tag{1.2.2}$$

b) 把 $3x^2 - e^x = 0$ 的左端第二项移到右端，两端取对数得到

$$x_{k-1} = \varphi_2(x_k) = 2\ln x_k + \ln 3, \qquad k = 0,1,2,\cdots. \tag{1.2.3}$$

c) 利用(1.1.4) 写出牛顿迭代公式

$$x_{k+1} = \varphi_3(x_k) = x_k - \frac{3x_k^2 - e^{x_k}}{6x_k - e^{x_k}}, \qquad k = 0,1,2,\cdots. \tag{1.2.4}$$

下面分析三种迭代法在指定区间[0.5,1.0] 上的收敛性.

a) $\varphi'_1(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{e^x}{3}}$. 在指定区间上 $0 < \varphi_1'(x) < 1$,所以 $\varphi_1(x)$ 是单调增函数. 直接验证得到 $\varphi_1(0.5) \approx 0.74$, $\varphi_1(1.0) \approx 0.95$,在[0.5,1.0] 区间上的任何 x 都有 $0.5 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant 1.0$. 又根据微分中值定理可知

$$|\varphi_1(x) - \varphi_1(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

于是迭代法(1.2.2) 满足定理 1.1 的所有条件,因此,对于任何 $x_0 \in [0.5,1.0]$ 该迭代法是收敛的,而且收敛的阶数为 1.

b) 对于(1.2.3),在指定区间上有 $\varphi_2'(x) = \dfrac{2}{x} \geqslant 2$,所以不能利用定理 1.1 和定理 1.2 判别他的收敛性. 但是因为上述定理是充分条件,我们还不能立刻做出不收敛的结论. 如果 $x_k \neq x^*$,则

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x^*| &= |\varphi_2(x_k) - \varphi(x^*)| \\ &= |\varphi'(\xi)(x_k - x^*)| \geqslant 2|x_k - x^*|. \end{aligned}$$

由此可知除 $x_0 = x^*$ 外(1.2.2) 确实发散.

c) 因为(1.2.4) 是牛顿法,按照定理 1.4 它一定是局部收敛的. 利用 Matlab 我们可以得到当 $x \in [0.6,1.0]$ 时 $|\varphi_3'(x)| < 1$. 于是我们可以说当 $x_0 \in [0.6,1.0]$ 时牛顿法收敛.

最后我们数值计算一下上面的三种算法. 取 $x_0 = 0.75$,计算

结果如下：

表 1.1　三种迭代法的计算结果

迭代方法 \ 次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	0.8400	0.8787	0.8959	0.9036	0.9071	0.9087	0.9094	0.9097	0.9099	0.9100
b	0.5232	−0.1968	* * *	* * *	* * *	* * *	* * *	* * *	* * *	* * *
c	0.9302	0.9102	0.9100	0.9100	0.9100	0.9100	0.9100	0.9100	0.9100	0.9100

注：* * * 代表计算过程发散。

精确到小数点后面四位．方程(1.2.1)的根 $x^* = 0.9100$. 上面的计算结果表明迭代法 b) 计算两次出现负数，以至于无法继续下去．算法 a) 和 c) 均收敛，而且牛顿法收敛快得多．

例 1.2　确定常数 p,q,r 使得迭代法

$$x_{k+1} = px_k + q\frac{a}{x_k^2} + r\frac{a^2}{x_k^5} \qquad k = 0,1,2,\cdots. \tag{1.2.5}$$

局部收敛到 $x^* = \sqrt[3]{a}\,(a > 0)$，并有尽可能高的收敛阶数．这时阶数是多少？找出迭代法的收敛域．

解　为了使迭代法是相容的，我们把 $\sqrt[3]{a}$ 代入(1.2.5) 得到

$$\sqrt[3]{a} = p\sqrt[3]{a} + q\frac{a}{(\sqrt[3]{a})^2} + r\frac{a^2}{(\sqrt[3]{a})^5}. \tag{1.2.6}$$

消去 $\sqrt[3]{a}$，得到

$$p + q + r = 1. \tag{1.2.6$'$}$$

取 $\varphi(x) = px + q\dfrac{a}{x^2} + r\dfrac{a^2}{x^5}$，并令 $\varphi'(x^*) = 0$(见定理 1.3)

得到

$$p - 2q + 5r = 0, \tag{1.2.7}$$

再令 $\varphi''(x^*) = 0$，又有

$$q + 5r = 0. \tag{1.2.8}$$

解出联立方程(1.2.6)$'$，(1.2.7)，(1.2.8) 可知

$$p = q = 5/9, r = -1/9.$$

根据定理 1.3 这时迭代阶至少是 3 阶的. 可以直接验证 $\varphi'''(x^*) \neq 0$,所以迭代法就是 3 阶收敛的.

把 p,q,r 取为上面计算得到的值. 为了找出保证迭代法收敛的初始值的区间,我们计算 $\varphi'(x) = \frac{5}{9}\left(1-\frac{a}{x^3}\right)^2$,按照定理 1.1,我们先找出使得 $|\varphi'(x)| = \left|\frac{5}{9}\left(1-\frac{a}{x^3}\right)^2\right| < 1$ 成立的那些 x_0,容易得到

$$x_0 > \alpha x^*,\text{其中 } \alpha = \left(1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{-1/3} \approx 0.7531. \quad (1.2.9)$$

不妨假设 $a > 0$,记 $R^* = \{x \mid \alpha x^* < x_0 < \infty\}$. 因为在 R^* 中 $\varphi'(x) \geqslant 0$,所以 $\varphi(x)$ 是单调非降函数. 直接验证得到 $\varphi(\alpha x^*) = 1.788\alpha x^* > \alpha x^*$. 至此对所有 $x_0 \in R^*$ 都有 $\varphi(x_0) \in R^*$,且满足定理 1.1 的条件. 因此,他们都使得迭代法(1.2.5) 收敛. 特别,当 $x_0 = \alpha x^*$ 时,$x_1 = \varphi(x_0)$ 就满足(1.2.9),继续下去的迭代当然收敛.

最终我们可以说 $\alpha x^* \leqslant x_0 < \infty$ 是(1.2.5) 的收敛域.

例 1.3 给定方程

$$f(x) = x^{1+\alpha} - x = 0, (0 < \alpha < 1). \quad (1.2.10)$$

他显然有两个根 $x_1^* = 0, x_2^* = 1$. 求出用牛顿法解这个方程时收敛的阶.

解 对于(1.2.10) 的牛顿迭代公式是

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{x_k^{1+\alpha} - x_k}{(1+\alpha)x_k^\alpha - 1} = \frac{\alpha x_k^{1+\alpha}}{(1+\alpha)x_k^{1+\alpha} - 1}. \quad (1.2.11)$$

注意 $f'(x) = (1+\alpha)x^\alpha - 1, f''(x) = (1+\alpha)\alpha x^{\alpha-1}$.

当 $x_2^* = 1$ 时,$f'(x_2^*) = \alpha \neq 0, f''(x_2^*)$ 存在,根据定理 1.4

他至少是二阶收敛的．再计算一下得到 $\varphi''(x_2^*) = (1+\alpha)/\alpha^3 \neq 0$，根据定理 1.3 他一定是二阶收敛的．

当 $x_1^* = 0$ 时，$f''(0)$ 不存在．所以不能利用定理 1.4，只能用定义 1.3 求出收敛的阶．这时

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p} = \lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|^p} = \lim_{x\to 0}\left|\frac{\alpha x^{1+\alpha-p}}{(1+\alpha)x^{1+\alpha}-1}\right|, \tag{1.2.12}$$

不难看出，当而只当 $p = 1+\alpha$ 时上面的极限为 $\alpha \neq 0$. 所以这时牛顿迭代法的收敛阶是 $1+\alpha$.

例 1.4 利用牛顿法计算 $\sqrt{a}(a>0)$ 相当于解方程 $x^2 - a = 0$. 证明对于任意的 $x_0 > 0(<0)$ 迭代永远收敛到 $\sqrt{a}(-\sqrt{a})$.

解法 1 容易得到这时的牛顿迭代公式是

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) \qquad k = 0,1,2,\cdots. \tag{1.2.13}$$

从而有

$$x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_k}(x_k^2 - 2x_k\sqrt{a} + a) = \frac{1}{2x_k}(x_k - \sqrt{a})^2. \tag{1.2.14}$$

由这个结果可以得知，对于所有的 $x_0 > 0$ 都有 $x_k > \sqrt{a}(k = 1, 2,\cdots,1)$. 另外，我们有

$$x_k - x_{k+1} = \frac{1}{2x_k}(x_k^2 - a) > 0. \tag{1.2.15}$$

因此，牛顿迭代产生一个单调下降有下界的序列，该序列必有极限．把(1.2.13)两端取极限就证明了本定理．(关于 $x_0 < 0$ 的情形完全类似)

解法 2 我们引进变量变换

$$w = \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}, \tag{1.2.16}$$