数学分析习题集

题解

上海交通大学应用数学系

本解答系根据李荣涑译 Б.П. 吉米多维奇著“数学分析习题集”（修订本）而作。第六册包括第四章的习题。

目　录

第四章　定积分

第四章 定 积 分

§1. 定积分作为和的极限

1°. 黎曼积分的意义 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，则数

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (1)$$

（式中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$ 及 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$）称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**积分**。

极限（1）存在的必要而且充分的条件为：积分下和

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i$$

及积分上和

$$\overline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i$$

当 $|\Delta x_i|\to 0$ 时有共同的极限，其中

$$m_i=\inf_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} f(x) \text{ 及 } M_i=\sup_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} f(x)。$$

若等式(1)右端的极限存在，则函数 $f(x)$ 称为在对应的区间上**可积分**（常义的）。特殊情形：(a) 连续函数，(б) 具有有穷个不连续点的有界函数，(в) 单调有界的函数，——在任意的有穷闭区间上为可积分的。

2°. 可积分的条件

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0,$$

式中 ω_i 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅，上等式成

立为函数 $f(x)$ 于已知闭区间 $[a,b]$ 上可积分的充要条件。

2181. 把区间 $[-1,4]$ 分为 n 个相等的子区间，并取这些子区间中点的坐标作自变量 ξ_i 的值（$i=0,1,\cdots,n-1$）。求函数 $f(x)=1+x$ 在此区间上的积分和 S_n。

解：子区间的长为 $\Delta x_i=\dfrac{5}{n}$，

$$x_i=-1+\frac{5i}{n}\qquad(i=0,1,\cdots,n-1)。$$

$$\xi_i=\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1})=-1+\frac{5(2i+1)}{2n}。$$

故
$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{5(2i+1)}{2n}\cdot\frac{5}{n}$$

$$=\frac{25}{2n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)=\frac{25}{2}。$$

2182. 对于已知函数 $f(x)$，把所论区间等分为 n 份，求在该区间上的下和 $\underline{S}_n$ 和上和 $\overline{S}_n$，如果

（a）$f(x)=x^3\quad[-2\leqslant x\leqslant 3]$；

（б）$f(x)=\sqrt{x}\quad[0\leqslant x\leqslant 1]$；

（в）$f(x)=2^x\quad[0\leqslant x\leqslant 10]$。

解：（a）$f(x)=x^3$。当 $-2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)$ 单调增。

$$\Delta x_i=\frac{5}{n},\quad m_i=\left[-2+\frac{5(i-1)}{n}\right]^3,$$

$$M_i=\left(-2+\frac{5i}{n}\right)^3\quad(i=1,\cdots,n)。$$

故 $$\underline{S}_n=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=\frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[-2+\frac{5(i-1)}{n}\right]^3$$

$$=\frac{5}{n}\left[-8n+60\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}-150\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^2}+\right.$$

$$\left.+125\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^3}{n^3}\right]$$

$$=\frac{5}{n}\left[-8n+\frac{60}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}-\frac{150}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right.$$

$$\left.+\frac{125}{n^3}\cdot\frac{(n-1)^2n^2}{4}\right]$$

$$=\frac{5}{n}\left[\frac{13n}{4}-\frac{35}{2}+\frac{25}{4n}\right]=\frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}。$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-2+\frac{5i}{n}\right)^3$$

$$=\frac{5}{n}\left[-8n+60\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}-150\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}+125\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^3}\right]$$

$$=\frac{5}{n}\left[-8n+\frac{60}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{150}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right.$$

$$\left.+\frac{125}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$=\frac{5}{n}\left[\frac{13n}{4}+\frac{35}{2}+\frac{25}{4n}\right]=\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}。$$

(б) $f(x)=\sqrt{x}$。当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 单调增。

$$\Delta x_i=\frac{1}{n},\ m_i=\sqrt{\frac{i-1}{n}},\ M_i=\sqrt{\frac{i}{n}}\ (i=1,\cdots,n)。$$

故 $$\underline{S_n}=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}。$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}。$$

(в) $f(x)=2^x$。当 $0\leqslant x\leqslant 10$ 时，$f(x)$ 单调增。

$$\Delta x_i=\frac{10}{n},\ m_i=2^{\frac{10(i-1)}{n}},\ M_i=2^{\frac{10i}{n}}\ (i=1,\cdots,n)。$$

故 $\underline{S}_n=\frac{10}{n}\left[2^0+2^{\frac{10}{n}}+2^{\frac{20}{n}}+\cdots+2^{\frac{10(n-1)}{n}}\right]=\frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}$。

$$\overline{S}_n=\frac{10}{n}\left[2^{\frac{10}{n}}+2^{\frac{20}{n}}+\cdots+2^{\frac{10n}{n}}\right]=\frac{10230\cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}。$$

2183. 分闭区间$[1,2]$为n份，使这n份的长构成一等比级数，以求函数$f(x)=x^4$在$[1,2]$上的积分下和。当$n\to\infty$时此和的极限等于什么？

解： 设区间$[1,2]$上的各分点为1，q，q^2，…，$q^n=2$，则$q=2^{\frac{1}{n}}$，第i个区间的长为$\Delta x_i=q^{i+1}-q^i=q^i(q-1)$。

$$\underline{S}_n=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}q^{4i}\cdot q^i(q-1)$$

$$=(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}q^{5i}=\frac{(q-1)(q^{5n}-1)}{q^5-1}$$

$$=\frac{(2^{\frac{1}{n}}-1)(2^5-1)}{2^{\frac{5}{n}}-1}=\frac{31(2^{\frac{1}{n}}-1)}{2^{\frac{5}{n}}-1}。$$

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}_n=31\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{5}{n}}-1}$$

$$=31\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\frac{\frac{5}{n}}{2^{\frac{5}{n}}-1}$$

$$=31\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{5\ln 2}=\frac{31}{5}。$$

2184. 从积分的定义出发，求

$$\int_0^T(v_0+gt)dt,$$

其中v_0及g为常数。

解： $\int_0^T (v_0+gt)dt=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(v_0+gt_i)\Delta t_i$。

取 $\Delta t_i=\frac{T}{n}$， $t_i=\frac{iT}{n}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$，则

$$\int_0^T (v_0+gt)dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(v_0+\frac{giT}{n}\right)\frac{T}{n}$$

$$=v_0T+gT^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i$$

$$=v_0T+gT^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=v_0T+\frac{1}{2}gT^2。$$

以适当的方法进行积分区间的分段，把积分看作是对应的积分和的极限，来计算定积分（2185—2191题）：

2185. $\int_{-1}^2 x^2dx$。

解：$\int_{-1}^2 x^2dx=\lim\limits_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\xi_i^2\Delta x_i$，

其中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$， $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$。

取 $\Delta x_i=\frac{3}{n}$， $\xi_i=x_i=-1+\frac{3i}{n}$，则

$$\int_{-1}^2 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[-1+\frac{3i}{n}\right]^2\cdot\frac{3}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[1-\frac{6i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}\right]\cdot\frac{3}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}3\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}1-\frac{6}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{9}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}i^2\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty} 3\left[1-\frac{6}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{9(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\right]$$

$=3$。

2186. $\int_0^1 a^x dx \quad (a>0)$。

解： $\int_0^1 a^x dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} a^{\xi_i}\Delta x_i$。

取$\Delta x_i=\frac{1}{n}$， $\xi_i=x_i=\frac{i}{n}$， 则

$$\int_0^1 a^x dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} a^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\quad\frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}}-1}$$

$$=(a-1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$$

$$=(a-1)\cdot\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}}\quad\left(\text{其中 } h=\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{a-1}{\ln a}\quad (a\neq 1)。$$

当 $a=1$ 时， $\int_0^1 a^x dx=\int_0^1 dx=1$。

2187. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$。

解： $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}$。

由1025题，$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$。

故 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\frac{\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot 2=1。$$

2188. $\int_0^x \cos t\,dt$。

解: $$\int_0^x \cos t\,dt=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\frac{ix}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{(n-1)x}{2n}}{\sin\frac{x}{2n}}$$

$$=\sin\frac{x}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\cos\frac{(n-1)x}{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{2n}}$$

$$=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot 2=\sin x。$$

2189. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ $(0<a<b)$。

提示 令 $\xi_i=\sqrt{x_i x_{i+1}}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$。

解: $$\int_a^b \frac{dx}{x^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\xi_i^2}\Delta x_i,\qquad x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}。$$

取 $\xi_i=\sqrt{x_i x_{i+1}}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$，则

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{x_i x_{i+1}}(x_{i+1}-x_i)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}。$$

2190. $\int_a^b x^m dx$ $(0<a<b;\ m\neq -1)$。

提示 选择诸分点，使它们的横坐标构成一等比数列。

解：将区间 $[a,b]$ 分为 n 份，使各子区间的长构成等比数列。设各分点为 $a,aq,aq^2,\cdots,\ aq^n=b$，则

$$q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},\quad \Delta x_i=aq^i(q-1)。$$

$$\int_a^b x^m dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^m aq^i(q-1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}a^{m+1}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}q^{(m+1)i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}a^{m+1}(q-1)\frac{q^{(m+1)n}-1}{q^{m+1}-1}\qquad(m\neq -1)$$

$$=a^{m+1}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1\right]\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}-1}$$

$$=(b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}-1}$$

$$=(b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\ln\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{(m+1)\ln\frac{b}{a}}=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}。$$

2191. $\int_a^b \frac{dx}{x}\quad (0<a<b)$。

解： 与上题同样分法得

$$\int_a^b \frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\Delta x_i}{x_i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{aq^i(q-1)}{aq^i}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n(q-1)=\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln\frac{b}{a}。$$

2192. 计算布阿桑积分

$$\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx$$

当：(a) $|\alpha|<1$； (б) $|\alpha|>1$。

提示 分解多项式 $\alpha^{2n}-1$ 为二次因式。

解： $I=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)$，

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)。$$

故 $$I=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)+\right.$$

$$\left.+\ln\left(1-2\alpha\cos\frac{i-1}{n}\pi+\alpha^2\right)\right]。$$

$\alpha^{2n}-1=0$ 的根为 $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}, \omega^n, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \cdots,$ $\omega^{-(n-1)}$，其中 $\omega=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$，则

$$\alpha^{2n}-1=(\alpha-1)(\alpha-\omega)\cdots(\alpha-\omega^{n-1})\cdot$$
$$(\alpha-\omega^n)(\alpha-\omega^{-1})\cdots(\alpha-\omega^{(n-1)})$$

$$=(\alpha-1)(\alpha+1)\left(\alpha^2-2\alpha\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\cdot$$

$$\left(\alpha^2-2\alpha\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)$$

$$\cdots\left(\alpha^2-2\alpha\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right)。$$

$$I=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln(\alpha-1)^2(\alpha+1)^2\left(\alpha^2-2\alpha\cos\frac{\pi}{n}+1\right)^2\cdots$$

$$\left(\alpha^2-2\alpha\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln(\alpha^{2n}-1)^2。$$

(a) 设$|\alpha|<1$，则 $I=\pi\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(1-\alpha^{2n})$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{-\alpha^{2n}\ln\alpha^2}{1-\alpha^{2n}}=0。$$

(б) 设$|\alpha|>1$，则 $I=\pi\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\alpha^{2n}-1)}{n}$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n}\ln\alpha^2}{\alpha^{2n}-1}=\pi\ln\alpha^2。$$

2193. 设函数 $f(x)$及 $\varphi(x)$在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

其中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$，$x_i\leqslant\theta_i\leqslant x_{i+1}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 及 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ $(x_0=a,\ x_n=b)$。

证： 事实上，只需假设 $f(x)$及 $\varphi(x)$在$[a,b]$上可积，即假设当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$|f(x)|<M$，又设 $\varphi(x)$在区间$[x_i,x_{i+1}]$上的振幅为 ω_i，则

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)]\Delta x_i\right| < M\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i。$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的可积性，可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i-\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i\right]=0。\quad(1)$$

更由 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的可积性可知 $f(x)\varphi(x)$ 也是可积的，

因而 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

用(1)即得 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx。$$

2194. 证明不连续的函数：

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

于区间 $[0,1]$ 上可积分。

证： 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的不连续点为

$$x=\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots)。$$

对于任意小的正数 ε，将 $[0,1]$ 分为两个子区间 $\left[0,\frac{\varepsilon}{4}\right]$ 及 $\left[\frac{\varepsilon}{4},1\right]$。

由于在区间 $\left[\frac{\varepsilon}{4},1\right]$ 上，$f(x)$ 只有有限个间断点，因而可将区间分得如此小，使得在区间 $\left[\frac{\varepsilon}{4},1\right]$ 上，

$$\sum_{\left[\frac{\varepsilon}{4},1\right]}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}。$$

又因 $\sum\limits_{[0,\frac{\varepsilon}{4}]}\omega_i\Delta x_i\leqslant 2\sum\limits_{[0,\frac{\varepsilon}{4}]}\Delta x_i=2\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$。

故当 $|\Delta x_i|<\delta(i=1,2,\cdots,n)$时，$\sum\limits_{[0,1]}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$，此即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积分。

2195．证明黎曼函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & 若 x 为无理数,\\ \frac{1}{n}, & 若 x=\frac{m}{n},\end{cases}$$

（式中 m 及 n（$n\geqslant 1$）为互质的整数）在任何有穷的区间上可积分。

证：先证明 $\varphi(x)$在$[0,1]$上的可积性。

对于任意的 $\varepsilon>0$，取正整数 N，使 $\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{2}$。将 $[0,1]$ 分为子区间 $[x_i, x_{i+1}]$，使 $|\Delta x_i|<\frac{1}{N^3}$ $(i=0,1,\cdots,N-1)$。

1°．把包含分数 $\frac{m}{n}$（其中 $n\leqslant N$）的那些区间列为第一类，则分母不超过 N 的分数

$$\left[0=\frac{0}{1};\ 1=\frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \cdots;\ \frac{1}{N},\ \frac{2}{N},\ \cdots,\ \frac{N-1}{N}\right]$$

共 $2+1+2+\cdots+N-1=\frac{N(N-1)}{2}+2$ 个。

故第一类区间的个数 $\leqslant\frac{N(N-1)}{2}+2$。

2°．把不包含上述分数的那些子区间列为第二类．对于这种情形，显然振幅 $\leqslant\frac{1}{N}$。

故 $\sum\limits_{分母\geqslant N}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{N}\cdot 1=\frac{1}{N}$。

由此可知，当 $|\Delta x_i|<\frac{1}{N^3}$ 时，

$$\sum_{i=0}^{N-1}\omega_i\Delta x_i<\left[\frac{N(N-1)}{2}+2\right]\frac{1}{N^3}+\frac{1}{N}<\frac{2}{N}。$$

取$N>\frac{2}{\varepsilon}$，则当 $|\Delta x_i|<\frac{\varepsilon^3}{8}$时可使$\sum\limits_{i=0}^{N-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$，可见$\varphi(x)$在[0,1]上是可积的。

对于任意的区间$[a, b]$，只需证明对于任意的正整数M，$\varphi(x)$在$[-M,M]$上可积分即可。

取$|\Delta x_i|<\frac{1}{2MN^3}<\frac{\varepsilon^3}{16M}$时可使$\sum\limits_{i=1}^{N}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$，故得所证。

2196．证明函数

当 $x\neq 0$，$f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$ 及 $f(0)=0$，

于闭区间 [0,1] 上可积分。

证：函数在[0,1]上的不连续点为 $x=0$ 及 $x=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$。对于任意小的正数 ε，将[0,1]分为两个子区间 $\left[0,\frac{\varepsilon}{2}\right]$ 及 $\left[\frac{\varepsilon}{2}, 1\right]$。

由于在区间$\left[\frac{\varepsilon}{2}, 1\right]$上，$f(x)$只有有限个间断点，故可将区间分得如此小，使得在区间$\left[\frac{\varepsilon}{2}, 1\right]$上，$\sum\limits_{[\frac{\varepsilon}{2},1]}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$，又因 $0\leqslant\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]<1$，则 $\omega_i<1$，故 $\sum\limits_{[0,\frac{\varepsilon}{2}]}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$，

由此可知当$|\varDelta x_i|<\delta$时，$\sum\limits_{[0,1]}\omega_i\varDelta x_i\leqslant\varepsilon$，因而$f(x)$在$[0,1]$上可积分。

2197．证明迪里希莱函数

$$\chi(x)=\begin{cases}0, & x\text{若为无理数},\\ 1, & \text{若}x\text{为有理数},\end{cases}$$

于任意区间上不可积分。

证：可积分的充要条件为

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\varDelta x_i=0,$$

其中ω_i为函数$f(x)$在区间$[x_i,x_{i+1}]$上的振幅。

对迪里希莱函数，振幅恒为1，故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\varDelta x_i=b-a\neq0,$$

因此这函数在任意区间上不可积分。

2198．设函数$f(x)$于$[a,b]$上可积分，且

$$f_n(x)=\sup f(x)\quad\text{当 }x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},$$

其中 $x_i=a+\dfrac{i}{n}(b-a)\quad\left(\begin{array}{l}i=0,1,\cdots n;\\ n=1,2,\cdots\end{array}\right)$，

证明 $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx。$$

证：$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f_n(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\Big[\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}f(x)\Big]。$$

另一方面，如果$\int_a^b f(x)dx$存在，则对于和式中ξ_i的特殊的取法，有