高等学校计算机专业教材

GAODENG XUEXIAO JISUANJI ZHUANYE JIAOCAI

离散数学

◎ 刘贵龙 编

GAODENG XUEXIAO JISUANJI ZHUANYE JIAOCAI

GAODENG XUEXIAO JISUANJI ZHUANYE JIAOCAI

GAODENG XUEXIAO JISUANJI ZHUANYE JIAOCAI

人民邮电出版社

www.pptph.com.cn

高等学校计算机专业教材

离 散 数 学

刘贵龙 编

人 民 邮 电 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 / 刘贵龙编. —北京：人民邮电出版社，2002.2
高等学校计算机专业教材
ISBN 7-115-09394-6

I. 离… II. 刘… III. 离散数学—高等学校—教材 IV. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 007905 号

内 容 提 要

离散数学是计算机科学与技术的基础理论。本书系统地介绍了离散数学的基础知识和基本理论。主要内容有：集合的基本概念、关系、集合的基数、命题逻辑、谓词逻辑、代数结构、格与布尔代数、图的基本概念、树与平面图等。本书通俗易懂，并有较多的例子和习题，便于自学。

本书是高等学校计算机专业、电子信息类专业本科生的教材，也可作为数学及其他专业的教材或教学参考书，适当删简后还可作为专科或成人教育的教材。

高等学校计算机专业教材
离 散 数 学

◆ 编　　　刘贵龙
　责任编辑　滑　玉

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编　100061　电子函件　315@ pptph.com.cn
　网址　http://www.pptph.com.cn
　读者热线:010-67180876
　北京汉魂图文设计有限公司制作
　北京朝阳隆昌印刷厂印刷
　新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本:787×1092　1/16
　印张:19.5
　字数:476 千字　　2002 年 2 月第 1 版
　印数:1-5 000 册　　2002 年 2 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-115-09394-6/TP·2285

定价:25.00 元

本书如有印装质量问题,请与本社联系 电话:(010)67129223

出版者的话

为了适应我国大学本科计算机专业教育发展对教材的需要，我社特邀请教育部所属的中国人民大学、中国地质大学、中国农业大学、北京科技大学、北京林业大学、北京语言文化大学（排名不分先后）6 所高等学校的“计算机科学与技术系”系主任及资深教授组成专家组，规划、编写、审订了本套教材。

读者对象　本套教材的主要读者对象是普通高等院校计算机科学与技术专业的学生，兼顾信息、自动化及机电类专业学生学习计算机课程的需要。由于这些专业对学生的培养目标是：掌握计算机软件与硬件的基本理论和方法，能从事计算机应用、软件研制、技术开发和管理工作的高级技术人才，因此，本套教材的内容既注意计算机高级技术人才所应具有的完整知识结构，又适当侧重主要专业知识。

教材特点　本套教材参考了美国 IEEE/CS 和 ACM 技术委员会 2001 年推荐的课程 CC2001(Computing Curricula 2001，参见 http://www.csab.org/~csab，http://cs.nju.edu.cn/~gchen/teaching/cc2001/overview-bok.html 2001)及我国几十所高等院校计算机专业的 2001 年教学计划进行规划。教材内容在选择国际上先进的计算机理论、技术的同时，务求符合我国目前教学环境的实际情况，有一定深度，又有较高的实用性。

根据大学教学的特点，本套教材主要包括必修课程、选修课程和辅助课程三类教材。除了每本教材内容自成体系外，还考虑了它在整个教学计划中的安排顺序，适当增加了承上启下的内容。

写作风格　本套教材根据内容需要，沿着“这是什么、有什么用、怎样用、怎样用得更好”的思路编写教材，通过讲解具体知识，传授学习方法，使学生达到掌握理论和技术的目的；同时力求文笔流畅，言简意赅。

教材每一章除基本知识外，还有本章要点、小结、思考与练习题。有些教材还附加教学大纲（包括教学重点、难点，讲授知识点的参考学时数），操作性较强的课程还配有实验教材（包括上机应具备的软硬件环境和实验内容及方法）。为了方便教师教学，本套教材提供了演示稿，可到人民邮电出版社网站（http://www.ptpress.com.cn）的“教材出版图书出版中心”→“教材附件”→“课件”下载。

本套教材的作者都具有多年教学经验，教材的草稿也都在各自的授课过程中多次使用。这套教材的出版，为计算机专业的师生提供了新的选择。我们希望这套以易教、易学，朴实、实用为特色的教材在培养信息化建设专业人才方面做出应有的贡献。

欢迎广大读者对本套教材的不足之处提出批评和建议。

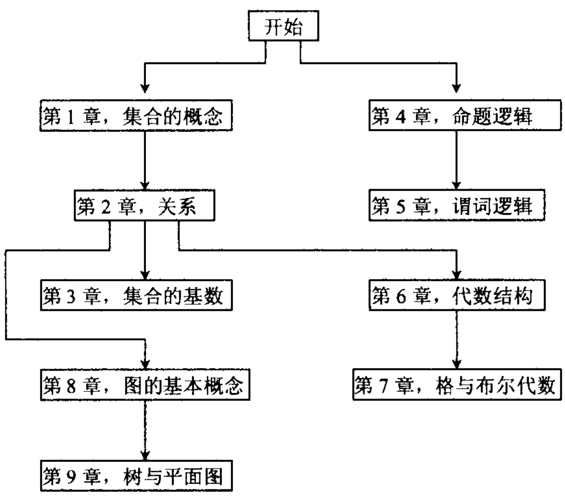
2002 年 1 月

编者的话

离散数学属于现代数学的范畴，它的研究方法与研究连续性的微积分形成鲜明的对照，不论是计算机的软件还是硬件，本质上都是一个离散系统，因此，几乎所有的计算机专业都把“离散数学”作为一门重要的专业基础课来开设。编者认为本课程的教学至少应达到两个方面的目的：其一是为后续的专业课（如数据结构、编译原理、操作系统等）的教学做必要的数学准备，为今后学生从事计算机方面的工作提供理论基础；其二是培养学生的抽象思维和逻辑推理能力。

离散数学的内容十分丰富，应用十分广泛，但随着教学改革的深入，各校的教学计划都作了较大幅度的修改，普遍压缩了课时，离散数学也不例外。基于这种考虑，我们在选材时不苛求全面，只选取离散数学最基本的、最核心的以及国内外公认的 4 部分内容，即集合论、数理逻辑、代数系统及图论。对于想在计算机某个领域进行深入研究的读者还必须去学习离散数学中相应的、更深入的内容。

本书是在编者近年来讲授“离散数学”课程的讲义的基础上修改编写而成的，其目的是为计算机本科专业“离散数学”课程提供一本较为精炼、通俗的教材。根据我们的经验，每周 4 课时，一学期（约 64～72 课时）可讲完本书不带“*”号的章节（带“*”号的章节可不作基本要求），本书适度删简后可作为专科的教材。为了便于读者学习，我们特将本书各章间的逻辑关系以图的形式列出。



我们在编写本书的过程中参阅了许多国内外离散数学教材及专著，对这些作者们表示感谢。此外，石嘉明副教授及本书的审稿人在百忙之中审阅了本书并提出了许多修改意见，在此表示谢意。

由于编者水平有限，书中错误及疏漏在所难免，诚恳地期待读者对本书的批评和指正。

编　者

2001 年 12 月

目　录

第一部分　集合论

自从康托创立集合论至今，集合的概念已渗透到了科学技术的各个方面，并成为现代数学各分支的共同基础，是不可缺少的数学工具和表达语言.

对于从事计算机科学工作的人们来说，集合论也是必备的知识，它在编译原理、开关理论、形式语言及数据库等方面有着广泛的应用.

第 1 章　集合的概念

通常我们计算的对象是数，计算的方法是加、减、乘、除，而随着数学的进步我们发现，还可以对若干个不是数的事物进行运算.例如，在线性代数中对向量、矩阵、线性变换可以进行运算，后面我们还将看到带有运算的集合.

这一章主要讲述集合的基本理论、方法和应用，虽然这些基本概念中的某一些内容在其他课程中已经出现过，但为了完整，此处不得不有所重复.

学习要求：集合是现代数学各分支的共同基础，当然也是本书的基础，读者应熟练地掌握本章的全部内容，本章的一些内容，如集合的并、交、Venn 图等已在中学及大学的其他课程中学习过，但为了内容的完整及这些内容的基础地位，本书没有省略这些内容.

1.1　集合及其表示法

若干个（有限或无限多个）固定事物的全体称为一个**集合**，而组成这个集合的事物称为这个集合的**元素**.例如，某个城市的所有中学可以组成一个集合；26 个小写的英文字母可以组成一个集合；全体实数可以组成一个集合；平面上的点可以组成一个点的集合等.而上述城市的每所中学、每个小写的英文字母、任一实数以及平面上任意一点等，则分别为集合中的元素.

以上是集合的描述性定义，要想把集合说得很清楚并不容易，这好像要把几何中的“点”和“直线”说清楚一样.要说清楚什么是集合，必须引入一组特定的公理.不过集合这个概念对谁来说都不陌生，因此，我们仅给出上述描述性定义.

通常我们用大写的英文字母表示集合的名称，用小写的英文字母表示集合的元素.a 是集合 A 的元素，记作 $a \in A$（读作 a 属于 A），表明 a 属于 A 或 A 含有 a；$a \notin A$ 或 $a \overline{\in} A$ 表示 a 不是 A 的元素或 A 不含有 a.

组成集合 A 的不同元素的个数称为 A 的基数.如果组成集合 A 的元素个数是有限的，则称 A 为**有限集**，否则称 A 是**无限集**.有限集 A 所含的元素个数记作 $|A|$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 空集好像没有什么意义，但我们会经常用到这个概念.

集合是由它所包含的元素完全确定的，通常有两种表示集合的方法。

一种是**列举法**，它是将集合的元素按任意顺序逐一列在花括号内，并用逗号分开. 例如，

$A=\{1,2,3,\cdots\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，$C=\{3,6,9,\cdots,3n,\cdots\}$. 有时用列举法列出集合中的所有元素是不现实或不可能的，如上面给出的集合 A 与集合 C，但我们只要在省略号前面或后面列出一定数量的元素，使人一看就知道哪些元素是属于这个集合即可.

另一种集合的表示法是**描述法**，它不要求列出集合中的所有元素，只要把元素满足的条件或元素具有的性质写出来即可，即将条件、性质用文字或符号在花括号内的竖线（或分号）后面表示出来. 一般可表示为：

$$A=\{x \mid R(x)\} \text{ 或 } A=\{x;R(x)\}$$

这里，$R(x)$ 表示 x 具有性质 R. 例如，方程 $x^2-1=0$ 的解集可表示为 $A=\{x \mid x^2-1=0\}$.空集可符号化表示为：

$$\varnothing=\{x \mid x\neq x\}$$

集合的这两种表示法不是相互对立的.根据需要同一个集合可以采用不同的表示法，例如，$A=\{1,-1\}$ 也可以写成 $A=\{x \mid x^2-1=0\}$ 或 $A=\{x; |x|=1\}$.集合中的元素也可以是一个集合，例如 $A=\{1,2,3,4,\{2,4\},\{1\}\}$.在集合中，某一元素重复出现多次和只出现一次其结果是一样的，如 $\{1,2,2,2,3,3\}=\{1,2,3\}$.

以下是几种常见的集合及记法：

$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$：正整数（自然数）集合.

$Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}$：整数集合.

$Q=\{x \mid x \text{ 为有理数}\}$：有理数集合.

$R=\{x \mid x \text{ 为实数}\}$：实数集合.

$C=\{x \mid x=a+bi, a,b\in \mathrm{R}\}$：复数集合.

习　　题

1．用列举法表示下列集合：

（1）1 至 50 的整数中的质数的集合；

（2）$x^2-5x+6=0$ 的解集合；

（3）单词 PASCAL 中出现的英文字母的集合；

（4）12 的质因数的集合.

2．用描述法表示下列集合：

（1）使 $\frac{1}{x^2+y^2}$ 有意义的实数对 (x,y) 的集合；

（2）空间直角坐标系中单位球面上的点集；

（3）绝对值小于 5 的实数的集合；

（4）过平面上两点 $A(1,0),B(0,1)$ 的直线上的点的集合.

3．下列命题是否正确：

（1）$1\in Q$，$\frac{3}{4}\in Q$，$\sqrt{3}\in Q$；

（2）$\pi\in R,\sqrt{-1}\in R$；

（3）$\{a\}\in\{a,\{a\}\}$.

4．问“接近于 0 的实数的全体”可否构成一个集合？

1.2 子集与幂集

对集合进行研究时，需要研究集合的子系统，即子集合.我们给出下面的定义.

定义 1.2.1 设 A，B 为任意的两个集合，如果 A 的每个元素都属于 B，则称 A 为 B 的一个**子集**，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），也称 B **包含** A.称 $\subseteq$ 为**包含关系**.

空集被认为是任何集合的子集.

$A\not\subset B$ 表示 A 至少有一个元素不属于 B，可以用图形来表示 $A\subseteq B$ 及 $A\not\subset B$，图 1-1（1）、（2）分别表示 $A\subseteq B$、$A\nsubseteq B$.

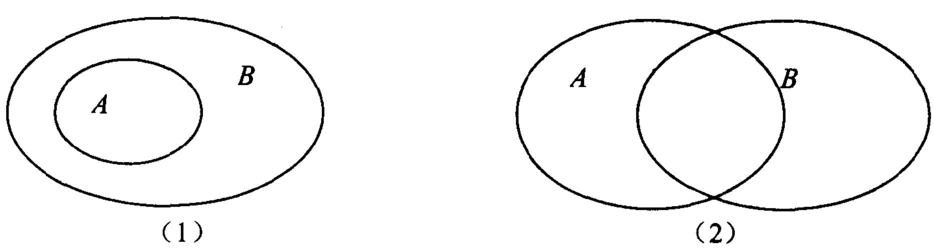


图 1-1

例 1.2.1　设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$、$B=\{2,4,5\}$ 及 $C=\{1,2,3,4,5\}$，那么 $B\subseteq A$、$B\subseteq C$ 及 $C\subseteq A$．但 $A\not\subseteq B$、$A\not\subseteq C$ 及 $C\not\subseteq B$．

若 $A\subseteq B$ 且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 为 B 的**真子集**或 B **真包含** A，记为 $A\subset B$（或 $B\supset A$）．$A\subseteq B$ 表示 $A\subset B$ 或 $A=B$．

例 1.2.2　我们有以下集合关系：

$$N\subset Z，Z\subset Q，Q\subset R，R\subset C$$

$$Z\not\subseteq N，R\not\subseteq Q，C\not\subseteq R$$

$$\{a,b\}\subset\{a,b,c,d\}，\{0,1,2,3,4\}\not\subseteq\{1,2,3,4\}$$

若集合 A 和集合 B 所包含的元素完全一样，那么集合 A 和集合 B 表示的是同一个集合，这时我们说 A 等于 B，用 $A=B$ 来表示．例如，设 $A=\{x\mid x\in R,x^2-5x+6=0\}$、$B=\{2,3\}$，则有 $A=B$．$A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 及 $B\subseteq A$．这样，要证明两个集合相等只要证明它们相互包含即可．

集合的包含具有下列性质：

（1）自反性：$A\subseteq A$；

（2）反对称性：若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$；

（3）传递性：若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$．

注意：我们要区分 $\in$ 与 $\subseteq$，前者反映的是元素与集合之间的关系，而后者反映的是集合与集合之间的关系.类似地，$\varnothing\neq\{\varnothing\}$，因为 $\varnothing$ 表示的是空集；而 $\{\varnothing\}$ 表示的是以 $\varnothing$ 为元素的集合，它不再是空集了．

前面我们考虑了集合之间的包含关系，现在我们来考虑一个集合的所有子集合，我们以 $A=\{a,b,c\}$ 为例进行讨论.

由于 $\varnothing\subseteq A$，$\varnothing$ 是它的一个 $(=C_3^0)$ 子集．A 的由 1 个元素构成的子集为 $\{a\}$、$\{b\}$ 及 $\{c\}$，共 $3\,(=C_3^1)$ 个；由两个元素构成的子集为 $\{a,b\}$、$\{b,c\}$ 及 $\{c,a\}$，共 $3\,(=C_3^2)$ 个；由 3 个元素构成的子集就只有 $1\,(=C_3^3)$ 个，即 A 本身．A 的子集总个数为：

$$C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=(1+1)^3=8$$

一般地，若$|A| = n$，则A有$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$个子集。我们把$A$的所有子集合为元素构成的新集合称为$A$的幂集。这里，$C_n^r$表示从$n$个元素中取出$r$个元素的组合数.

定义 1.2.2 设A是一个集合，以A的所有子集为元素的集合称为A的**幂集**，记作$P(A)$.

若$A = \{a,b,c\}$，则$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, A\}$.特别要注意的是，$P(\varnothing)$是以$\varnothing$为元素的集合，而不再是空集了.

当集合A的元素较多时，要不重复又不遗漏地列出集合A的所有子集合是件相当困难的事.下面，我们来给出幂集的元素的一种表示方法，按照这种方法，我们能够方便地列出一个有限集合的所有子集合.我们注意到，在A的子集中，常常是有些元素出现，而有些元素不出现.例如，当$A = \{a_1, a_2\}$时，$P(A)$的 4 个元素可表示为：

$$\varnothing = X_{00}, \{a_2\} = X_{01}, \{a_1\} = X_{10}, \{a_1, a_2\} = X_{11}$$

类似地，当$A = \{a_1, a_2, a_3\}$时，$P(A)$的 8 个元素可表示为：

$$\varnothing = X_{000}, \{a_3\} = X_{001}, \{a_2\} = X_{010}, \{a_2, a_3\} = X_{011}, \{a_1\} = X_{100},$$

$$\{a_1, a_3\} = X_{101}, \{a_1, a_2\} = X_{110}, \{a_1, a_2, a_3\} = X_{111}$$

一般地，设A为n个元素的集合，对A的元素适当编号，可设$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$P(A)$的$2^n$个元素可表示为$X_i$，而$i$是一个二进制数且 $0 \leqslant i \leqslant 2^n - 1$，即$i \in \{$二进制数$j \mid \overbrace{0 \cdots 0}^{n} \le j \le \overbrace{1 \cdots 1}^{n}\}$.例如，当$n = 7$时，$X_{1001011} = \{a_1, a_4, a_6, a_7\}$，$X_{0110010} = \{a_2, a_3, a_6\}$在$X$的二进制数下标中，第$i$位（从左到右）若为 0，表示$a_i$在该子集中不出现.第$i$位（从左到右）若为 1，表示$a_i$在该子集中出现. 子集的这种表示法不仅明确了$X_i$包含哪些元素，而且还可用于计算机的存储和运算.

习　题

1. $B \subseteq A$，但B不是A的真子集，这种情况什么时候才能出现？

2. 写出$A = \{1,2,3,4\}$的幂集.

3. 判定下列各命题的正确与错误：

（1）$\{a\} \in \{\{a\}\}$；

（2）$\{a\} \in \{\{a\}, a\}$；

（3）$\{a\} \in \{a,b,c\}$；

（4）$\varnothing \in \{a,b,c\}$；

（5）$\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,d,\{a,b,c\}\}$；

（6）$\{a,b\} \in \{a,b,c,\{a,b\}\}$；

（7）$\varnothing \subseteq \{a,b,c,d\}$；

（8）$\varnothing \in \{\varnothing\}$.

4. 设 A 和 B 是两个集合，试证 $A \subseteq B$ 的充要条件是 $P(A) \subseteq P(B)$.

1.3　集合的基本运算

我们知道，数可以进行运算，一个或几个数通过运算可以产生新的数.同样，对于集合也可做类似的运算.

定义 1.3.1　设 A,B 是任意集合，由属于 A 或者属于 B 的元素组成的新的集合称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A \cup B$，即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

例 1.3.1　$\{1,2,3\} \cup \{1,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

$$N \cup Z = Z,\ R \cup C = C,\ \{a,b,c\} \cup \varnothing = \{a,b,c\}$$

例 1.3.2　设 $a,b,c \in R, a < b, [a,b] = \{x \in R | a \le x \le b\}$,

则

$$[1,2] \cup [2,3] = [1,3],\ [-1,1] \cup [0,2] = [-1,2]$$

集合的并具有以下性质：

（1）幂等律：$A \cup A = A$；

（2）交换律：$A \cup B = B \cup A$；

（3）结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；

（4）恒等律：$A \cup \varnothing = A$.

集合的并的概念可以推广到任意多个集合上去，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为任意 n 个集合，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集定义为（记作 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$）：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid 存在 i, 1 \le i \le n, 使 x \in A_i\}$$

例 1.3.3 设 $A_i = (i, i+1]$ 表示实数轴上的半开区间，即 $(i, i+1] = \{x \mid x \in R, i < x \le i+1\}$，则 $\bigcup_{i=1}^{100} = (1, 100]$.

定义 1.3.2 设 A，B 是任意两个集合，属于 A 同时又属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, 且 x \in B\}$$

例 1.3.4 $Q \cap R = Q, \{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}, \{a,b\} \cap \{c,d\} = \varnothing$（这里，我们看到空集的用途）.

当 A，B 没有公共元素，即 $A \cap B = \varnothing$ 时，称 A 与 B 是不相交的.

关于集合的交运算，有下列性质：

（1）幂等律：$A \cap A = A$；

（2）交换律：$A \cap B = B \cap A$；

（3）结合律：$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

（4）零　律：$A \cap \varnothing = A$.

并、交运算之间有：

（1）交对并的分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

（2）并对交的分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

读者比较习惯交对并的分配律，但也应注意并对交的分配律.

对于集合的交与并，我们有以下关系：

$$A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$$

如果 $A \subseteq B$，则 $A \cup B = B, A \cap B = A$.两个以上的集合 $A_1, A_2, \cdots$ 的交集的定义可仿照

两个以上的集合的并的定义进行.

定义 1.3.3 设 A,B 是任意两个集合，属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

例 1.3.5 $\{1,2,3,4\}-\{1,2,5,6\}=\{3,4\}$

$Z-Q=\varnothing,\varnothing-\{a,b\}=\varnothing$

$\{1,2,3\}-\{a,b,c\}=\{1,2,3\}$

$\{1,2,3,4,\cdots\}-\{1,3,5,\cdots\}=\{2,4,6,\cdots\}$

$\{x|x\in R,-2\le x\le 1\}-\{x|x\in R,0<x<3\}=\{x|-2\le x\le 0\}$

差运算有以下性质：

（1） $A-A=\varnothing$；

（2） $A-B=A-(A\cap B)$；

（3） $(A-B)-C=A-(B\cup C)$；

（4） $A\cup(B-A)=A\cup B$.

集合间的并、交、差 3 种运算是集合的最基本运算，有时为了需要还需定义集合间的其他运算，但都是以并、交、差为基础的。例如，我们常见的两个集合 A,B 的对称差（定义见后）$(A-B)\cup(B-A)$ 就是通过并、差运算定义的.

在研究集合间的关系时，通常要研究某些同类的集合。特别是在一个具体问题中，如果涉及的集合都是某个集合的子集时，则称这个集合为**全集**，通常我们用 E 来表示全集.

全集是一个相对的概念，由于研究的具体内容不同，所取的全集就不同，而且全集的取法也不是惟一的.我们通常总是取一个对问题研究能带来方便的集合作全集.这样，讨论中所涉及到的集合都可视为全集的子集.

E 为全集，A 为 E 的子集，差集 $E-A$ 称为 A 的**补集**，记作 $\overline{A}$（有的书上记作 A' 或 $\sim A$）.

在研究全集 E 中子集之间的关系时，通常用一个矩形区域来直观地表示全集. E 的子集用矩形区域内的闭曲线围成的区域来表示.这种表示的几何图形就称为 **Venn 图**（用来纪念英国数学家 John Venn）.图 1-2 中的灰色区域表示了每个图形下面所标的集合.