高等学校函授教材

高等数学

第三分册

张之良编著

水利电力出版社

O13
22:3

高等学校函授教材

高 等 数 学

第三分册

张之良编著

水利电力出版社

高等学校函授教材
高等数学
第三分册
张之良编著
*
水利电力出版社出版
（北京德胜门外六铺炕）
水利电力出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米 32开本 $13^{1}/_{4}$ 印张 295千字
1979年7月第一版 1979年7月北京第一次印刷
印数 00001—24220册 每册1.40元
书号 15143·3468

目　录

第十三章 不 定 积 分

[学习指示] 不定积分法是微分法的逆运算，本章主要介绍下列几种方法：

1. 换元积分法
2. 分部积分法
3. 有理函数积分法
4. 三角函数积分法
5. 三角函数有理式的积分法
6. 无理函数的积分法

其中前三者为我们学习的重点。学过本章后要求读者能牢固地记住一些基本积分公式，并且会计算必须经过两次变形才能化成基本积分公式的积分。要会使用递推公式，会查积分表。

§1 不定积分的基本概念及其性质

（一）原函数与不定积分

设一质点M作直线运动，其路程是时间的某一函数

$$s=f(t)$$

其中s表示路程，t表示时间，则函数$f(t)$的导数即表示质点M在时刻t的速度

$$v=f'(t)$$

这是在微分学中所熟知的问题。但是，在力学中却常遇到与

这相反的问题；即作直线运动的质点M在任一时刻的速度 $v=v(t)$为已知，而要找出质点M的运动规律。换句话说，要找出点M所经过的路程与时间的依赖关系。这问题表明：我们要找一个函数 $s=f(t)$，使未知函数$f(t)$的导数$f'(t)$ 必须等于已知的函数$v(t)$。

上面的问题，如果把它抽象化，实质上就是下面所谈的问题：

我们在作算术的四则运算时，有了加法就有个减法作为它的逆运算，乘法也有除法作为它的逆运算。在我们已经掌握了微分运算后，很自然会问道：微分的逆运算存在不存在？如果存在，它的运算方法如何？很容易看出，这种运算是存在的（理论根据在下一章），例如：什么函数微分后为$2x$？我们很快的会回答说，这个函数是x^2。这里由 $2x$ 得到x^2的运算就是一个微分的反运算。我们把 x^2 叫做 $2x$ 的原来函数或简称**原函数**。一般的给定义如下：

定义 1 **设有函数$f(x)$及$F(x)$，如果在区间(a, b)内，任何一点都有$F'(x)=f(x)$，则$F(x)$叫做$f(x)$在区间$(a、b)$内的一个原函数。**

如x^2+1，$x^2-\frac{1}{5}$，$x^2+\frac{7}{9}$，……等，微分后均得$2x$，

可见一个函数的原函数不是唯一的，那么，它们之间有什么关系呢？如果它们之间无规律可循，这种反运算的意义也就不大，事实并不如此，它们之间有一个简单关系存在，由前面的例中已经可以看出，同一函数的原函数之间似乎只相差一个常数，要想使这个猜测变为真实，还需要进一步证明。

即是说，假若$F(x)$、$\Phi(x)$均为$f(x)$的原函数，需要证明$F(x)-\Phi(x)\equiv C$。

因 $$F'(x)=\Phi'(x)\equiv f(x)$$
所以 $$F'(x)-\Phi'(x)\equiv 0$$
即 $$[F(x)-\Phi(x)]'\equiv 0$$
所以我们若能由
$$[F(x)-\Phi(x)]'\equiv 0$$
推得 $$F(x)-\Phi(x)\equiv C$$
换句话说，我们若能证明下面的定理，则问题就解决了。

定理　**在$[a,\ b]$上若$\psi'=0$，则$\psi\equiv C$**

证　设$x_1<x_2$为区间$[a,\ b]$上任意两点，即 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，由拉格朗日定理，我们有：
$$\psi(x_2)-\psi(x_1)=(x_2-x_1)\psi'(\xi),\quad x_1<\xi<x_2$$
因在区间$[a,\ b]$上　$\psi'\equiv 0$，所以　$\psi'(\xi)=0$
故 $$\psi(x_2)-\psi(x_1)=0,\ 即\psi(x_1)=\psi(x_2)$$
但仅有此还不足以证明$\psi(x)$在区间$[a,\ b]$上为常数。因为很可能是它们仅在x_1，x_2两点处有$\psi(x_1)=\psi(x_2)$如图13-1。

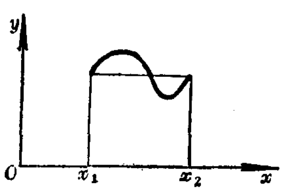

图 13-1

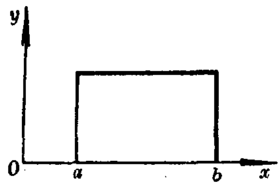

图 13-2

我们说这种情形不会发生，因为当初x_1、x_2是任意取的，它们没有任何特殊性，故知在区间$[a,\ b]$上，$\psi(x_1)=\psi(x_2)$到处成立。

即 $$\psi(x)\equiv C\quad（图13-2）$$

于是我们把一个函数的任一个原函数求出，然后再加上一个随意常数，即得原函数的全体，我们把原函数的全体叫做不定积分。

定义 2 **如果函数$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则**

$$F(x)+C \qquad (1)$$

表示$f(x)$的原函数族，（1）式叫做函数$f(x)$[或微分式$f(x)dx$]的**不定积分**，记作

$$\int f(x)dx$$

根据定义，如果$F'(x)=f(x)$，就有：

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

这时，x叫做**积分变量**；函数$f(x)$叫做**被积函数**；$f(x)dx$叫做**被积表达式**。其中"$\int$"叫做**积分号**，C叫做**随意常数**（或任意常数）。

应该注意，由定义知道不定积分是代表无穷多个原函数，并且所有的原函数的全体刚好组成函数族$F(x)+C$。

思 考 问 题

1.下列各函数是否是同一函数的原函数？

$\ln x$，$\ln(-x)$，$\ln(ax)$，$\ln|x|$，$\ln|bx|$，$\frac{1}{2}\ln(Cx)^2$。

2.下列各式，何者是$\frac{1}{x}$的不定积分？

$\ln|x|$，$\ln|Cx|$，$\ln x+C$，$\frac{1}{2}\ln x^2+C$，$\ln|x|+C$，

$\frac{1}{2}\ln Cx^2$, $\frac{1}{2}\ln(Cx)^2$。

（二）不定积分的几何解释

$f(x)$的一个原函数$F(x)$的图形叫做函数$f(x)$的**积分曲线**，它的方程是$y=F(x)$。因$F'(x)=f(x)$，故积分曲线上点x处的切线的斜率恰好等于函数$f(x)$在点x处的函数值。如果把这条积分曲线沿y轴的方向平行移动一段长度C时，我们就得到另一条积分曲线。凡是积分曲线都可以由此法获得，所以不定积分$y=\int f(x)dx+C=F(x)+C$的图形，就是这样获得的全部积分曲线族，因不论常数C等于多少，都有$[F(x)+C]'=f(x)$，这表明：如果在每一条积分曲线上横坐标相同的点处作切线，这些切线是彼此平行的（图13-3）。

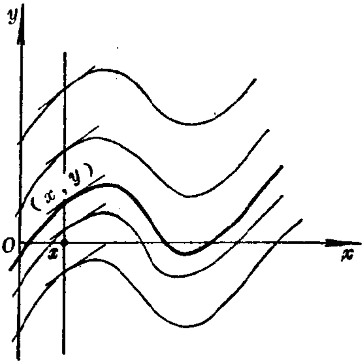

图 13-3

在求原函数的具体问题中，往往要从全部原函数中确定一个具有已知性质的原函数。这时应该利用这原函数所特有的性质来确定随意常数C。换句话说，即是需要附加条件才能由原函数的全体中确定出我们所要的那个原函数。

例 1 求通过点（2，5）而它的切线的斜率为$2x$的曲线。

解 因为$\frac{dy}{dx}=2x$，显然全部积分曲线应为：$y=x^2+C$

（图 13-4）利用所求曲线通过（2，5）这一条件，代入上式，求得$C=1$，故所求之曲线为$y=x^2+1$（图 13-4 中的粗线）。

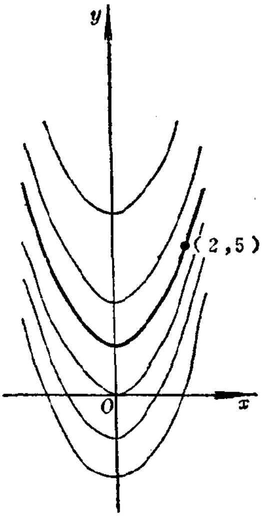

图 13-4

例 2 已知点M在直线上运动的速度v和时间t的关系为：$v=at+v_0$，其中a和v_0都是常量，求距离s和时间t的关系，如果$t=0$，$s=0$是已知的。

解 因为 $v=\frac{ds}{dt}$

$$=at+v_0,$$

所以 $s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0$，

不难验证，函数s对t求导数即得$at+v_0$。把s_0看作任意常数，则上式表示一族函数。我们所求的函数必包含在这函数族中，以$t=0$及$s=0$代入上式，求得s_0等于零。因此所求的点M的运动规律为：

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

（三）不定积分的性质

根据不定积分的定义直接推出不定积分的性质：

（1）$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$或$d\int f(x)dx=f(x)dx$；

及$\int f'(x)dx=f(x)+C$或$\int df(x)=f(x)+C$。

这就是说：**若先积分后微分，则两者的作用互相抵消；若先微分后积分，则抵消后要增加一个常数项。**

（2）**有限个函数和的积分等于各个函数的积分和。**

$$\int[f_1(x)+f_2(x)+\cdots\cdots+f_n(x)]dx$$
$$=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\cdots\cdots+\int f_n(x)dx。$$

在上式中没有另加任意常数，因为我们了解它包含在不定积分中。要证明这等式的正确性，只要证明右边的导数等于左边的被积函数即可。事实上，因为函数和的导数等于各函数的导数的和，所以上式右边的导数是：

$$\left(\int f_1(x)dx\right)'+\left(\int f_2(x)dx\right)'+\cdots\cdots$$
$$+\left(\int f_n(x)dx\right)'$$

由性质（1），就得$f_1(x)+f_2(x)+\cdots\cdots+f_n(x)$。

［性质（2）中所说的和是指代数和，也就是说包括减也在内］，以同样推理，我们有下面性质：

（3）**被积函数中不为零的常数因子可以移到积分号外，即**$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$，（$k$是常数，$k\neq 0$）

（四）基本积分表

我们求原函数的最初依据是由微分运算得来的。下面的表经常要用到，我们称它为基本积分表：

（1）$\int 0dx=C$；

（2）$\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$；　　$n\neq -1$

（3）$\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$；

(4) $\int \cos x dx=\sin x+C$;

(5) $\int \sin x dx=-\cos x+C$;

(6) $\int \sec^2 x dx=\mathrm{tg} x+C$;

(7) $\int \csc^2 x dx=-\mathrm{ctg} x+C$;

(8) $\int \sec x \,\mathrm{tg} x dx=\sec x+C$;

(9) $\int \csc x \,\mathrm{ctg} x dx=-\csc x+C$;

(10) $\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C$;

(10′) $\int e^x dx=e^x+C$;

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C_1$

$$=-\arccos\frac{x}{a}+C_2;$$

(12) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C_1$

$$=-\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a}+C_2;$$

(13) $\int \sinh x=\cosh x+C$;

(14) $\int \cosh x=\sinh x+C$。

这个表是根据不定积分的定义得来的，如果$F(x)$是函数$f(x)$的一个原函数，则$F'(x)=f(x)$，而$dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$，根据不定积分的定义得：

$$\int f(x)dx=\int dF(x)=F(x)+C$$

例如（3）

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C,\qquad 当x>0$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C,\qquad 当x<0$$

因为第一个式子的右方求导数

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

而对第二个式子的右方求导数也得：

$$[\ln(-x)]'=\frac{(-x)'}{-x}=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$$

又如（11） $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C_1$

因 $$\left(\arcsin\frac{x}{a}+C_1\right)'=\frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

其余类似，不一一证明。

关于这个表要求记得很熟，并且要记得准确。有的读者往往把积分表与微分表弄混，例如错记成：

$$\int \mathrm{tg}x dx=\sec^2x+C$$

$$\int \ln x dx=\frac{1}{x}+C$$

等等，随之自然就作错了题，希读者注意。

利用不定积分的性质和基本积分表，我们可以求一些最简单的函数的不定积分。

例 1 $\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

例 2 $\int\dfrac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=-\dfrac{1}{2x^2}+C$

例 3 $\int(2x^3-5x^2-3x+4)dx=\int 2x^3dx-\int 5x^2dx$

$-\int 3xdx+\int 4dx=\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4x+C$

例 4 $\int\left(\dfrac{2a}{\sqrt{x}}-\dfrac{b}{x^2}+3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

$=2a\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}}-b\int\dfrac{dx}{x^2}+3c\int x^{\frac{2}{3}}dx$

$=2a\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-b\dfrac{x^{-1}}{-1}+3c\dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C$

$=4a\sqrt{x}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{9c}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

例 5 $\int(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3dx$

$=\int(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2)dx$

$=a^2x-\dfrac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\dfrac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\dfrac{x^3}{3}+C$

$=a^2x-\dfrac{9}{5}a\sqrt[3]{a}\,x\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{9}{7}\sqrt[3]{a^2}\,x^2\sqrt[3]{x}$

$-\dfrac{1}{3}x^3+C$

习　题　13-1

求下列各式的积分：

（1）$\int \sqrt[3]{x}\,dx$，　　答：$\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$；

（2）$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$，　　答：$\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$；

（3）$\int 10^x dx$，　　答：$\frac{10^x}{\ln 10}+C$；

（4）$\int a^x e^x dx$，　　答：$\frac{(ae)^x}{1+\ln a}+C$；

（5）$\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$，

答：$\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$；

（6）$\int \frac{x^4-10x^2+5}{x^2}dx$，答：$\frac{x^3}{3}-10x-\frac{5}{x}+C$；

（7）$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$，　　答：$x-2\ln x-\frac{1}{x}+C$；

（8）$\int(1+\sin x+\cos x)dx$，答：$x-\cos x+\sin x+C$；

（9）$\int(2^x+3^x)^2 dx$，

答：$\frac{2^{2x}}{\ln 4}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{3^{2x}}{\ln 9}+C$；

（10）$\int(1-t)dt$，　　答：$t-\frac{t^2}{2}+C$；

（11）$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$，答：$\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$。

简单微分表（甲）

（12）试在1）～45）各题中等号的右端括号内填入正

确的答案：

例如 $d(a+\cos 2x)=-2\sin 2x dx$

$de^{4x-1}=4e^{4x-1}dx$等等。

1）$dax=($　　$)$. 2）$d(4x-5)=($　　$)$.

3）$dx^2=($　　$)$. 4）$d(ax^2)=($　　$)$.

5）$d(ax^2+b)=($　　$)$.

6）$d(x^3)=($　　$)$.

7）$d(ax^3+c)=($　　$)$.

8）$de^x=($　　$)$. 9）$d(e^x-3)=($　　$)$.

10）$da^x=($　　$)$. 11）$de^{x+5}=($　　$)$.

12）$d(a^{2x}+9)=($　　$)$.

13）$de^{-x}=($　　$)$. 14）$d(e^{-3x^2})=($　　$)$.

15）$de^{2-5x}=($　　$)$.

16）$d\sin x=($　　$)$. 17）$d\cos(x^2)=($　　$)$.

18）$d\sin(3-4x)=($　　$)$.

19）$d\cos(6x+1)=($　　$)$.

20）$d(a-\sin 5x)=($　　$)$.

21）$d\mathrm{tg}x=($　　$)$. 22）$d\mathrm{ctg}x=($　　$)$.

23）$d\mathrm{tg}3x=($　　$)$. 24）$d\mathrm{ctg}(ax-1)=($　　$)$.

25）$d(a+3\mathrm{ctg}2x)=($　　$)$.

26）$d\ln x=($　　$)$. 27）$d\ln(ax)=($　　$)$.

28）$d\ln(ax+b)=($　　$)$.

29）$d(a+\ln 3x)=($　　$)$.

30）$d\sqrt{x}=($　　$)$. 31）$d(a-\sqrt{x})=($　　$)$.

32）$d\frac{1}{x}=($　　$)$. 33）$d(1-x)=($　　$)$.

34）$d(x^2-1)=($　　$)$.