王士同　编著

模糊推理理论与模糊专家系统

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字 301 号

模糊推理理论与模糊专家系统

王士同　编著

*

上海科学技术文献出版社出版发行

（上海市武康路 2 号　邮政编码 200031）

全国新华书店经销

上海科技文献出版社昆山联营厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 7.25　字数 201,000

1995 年 12 月第 1 版　1995 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—1300

ISBN 7-5439-0591-4/T·352

定 价：16.50 元

《科技新书目》340-277

内容简介

模糊推理理论是研究和实现不精确推理的重要工具，是模糊集理论应用的基础，在人工智能特别是专家系统的应用研究中具有举足轻重的位置。本书全面系统介绍了模糊推理理论基础及其重要研究成果，并以此为基础，结合实例，较全面系统地介绍了模糊专家系统的构造技术及其构造工具。

本书取材新颖，内容深入浅出，既有理论阐述，又有丰富的实例介绍，适合广大从事计算机、自动控制、应用数学等专业的科技工作者阅读。

前　言

自1965年L. A. Zadeh教授提出模糊集理论以来，模糊集的理论与应用研究取得了许多重大进展。模糊数学的目的不是将数学变成模糊，而是要使数学应用到具有模糊现象和模糊概念的各种知识领域之中。目前，模糊集理论已广泛应用于自动控制、知识工程、模式识别、机器人、经济预测、心理分析等众多的领域之中，而近几年流行起来的模糊家电产品，如模糊洗衣机等则已家喻户晓。模糊集理论的应用基础是模糊推理理论。

所谓推理就是由已知的判断引申出另一个新的判断的思维过程。人类在进行思维的决策时通常用的推理是经验推理，即不精确推理。专家系统是人工智能取得重大应用的主要领域之一。在专家系统中，为了让机器模拟人类专家的决策思维和推理能力，其核心问题之一就是如何使机器具有像人类专家那样的不精确推理的能力。模糊推理理论是描述人类思维、决策的模糊性问题的重要工具；是实现不精确推理的一种重要理论。以模糊推理理论为基础的模糊专家系统是专家系统研究的一个重要分支，已取得了许多富有成效的应用。

本书较全面地介绍了模糊推理理论，并结合实例阐述了模糊专家系统的构造技术及其工具。本书取材新颖，叙述深入浅出，内容较全面地反映了国内外模糊推理理论及模糊专家系统方面的最新成果。具体地说，本书具有如下特点：(1) 在介绍了经典模糊集理论之后，较全面地介绍了较新的区间值模糊集和可能性理论；(2) 介绍了模糊语言值逻辑的近似推理理论，深入研究了新颖的量化语句模糊推理理论；(3) 既介绍了常见的模糊推理方法，又介绍了区间值模糊推理方法以及对模糊计算机研究有重要影响的真值流推理方法；(4) 通过对五个模糊专家系统的剖析，全面深入地

探讨了模糊专家系统的设计原理及其技术。这对读者从事知识工程的研究会大有益处。

本书编写过程中承蒙夏振华先生、杨国庆先生、钮晓鸣先生在百忙之中审阅全稿并提出宝贵意见并得到国家自然科学基金会以及出版社的支持。在此一并致以由衷的感谢。

由于作者水平有限，错误之处恳请读者斧正。

王士同

1994.3

目　　录

第一章　模糊集合

§1.1　模糊集合的定义

经典集合论中的集合是不定义的概念，集合是一种称之为“数学语言”的数学刻画。所谓数学语言就是指满足真伪性只有两种可能，“非真即伪”的语言。适应这种数学语言的对象便构成经典集合中的各种集合。

为了给出模糊集的概念，首先给出集合论的一个基础，即论域。所谓论域就是我们讨论的问题所涉及到的对象的全体，是一个普通集合。在这里，通常用大写字母 U,V,W,X,Y,Z 等表示 。

论域 U 的子集 A 在普通集合论中可以有以下两种表达方式：一种方式是 A 为满足某种性质 $p(x)$ 的点的全体，即 $A=\{x|x\in U$，且 x 满足 $p(x)\}$；另一种方式是用特征函数表示，即

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & (x\in A)\\ 0, & (x\notin A)\end{cases}$$

若论域 U 中的子集 A 与 B 的运算以特征函数来表示，则可写成

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\quad (\forall\ x\in U)$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\quad (\forall\ x\in U)$$

$$\mu_{A'}(x)=1-\mu_A(x),(\forall\ x\in U)$$

式中，A' 为集合 A 之补集，有时亦记补集为 $\sim A$。若 $p(U)$ 表示 U 的幂集，而 $\mathrm{ch}(U)$ 表示 U 上一切特征函数的全体，则$(P(U), \cup, \cap, \sim)$ 与$(\mathrm{ch}(U), \vee, \wedge, -)$ 是完全格同构的，其中 $\vee$ 表示 max，$\wedge$ 表示 min。这一事实反映了对 U 的子集的研究完全可以用研究其特征函数来代替。特征函数恰好给出对象 x 对所要求条件的满足程度，或者为 1，即完全满足；或者为 0，即完全不满足。正因为如此，普

通集合论中只能是“非此即彼”或“非真即伪”。现在，我们根据与特征函数相似的被称之为隶属函数的概念来定义模糊集合。

定义 1.1 论域 $U=\{x\}$ 上的集合 A 由隶属函数 $\mu_A(x)$ 来表征，其中 $\mu_A(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 中取值，$\mu_A(x)$ 的大小反映了 x 对于模糊集合 A 的隶属程度。

这就是说，论域 $U=\{x\}$ 上的模糊集合 A 是指 x 中具有某种性质的元素整体，这些元素具有某个不分明的界限。对于 U 中任一元素，我们能根据这种性质，用一个 $[0,1]$ 区间上的函数表征该元素隶属于 A 的程度。论域是指被讨论的全体对象。论域元素总是分明的，而只有 x 的模糊子集 A,B 等才是模糊的，所以模糊集通常是模糊子集。在不易混淆的场合，模糊子集简称为模糊集。$\mu_A(x)$ 的值接近于 1，表示 x 隶属于 A 的程度很高；$\mu_A(x)$ 的值接近于 0，表示 x 隶属于 A 的程度很低。

例 1.1 模糊集 A 表示远大于 0 的实数，即 $A=\{x|x\gg 0\}$，A 的隶属函数可以确定为

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, & (x\leqslant 0)\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{100}{x^2}}, & (x>0)\end{cases}$$

如图 1.1 所示。

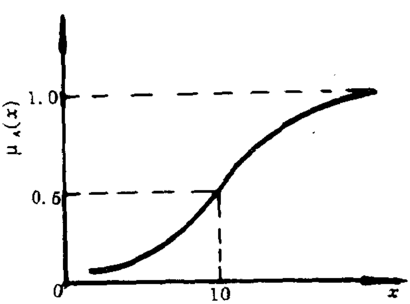

图 1.1 A 的隶属函数

模糊数学用来研究和处理模糊现象。在这里，概念本身没有明确的含义，概念的外延是模糊的，我们称之为模糊概念。为了定量表达模糊概念，我们将集合拓广为模糊集合。一个对象是否符合一个

模糊概念，不应单用一个字“是”或“否”来回答，最好用一个数来反映它隶属于该模糊概念的程度。在模糊数学中，我们用0与1之间的数来反映论域中元素隶属于模糊集合的程度，隶属函数就用于这个目的。模糊概念是客观事物的本质属性在人们头脑中的反映。模糊性的根源在于客观事物的差异之间存在着中间过渡，存在着亦此亦彼的现象。当然，隶属函数的具体确定，确实包含着人脑的具体加工，其中包含着某种心理过程。心理学的大量实验表明，人的各种感觉所反应出来的心理量与外界刺激的物理量之间保持着相当严格的关系，这些便在客观上对隶属函数进行了某种限定，使得隶属函数是对模糊概念所具有的客观性的一种量度，不能主观任意地捏造。正确地确定隶属函数，是利用模糊集合恰如其分地定量表现模糊概念的基础。为了要正确确定隶属函数，既要深刻地认识它所反映的模糊概念，又要找到定量反映这些模糊概念的恰当形式。应用模糊数学来解决实际问题，一个基本步骤是寻找一个或几个隶属函数。这个问题解决了，其它问题就迎刃而解。隶属函数的确定过程，本质是客观的，但又允许有一定的人为技巧。只要多实践，就可以掌握这些技巧。本书中介绍了许多隶属函数，可供读者参考。

就论域的类型而言，模糊集有下列两种表示法：

(1) 设论域 U 是有限域，即 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，U 上的任一模糊集 A，其隶属函数为 $\mu_A(x_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，则此时 A 可表示成

$$
\begin{aligned}
A &= \mu_A(x_1)/x_1+\mu_A(x_2)/x_2+\cdots+\mu_A(x_n)/x_n \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)/x_i
\end{aligned}
$$

这里的符号 Σ 不再是数学和，$\mu_A(x_i)/x_i$ 也不是分数，它只有符号意义，只表示 x_i 对模糊集 A 的隶属程度是 $\mu_A(x_i)$。

例 1.2 设 $U=\{1,2,3,4,5\}$，模糊集 A 表示“小的整数”，于是，A 可以定义如下：

$A=$ 小的整数 $=1/1+1/2+0.8/3+0.5/4+0.2/5$

注意，有时候将 U 记成 $U=1+2+3+4+5$。

(2) 设论域 U 为无限集,此时 U 上的一个模糊集 A 可表示成

$$A = \int_{x \in U} \mu_A(x)/x$$

同样,$\int$ 不再表示积分,它仅代表一种记号,而 $\mu_A(x)/x$ 的意义则和有限情况是一致的。

例 1.3 用上述表示法,例 1.1 中的模糊集 A 可表示成

$$\begin{aligned} A &= \int_{x \leqslant 0} 0/x + \int_{x>0} \left[\frac{1}{1+\dfrac{100}{x^2}}\right] \Big/ x \\ &= \int_{x>0} \left[\frac{1}{1+\dfrac{100}{x^2}}\right] \Big/ x \end{aligned}$$

正如前面所述,一个定义在论域上的模糊集,其隶属函数可能会有多种不同的形式。下面将给出与实数集 U 上某个模糊集有关的三类常用的隶属函数:

(1) 偏小型(戒上型)

$$f(x) = \begin{cases} (1 + a(x-c)^b)^{-1}, & (x > c) \\ 1, & (x \leqslant c) \end{cases}$$

式中,$c \in U$ 是任一点,a 和 b 是两个大于零的参数($a > 0, b > 0$),如图 1.2 所示。

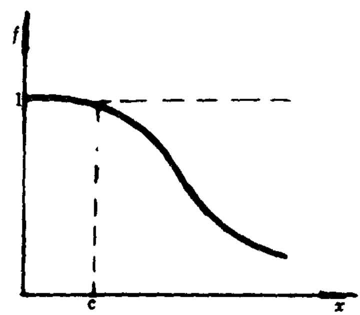

图 1.2 偏小型

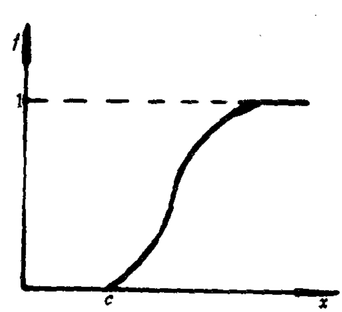

图 1.3 偏大型

(2) 偏大型(戒下型)

$$f(x) = \begin{cases} (1 + a(x-c)^b)^{-1}, & (x \geqslant c) \\ 0, & (x < c) \end{cases}$$

式中,$c \in U$ 是任一点,a 和 b 是两个参数且 $a > 0, b < 0$,如图 1.3 所示。显然(2) 型和(1) 型是对偶的。

(3) 中间型(对称型或正态型)

$$f(x) = e^{-k(x-c)^2}$$

式中,$c \in U$ 是任一值,k 是大于零的参数($k > 0$),如图 1.4 所示。这是一类定义或描述近似程度的模糊集。

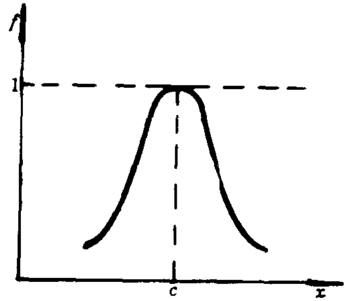

图 1.4　中间型

§1.2　模糊集的运算

既然模糊集是普通集合的推广,那么普通集合的一些性质亦可相应地被扩展到模糊集中。现在给出模糊集之间的运算,它们的定义与普通集的定义相平行,是普通集运算的推广。由于模糊集中没有点与集合之间的绝对隶属关系,因而其运算的定义只能以隶属函数之间的关系来确定。

令论域 U 上模糊集之全体用 $F(U)$ 来表示。

定义 1.2　设 $A, B \in F(U)$,

若 $\forall x \in U$ 有 $\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$,称 A 含于 B 或 B 包含 A,并记作 $A \subseteq B$;

若 $\forall x \in U$ 有 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$,称 A 等于 B,并记作 $A = B$。

假设 $\varnothing$ 表示隶属函数恒为 0 的模糊集,即空模糊集,U 表示隶属函数恒为 1 的模糊集,则有性质:

(1) $\varnothing \subseteq A \subseteq U$;　(最大、最小模糊集的存在性)

(2) $A \subseteq A$；（自反性）

(3) $A \subseteq B, B \subseteq A$，则 $A = B$；（对称性）

(4) $A \subseteq B, B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$；（传递性）

定义 1.3 设 $A, B \in F(U)$，则

A 与 B 的并 $A \cup B$ 的隶属函数定义为

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

A 与 B 的交 $A \cap B$ 的隶属函数定义为

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

A 的补 A' 的隶属函数定义为

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

上述定义的图形表示见图 1.5。若 $A, B \in F(U)$，则 $A \cup B, A \cap B, A' \in F(U)$。

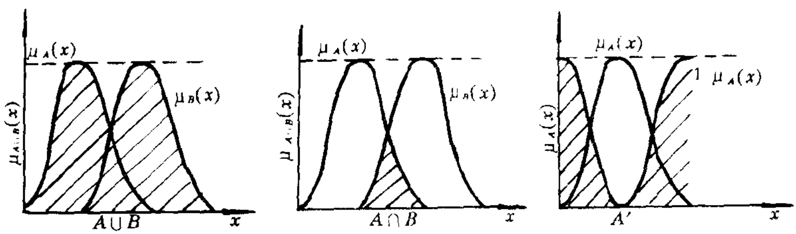

图 1.5 各隶属函数图形表示

按照论域 U 为有限或无限的两种情况，模糊集 A 与 B 的并、交和补的计算公式可分别表示如下：

(1) 论域 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，且 $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i, B = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(x_i)/x_i$，则

$$A \cup B = \sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) \vee \mu_B(x_i))/x_i$$

$$A \cap B = \sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) \wedge \mu_B(x_i))/x_i$$

$$A' = \sum_{i=1}^{n} (1 - \mu_A(x_i))/x_i$$

(2) 论域 U 为无限域，且 $A = \int_{x \in U} \mu_A(x)/x, B = \int_{x \in U} \mu_B(x)/x$，

则

$$A \cup B = \int_{x \in U} (\mu_A(x) \vee \mu_B(x))/x$$

$$A \cap B = \int_{x \in U} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x))/x$$

$$A' = \int_{x \in U} (1 - \mu_A(x))/x$$

例 1.4 设 $A = 0.9/x_1 + 0.7/x_2 + 0.4/x_3 + 0.1/x_4$，$B = 0.2/x_1 + 0.5/x_2 + 0.8/x_3 + 0.3/x_4 + 0.1/x_5$，则

$$\begin{aligned} A \cup B &= (0.9 \vee 0.2)/x_1 + (0.7 \vee 0.5)/x_2 + (0.4 \vee \\ &\quad 0.8)/x_3 + (0.1 \vee 0.3)/x_4 + (0 \vee 0.1)/x_5 \\ &= 0.9/x_1 + 0.7/x_2 + 0.8/x_3 + 0.3/x_4 + 0.1/x_5 \end{aligned}$$

类似地有

$$A \cap B = 0.2/x_1 + 0.5/x_2 + 0.4/x_3 + 0.1/x_4$$

$$A' = 0.1/x_1 + 0.3/x_2 + 0.6/x_3 + 0.9/x_4 + 1/x_5$$

例 1.5 设 $A = \int_{0 \leqslant x \leqslant 25} 1/x + \int_{x > 25} \left(1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1} / x$

$$B = \int_{50 < x \leqslant 100} \left(1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} / x + \int_{x > 100} 1/x$$

则

$$\begin{aligned} A \cup B = &\int_{0 \leqslant x \leqslant 25} 1/x + \int_{25 < x < x^*} \left(1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1} / x \\ &+ \int_{x^* < x \leqslant 100} \left(1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} / x + \int_{x > 100} 1/x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B = &\int_{50 < x < x^*} \left(1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} / x \\ &+ \int_{x^* < x \leqslant 100} \left(1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1} / x \end{aligned}$$

$$A' = \int_{25 \leqslant x \leqslant 100} \left(1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1} / x + \int_{x > 100} 1/x$$

式中 $x^* \approx 51$。

模糊集运算中还有另一个重要的运算，这就是笛卡儿乘积运算。

设 $A_1,\cdots,A_n$ 是论域 $U_1,\cdots,U_n$ 上的模糊集，$A_1,\cdots,A_n$ 的笛卡儿乘积记为 $A_1\times\cdots\times A_n$，定义为论域 $U_1\times\cdots\times U_n$ 上的模糊集，其隶属函数给定为

$$\mu_{A_1\times\cdots\times A_n}(x_1,\cdots,x_n)=\mu_{A_1}(x_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{A_n}(x_n)$$

根据论域的有限和无限这两种情形，可有

$$A_1\times\cdots\times A_n=\Sigma(\mu_{A_1}(x_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{A_n}(x_n))/(x_1,\cdots,x_n)$$

或

$$A_1\times\cdots\times A_n=\int_{U_1\times\cdots\times U_n}(\mu_{A_1}(x_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{A_n}(x_n))/(x_1,\cdots,x_n)$$

例 1.6 设 $U_1=U_2=\{3,5,7\}$，$A_1=0.5/3+1/5+0.6/7$，而 $A_2=1/3+0.6/5$，则

$$\begin{aligned}A_1\times A_2=&0.5/(3,3)+1/(5,3)+0.6/(7,3)+0.5/(3,5)\\&+0.6/(5,5)+0.6/(7,5)\end{aligned}$$

定理 1.1 设 $A,B,C\in F(U)$，关于并、交、补有下列代数律成立：

(1) 幂等律 $A\cup A=A;A\cap A=A$

(2) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A;A\cap(A\cup B)=A$

(3) 交换律 $A\cup B=B\cup A;A\cap B=B\cap A$

(4) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cup C)$

(5) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(6) 0-1 律 $A\cup\varnothing=A;A\cup U=U$

$A\cap\varnothing=\varnothing;A\cap U=A$

(7) 复原律 $(A')'=A$

(8) 对偶律 $(A\cup B)'=A'\cap B'$

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

证明 根据运算的定义再进行简单的计算即可证明。现举例

说明如下：

（4）的第一式证明：对任意固定点 $x \in U$

$$\begin{aligned}\mu_{A\cup(B\cap C)}(x) &= \mu_A(x) \vee \mu_{B\cap C}(x) \\ &= \mu_A(x) \vee (\mu_B(x) \wedge \mu_C(x)) \\ &= (\mu_A(x) \vee (\mu_B(x)) \wedge (\mu_A(x) \vee \mu_C(x)) \\ &= \mu_{A\cup B}(x) \wedge \mu_{A\cup C}(x) \\ &= \mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x)\end{aligned}$$

由模糊集的定义，即得到（4）的第一式。

（8）的第一式证明：

$$\begin{aligned}\mu_{(A\cup B)'}(x) &= 1 - \mu_{A\cup B}(x) \\ &= 1 - (\mu_A(x) \vee \mu_B(x)) \\ &= (1 - \mu_A(x)) \wedge (1 - \mu_B(x)) \\ &= \mu_{A'\cap B'}(x)\end{aligned}$$

故知（8）的第一式成立。

一般来说，互补律 $A \cup A' = U$ 和 $A \cap A' = \varnothing$ 不成立。如设 $\mu_A(x) = 0.2$，$\mu_{A'}(x) = 0.8$，则 $\mu_{A\cup A'}(x) = 0.8 \neq 1$，$\mu_{A\cap A'}(x) = 0.2 \neq 0$。这一事实表明，模糊集不再具有“非此即彼”或“非真即伪”的分明性，也就是说，这是模糊集带来的本质特征。

§1.3　模糊集的模运算

在模糊集合论中，模糊集的运算只能用其隶属函数来确定，而不同定义的运算会产生出不同的结果。因此除以“$\vee$”和“$\wedge$”所定义的称之为模糊集的并与交运算外，还可以建立模糊集的其它各种不同的运算，以适应于不同的模糊现象。模运算是模糊集运算的最一般形式。

定义 1.4　映射 T：$[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ 称为三角模，若满足条件：

（1）$T(0,0) = 0$，$T(1,1) = 1$；

（2）$a \leqslant c, b \leqslant d \Rightarrow T(a,b) \leqslant T(c,d)$；

(3) $T(a,b) = T(b,a)$;

(4) $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$。

当三角模满足$T(a,1) = a(a \in [0,1])$，称为T模；当三角模满足$T(0,a) = a(a \in [0,1])$，称为S模。

例 1.7 下面的模是T模

$$T'_0(a,b) = \begin{cases} a, & (b = 1) \\ b, & (a = 1) \\ 0, & (\text{其它}) \end{cases}$$

$$T_0(a,b) = a \wedge b$$

$$T_1(a,b) = a \cdot b$$

$$T_2(a,b) = \frac{a \cdot b}{1 + (1-a)(1-b)}$$

$$T^\lambda(a,b) = \frac{a \cdot b}{\lambda + (1-\lambda)(a+b-ab)}, \quad (\lambda \geqslant 0)$$

$$T^\gamma(a,b) = 1 - \min(1,((1-a)^\gamma + (1-b)^\gamma)^{1/\gamma}), \quad (\gamma \geqslant 1)$$

$$T_\infty(a,b) = \max(0,a+b-1)$$

下面的模是S模：

$$S'_0(a,b) = \begin{cases} a, & (b = 0) \\ b, & (a = 0) \\ 1, & (\text{其它}) \end{cases}$$

$$S_0(a,b) = a \vee b$$

$$S_1(a,b) = a + b - a \cdot b$$

$$S_2(a,b) = \frac{a+b}{1 + a \cdot b}$$

$$S^\lambda(a,b) = \frac{a + b + (\lambda-2)ab}{1 + (\lambda-1)ab}$$

$$S^\gamma(a,b) = \min(1,(a^\gamma + b^\gamma)^{1/\gamma})$$

$$S_\infty(a,b) = \min(1,a+b)$$

有时候，为了书写和叙述方便，也可称T模和S模为模T与模S。

定义 1.5 对于三角模T'_1, T'_2，若$\forall\, a,b \in [0,1]$有：$T'_1(a,b) \leqslant T'_2(a,b)$，称$T'_1$弱于$T'_2$，记作$T'_1 \leqslant T'_2$

定理 1.2 三角模之间有下列关系：