

经济管理数学方法

贾凤和 谢林 编
陕西科学技术出版社

经济管理数学方法

贾凤和 编
谢 林

陕西科学技术出版社

经济管理数学方法

贾凤和 编
谢 林

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街131号)

陕西省新华书店发行 陕西省印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张16 字数338,000

1984年5月第1版 1984年5月第1次印刷

印数1—8,200

统一书号: 4202·2 定价: 2.35元

序

人们从事的种种活动，特别是人们所从事的集体活动，不论活动是属于什么样性质的，是经济活动，还是非经济的科研活动、文化教育活动，甚至是军事活动等；也不论这种活动是宏观的还是微观的，都是在一个特定的环境之下，具有一个明确的整体目标，包含着若干个可以相互区别、相互联系而又相互作用的要素相结合的集合体。也就是说，一种活动就是一个系统。为了更好地实现一种活动或一个系统的整体目标，缺乏好的管理是不行的。

对一种活动或一个系统进行有效的管理，不仅要仔细考核它的质，确定它的性质；而且必须十分重视它的量，要对量进行认真的研究。不如此，就很难对它们的情况做到透彻了解，做到心中有“数”。当然也就搞不好相应的管理工作。以工厂企业的生产经营活动为例，不论是生产、劳动、物资、工艺、成本、财务、销售、经营等具体业务工作，还是计划、预测、市场调查、协调、控制、决策等综合管理工作等等，都有大量的“数”形成种种“信息流”，需要进行综合、分析、判断和处理。随着管理工作的不断深入和现代科学技术的日益发展，企业生产经营活动中需要加工处理的数据不仅它的量越来越大，而且要求处理的时间也十分紧迫。往往由于一个数据未得到处理，就会给生产经营上带来影响，甚至会造成经济上的重大损失。可见，在管理工作

上，量的问题是个十分重要的问题。

要加工处理管理工作中“数”的问题，离开了数学方法是不成的。管理上运用数学已有很久历史，但“管理数学”成为一门独立学科，那则是近二三十年的事。二次世界大战后，运筹学中许多重要分支和控制论、优化数学等新的数学方法的发展，电子技术突飞猛进，电子计算机得到广泛运用，不仅扩大数学在管理上应用范围，促进管理数学的发展，同时也大大提高了现代化管理的水平。

“管理数学”涉及到的数学方法较多，一般说来，除去它包括常量数学和微积分学的必要基本内容外，它还包括线性代数、运筹学、概率论和数理统计等方面的内容。线性代数中的矩阵理论和线性方程组是管理数学的重要内容；现代化管理中需要电子计算机来处理大量数据，数据矩阵化是使用电子计算机的重要手段之一；管理的目的就是使活动目标达到最优化，即耗费的劳动和资源最少而能获得好的效果，因此，运筹学，特别是运筹学中的线性规划，在经济研究和管理中运用得十分广泛；博弈论、统筹学和排队论也得到广泛的应用；在经济研究和管理工作中有大量的随机因素要处理，因而概率论和数理统计在经济管理中应用得很普遍；此外，模糊数学等也开始在管理中得到了应用。

应该指出，上述种种数学方法在管理上的应用，都要依靠电子计算机进行数据处理的，如果没有电子计算机的发展，很多数学方法在管理上是无法应用的。

对本书我认为有这样的几个特点：第一，管理中所涉及到的一些最主要的数学方法几乎都讲到了，从书的内容排列上看，也照顾数学本身的系统性，内容虽多，但条理清楚。

第二，着眼于应用，本书讲的是数学方法，但不着重于数学本身的论证和公式推导，而是在简练地叙述与经济管理有关的数学方法之后，重点是在讨论如何用数学方法来解决管理中的实际问题。第三，书中所论述的数学方法，一般都列出数值求解公式，这就为利用电子计算机编写上机程序提供了方便。

总之，我认为这本书对于从事管理的实际工作者，企业的领导干部、经济管理人员和工程技术人员，以及从事管理教学和科研人员，则提供了一本较为系统的参考书。虽然，这本书还有些不足之处，比如有些数学方法还可增添，我国实际的例子还可多举一些等。虽然如此，但在当前全国人民重视管理工作的情况下，能看到这本书，是值得高兴的。因而，我写几句，做点介绍。

陈 炳 富

前 言

目前，无论在经济研究或先进的管理方面都广泛地用到数学方法。因此，如果能把经济管理方面所用到的数学方法，按数学系统做一简明的阐述，不是着重于数学上的论证，而是通过例子阐明如何用数学方法解决各种经济管理方面的问题，在叙述上，依据方法上的特点，对微观和宏观问题分别有所侧重，并给出国内外正在应用的先进管理方法和经济模型，那么，不论是对从事管理、经济研究的人员，还是对有关专业的学生及自修人员，都将是有益的。这正是作者编写本书的指导思想。

由于时间仓促，书中难免有不足之处，请读者批评指正。

天津市管理现代化研究会副会长、南开大学管理学系主任陈炳富副教授为本书写了序言。西安交通大学数学系副主任游兆永教授和张文修副教授审阅了本书。在此一并表示感谢。

作 者

于南开大学经济研究所

目 录

序.....陈炳富

前言

第一章微分与积分..... 1

1.1 函数的导数..... 1

1.1.1 函数的导数..... 1

1.1.2 高阶导数..... 3

1.1.3 偏导数..... 4

1.2 平均成本的变动率
等..... 6

1.3 函数的极值.....11

1.4 利润最大问题.....14

1.5 $E O Q$ 理论.....15

1.6 函数的弹性.....18

1.6.1 函数的弹性.....18

1.6.2 需求价格弹性.....22

1.7 微分.....24

1.8 积分.....28

1.8.1 不定积分.....28

1.8.2 定积分.....30

1.8.3 数值积分法.....36

1.9 均匀流的现值因

素.....40

第二章线性方程组.....45

2.1 向量.....45

2.2 矩阵.....49

2.3 行列式.....57

2.4 转置矩阵与逆矩
阵.....61

2.5 线性方程组.....65

2.5.1 线性方程组.....65

2.5.2 线性方程组的求解
方法.....67

2.6 解线性方程组的
迭代法.....70

2.6.1 简单迭代法.....71

2.6.2 塞德尔迭代法.....75

2.6.3 方程组的改写.....77

2.7 盈亏转折分析.....80

2.8 投入——产出分
析.....83

2.9 线性差分方程.....89

2.9.1 有限差分.....89

2.9.2 一阶线性差分方程	91	型	145
2.10 投资的适当调整	92	3.5.1 开式模型	145
2.11 设备的选择	93	3.5.2 静态模型	150
2.12 还债计划	95	3.5.3 动态模型	152
2.13 价格的波动	98	3.6 整数规划的求解方法	155
第三章规划论	100	3.6.1 整数规划	155
3.1 线性规划的求解方法	100	3.6.2 全部整数型计算方法	157
3.1.1 线性规划问题的性质	100	3.6.3 部分整数型计算方法	161
3.1.2 图解法	101	3.7 建筑企业投资的最优化方法	166
3.1.3 单纯形法	102	3.8 非线性规划	172
3.2 物资的最佳调运	118	3.8.1 非线性目标问题	172
3.3 以销定产, 工厂生产计划的制订	125	3.8.2 目标函数与约束条件均为非线性问题	175
3.4 公司计划的制订	136	3.9 动态规划	177
3.4.1 影子价格	136	第四章概率论	185
3.4.2 影子价格的稳定范围	138	4.1 概率	185
3.4.3 公司计划的制订方法	139	4.1.1 事件	185
3.5 投入——产出模型		4.1.2 概率	187
		4.2 概率的计算	188
		4.2.1 乘法公式	188
		4.2.2 独立事件	189
		4.2.3 总和概率公式	190

4.2.4 全概率公式和贝叶斯公式	192	5.1.8 F检验法	251
4.2.5 伯努利公式	195	5.2 计数抽样方案	256
4.3 概率分布函数	197	5.2.1 抽样检验的两类错判	256
4.4 电力供应问题	198	5.2.2 抽样特性曲线	257
4.5 成品包装	200	5.2.3 一次抽样特性函数的计算	259
4.6 分布曲线	201	5.2.4 计数抽样方案	262
4.7 数学期望与方差	203	5.2.5 标准型一次抽样检查	265
4.8 常用分布函数	208	5.3 方差分析	271
4.9 正态分布的概率计算	213	5.3.1 概述	271
4.9.1 正态分布	213	5.3.2 单因素方差分析	272
4.9.2 正态分布的概率计算	214	5.3.3 双因素方差分析	279
4.10 工序质量控制统计方法	217	5.3.4 按系统的方差分析	289
第五章数理统计	227	5.4 正交设计	292
5.1 统计检验	227	5.4.1 概述	292
5.1.1 概述	227	5.4.2 正交设计	296
5.1.2 样本的平均数	229	5.4.3 试验结果的计算和分析方法	301
5.1.3 样本的方差	230	5.4.4 正交试验表原理	304
5.1.4 显著性水平	231	5.4.5 具有不同水平数的试验结果分析	306
5.1.5 u 检验法	234		
5.1.6 t 检验法	241		
5.1.7 χ^2 检验法	248		

5.4.6 有交互作用的试验	6.1 概述·····	383
结果分析·····	6.2 最小最大原理··	384
309	6.3 定值博奕·····	387
5.4.7 多指标的试验结果	6.4 非定值博奕·····	391
分析·····	6.4.1 非定值博奕·····	391
311	6.4.2 数学期望·····	393
5.5 线性回归·····	6.4.3 非定值博奕的解··	394
315	6.5 线性规划方法··	396
5.5.1 一元线性回归··	6.5.1 解非定值博奕··	396
315	6.5.2 解定值博奕·····	405
5.5.2 相关系数与置信区	第七章统筹学·····	410
间·····	7.1 网络图的形成··	410
322	7.2 网络图的计算··	413
5.5.3 二元线性回归··	7.3 关键线路和总工	
329	期的确定·····	423
5.5.4 二元线性回归预	7.4 计划评审法	
测模型·····	(PERT)·····	424
334	7.5 资源安排法	
5.5.5 多元线性回归··	(RSM)·····	429
339	7.6 成本技术	
5.5.6 非线性回归·····	(CPM)·····	433
345	7.6.1 时间与费用关系	
5.5.7 移动平均预测法	图·····	433
·····	7.6.2 时间与费用最优	
351	化的算法·····	436
5.5.8 指数平滑预测法	附录·····	448
·····		
357		
5.5.9 简单季节预测法		
·····		
366		
5.6 马尔柯夫分		
析·····		
371		
5.6.1 马尔柯夫过程··		
371		
5.6.2 转移矩阵·····		
374		
5.6.3 市场占有率的预		
测·····		
378		
第六章博奕论·····		
383		

第一章 微分与积分

1.1 函数的导数

1.1.1 函数的导数

函数的导数：设函数 $y = f(x)$ 的自变量在点 x 有一改变量 Δx 时，函数 y 相应地有一改变量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 。

如果 Δx 趋于零时，比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在（一确定的有限值），

则称这个极限为函数 $f(x)$ 在点 x 的导数，记作

$$\begin{aligned} y' = y'_x = f'(x) &= \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

这时称函数 $f(x)$ 在点 x 是可微分的函数。

例如求 $y = ax + b$ 的导数

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= a(x + \Delta x) + b = ax + a \cdot \Delta x + b \\ \Delta y &= a \cdot \Delta x \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a \cdot \Delta x}{\Delta x} = a$$

所以，

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

即一次函数 $f(x) = ax + b$ 的导数就等于直线 $y = ax + b$ 的斜率。此结论可以推广到一般情况，即函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数描述了 $y = f(x)$ 的图形在 $x = x_0$ 处切线的斜率。

求导数的基本法则如下：

1. 四则运算求导公式

若 c 为常数，函数 $u = u(x)$ ， $v = v(x)$ 都有导数，则

$$(c)' = 0$$

$$(cu)' = cu'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

2. 复合函数的导数

若 $y = f(u)$ ， $u = \varphi(x)$ 都有导数，则

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x)$$

3. 反函数的导数

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x 有不等于零的导数，并且反函数

数 $x = f^{-1}(y)$ 在点 y 连续，那么 $\frac{dx}{dy}$ 存在并且等于 $\frac{1}{y'}$ ，即

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$$

4. 隐函数的导数

假定函数 $F(x, y)$ 连续，对于每个自变量都有连续的偏导数，且 $F'_y(x, y) \neq 0$ ，则由

$$F(x, y) = 0$$

所决定的函数 $y = f(x)$ 的导数为

$$y' = y'_x = - \frac{F'_x}{F'_y}$$

常用函数的导数如表 (1.1—1) 所示。

表 1.1—1

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	x^x	$x^x(1 + \ln x)$
x^n	nx^{n-1}	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\log a^x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\lg x$	$\frac{1}{x} \lg e \approx 0.4343 \frac{1}{x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

1.1.2 高阶导数

高阶导数：函数 $y = f(x)$ 的高阶导数由下列关系式逐步地给出（假设所对应的运算都有意义）：

$$f^{(n)}(x) = \left\{ f^{(n-1)}(x) \right\}' \quad (n = 1, 2, \dots)$$

或写成：

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ f^{(n-1)}(x) \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

本书所述的函数，如未加说明，均系指单值、光滑、连

续的单变量函数。

例: $y = f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4$, 则,

一阶导数为: $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x$

二阶导数为: $\frac{d^2}{dx^2} f(x) = f''(x) = 12x^2 + 12x + 6$

三阶导数为: $\frac{d^3}{dx^3} f(x) = f^{(3)}(x) = 24x + 12$

四阶导数为: $\frac{d^4}{dx^4} f(x) = f^{(4)}(x) = 24$

五阶导数为: $\frac{d^5}{dx^5} f(x) = f^{(5)}(x) = 0$

几个常用函数的高阶导数如表1.1-2所示

1.1.3 偏导数

偏导数: 设二元函数为

$$u = f(x, y)$$

当自变量 x 有一个改变量 Δx , 而自变量 y 保持不变时, 得到函数 u 的一个改变量

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

如果 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

存在, 那么这个极限称为函数 $u = f(x, y)$ 关于变量 x 的偏导

数, 记作 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, 也记作 $f'_x(x, y)$, 即

表 1.1—2

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
x^m	$m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$ (当 m 为整数且 $n > m$ 时, $f^{(n)}(x) = 0$)
$\sqrt[n]{x}$	$(-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2n-1}{2}}}$ 这里 $(2n-3)!! = (2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$
e^x	e^x
e^{mx}	$m^n e^{mx}$
a^x	$a^x (\ln a)^n \quad (a > 0)$
$\ln x$	$(-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ln a} \cdot \frac{1}{x^n}$
$\sin x$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin(mx)$	$m^n \sin\left(mx + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos(mx)$	$m^n \cos\left(mx + \frac{n\pi}{2}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f'_1(x, y)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

类似地, 可以给出二元函数 $u = f(x, y)$ 关于变量 y 的偏

导数，为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f'_y(x, y) \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\end{aligned}$$

偏导数可以按照一个变量的函数的求导法则求出，只需对所论变量求导数，其余变量都被看做常数。

例：若 $y = 8x_1^2 + 7x_1x_2 + 9x_2^2$ ，有

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 7x_1 + 18x_2$$

若 $y = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2x_3$ ，有

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2ax_1 + dx_2x_3$$

1.2 平均成本的变动率等

例1：如果总成本 $g(x)$ 由固定成本 K_0 与变动成本 $K(x)$ 组成， $g(x)$ 与 $K(x)$ 均系产品数量 x 的函数，而 K_0 与 x 无关为一常量，有：

$$g(x) = K_0 + K(x)$$

则 $g(x)$ 的导数 $g'(x)$ 为边际成本，有

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(K_0) + \frac{d}{dx}[K(x)] = K'(x)$$

可见，边际成本与固定成本无关。