经济管理数学方法

贯凤和　谢　林　编

陕西科学技术出版社

经济管理数学方法

贾凤和
谢 林 编

陕西科学技术出版社

经济管理数学方法

贾凤和
谢　林　编

陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行　陕西省印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张16　字数338,000
1984年5月第1版　1984年5月第1次印刷
印数1—8,200
统一书号：4202·2　　定价：2.35元

序

人们从事的种种活动，特别是人们所从事的集体活动，不论活动是属于什么样性质的，是经济活动，还是非经济的科研活动、文化教育活动，甚至是军事活动等；也不论这种活动是宏观的还是微观的，都是在一个特定的环境之下，具有一个明确的整体目标，包含着若干个可以相互区别、相互联系而又相互作用的要素相结合的集合体。也就是说，一种活动就是一个系统。为了更好地实现一种活动或一个系统的整体目标，缺乏好的管理是不行的。

对一种活动或一个系统进行有效的管理，不仅要仔细考核它的质，确定它的性质；而且必须十分重视它的量，要对量进行认真的研究。不如此，就很难对它们的情况做到透彻了解，做到心中有“数”。当然也就搞不好相应的管理工作。以工厂企业的生产经营活动为例，不论是生产、劳动、物资、工艺、成本、财务、销售、经营等具体业务工作，还是计划、预测、市场调查、协调、控制、决策等综合管理工作等等，都有大量的“数”形成种种“信息流”，需要进行综合、分析、判断和处理。随着管理工作的不断深入和现代科学技术的日益发展，企业生产经营活动中需要加工处理的数据不仅它的量越来越大，而且要求处理的时间也十分紧迫。往往由于一个数据未得到处理，就会给生产经营上带来影响，甚至会造成经济上的重大损失。可见，在管理工作

上，量的问题是个十分重要的问题。

要加工处理管理工作中"数"的问题，离开了数学方法是不成的。管理上运用数学已有很久历史，但"管理数学"成为一门独立学科，那则是近二三十年的事。二次世界大战后，运筹学中许多重要分支和控制论、优化数学等新的数学方法的发展，电子技术突飞猛进，电子计算机得到广泛运用，不仅扩大数学在管理上应用范围，促进管理数学的发展，同时也大大提高了现代化管理的水平。

"管理数学"涉及到的数学方法较多，一般说来，除去它包括常量数学和微积分学的必要基本内容外，它还包括线性代数、运筹学、概率论和数理统计等方面的内容。线性代数中的矩阵理论和线性方程组是管理数学的重要内容；现代化管理中需要电子计算机来处理大量数据，数据矩阵化是使用电子计算机的重要手段之一；管理的目的就是使活动目标达到最优化，即耗费的劳动和资源最少而能获得好的效果，因此，运筹学，特别是运筹学中的线性规划，在经济研究和管理中运用得十分广泛；博奕论、统筹学和排队论也得到广泛的应用；在经济研究和管理工作中有大量的随机因素要处理，因而概率论和数理统计在经济管理中应用得很普遍；此外，模糊数学等也开始在管理中得到了应用。

应该指出，上述种种数学方法在管理上的应用，都要依靠电子计算机进行数据处理的，如果没有电子计算机的发展，很多数学方法在管理上是无法应用的。

对本书我认为有这样的几个特点：第一，管理中所涉及到的一些最主要的数学方法几乎都讲到了，从书的内容排列上看，也照顾数学本身的系统性，内容虽多，但条理清楚。

第二，着眼于应用，本书讲的是数学方法，但不着重于数学本身的论证和公式推导，而是在简练地叙述与经济管理有关的数学方法之后，重点是在讨论如何用数学方法来解决管理中的实际问题。第三，书中所论述的数学方法，一般都列出数值求解公式，这就为利用电子计算机编写上机程序提供了方便。

总之，我认为这本书对于从事管理的实际工作者，企业的领导干部、经济管理人员和工程技术人员，以及从事管理教学和科研人员，则提供了一本较为系统的参考书。虽然，这本书还有些不足之处，比如有些数学方法还可增添，我国实际的例子还可多举一些等。虽然如此，但在当前全国人民重视管理工作的情况下，能看到这本书，是值得高兴的。因而，我写几句，做点介绍。

陈 炳 富

前　　言

目前，无论在经济研究或先进的管理方面都广泛地用到数学方法。因此，如果能把经济管理方面所用到的数学方法，按数学系统做一简明的阐述，不是着重于数学上的论证，而是通过例子阐明如何用数学方法解决各种经济管理方面的问题，在叙述上，依据方法上的特点，对微观和宏观问题分别有所侧重，并给出国内外正在应用的先进管理方法和经济模型，那么，不论是对从事管理、经济研究的人员，还是对有关专业的学生及自修人员，都将是有益的。这正是作者编写本书的指导思想。

由于时间仓促，书中难免有不足之处，请读者批评指正。

天津市管理现代化研究会副会长、南开大学管理学系主任陈炳富副教授为本书写了序言。西安交通大学数学系副主任游兆永教授和张文修副教授审阅了本书。在此一并表示感谢。

作　　者

于南开大学经济研究所

目　录

第一章　微分与积分

1.1　函数的导数

1·1·1　函数的导数

函数的导数：设函数$y=f(x)$的自变量在点x有一改变量$\triangle x$时，函数y相应地有一改变量$\triangle y=f(x+\triangle x)-f(x)$。如果$\triangle x$趋于零时，比$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$的极限存在（一确定的有限值），则称这个极限为函数$f(x)$在点$x$的导数，记作

$$y'=y'_x=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

这时称函数$f(x)$在点x是可微分的函数。

例如求$y=ax+b$的导数

$$y+\triangle y=a(x+\triangle x)+b=ax+a\cdot\triangle x+b$$

$$\triangle y=a\cdot\triangle x$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{a\cdot\triangle x}{\triangle x}=a$$

所以，

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=a$$

即一次函数$f(x)=ax+b$的导数就等于直线$y=ax+b$的斜率。此结论可以推广到一般情况，即函数$f(x)$在$x=x_0$处的导数描述了$y=f(x)$的图形在$x=x_0$处切线的斜率。

求导数的基本法则如下：

1.四则运算求导公式

若c为常数，函数$u=u(x)$，$v=v(x)$都有导数，则

$(c)'=0$　　　　$(cu)'=cu'$

$(u\pm v)'=u'\pm v'$　　　　$(uv)'=u'v+uv'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\qquad(v\neq 0)$$

2.复合函数的导数

若$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$都有导数，则

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x)$$

3.反函数的导数

如果函数$y=f(x)$在点x有不等于零的导数，并且反函数$x=f^{-1}(y)$在点y连续，那么$\frac{dx}{dy}$存在并且等于$\frac{1}{y'_x}$，即

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'_x}$$

4.隐函数的导数

假定函数$F(x,y)$连续，对于每个自变量都有连续的偏导数，且$F'_y(x,y)\neq 0$，则由

$$F(x,y)=0$$

所决定的函数$y=f(x)$的导数为

$$y' = y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

常用函数的导数如表（1.1—1）所示。

表　1.1—1

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	O	x^x	$x^x(1+lnx)$
x^n	nx^{n-1}	lnx	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$loga^x$	$\frac{1}{xlna}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	lgx	$\frac{1}{x}lge\approx 0.4343\frac{1}{x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$Sinx$	$cosx$
e^x	e^x	$Cosx$	$-sinx$
a^x	$a^x l_n a$	tgx	$\frac{1}{cos^2x}=sec^2x$

1·1·2 高阶导数

高阶导数：函数$y=f(x)$ 的高阶导数由下列关系式逐步地给出（假设所对应的运算都有意义）：

$$f^{(n)}(x) = \left\{ f^{(n-1)}(x) \right\}' \quad (n=1,2,\cdots)$$

或写成：

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d}{dx}\left\{ f^{(n-1)}(x)\right\} \quad (n=1,2,\cdots)$$

本书所述的函数，如未加说明，均系指单值、光滑、连

续的单变量函数。

例： $y=f(x)=x^4+2x^3+3x^2+4$， 则，

一阶导数为：$\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)=4x^3+6x^2+6x$

二阶导数为：$\frac{d^2}{dx^2}f(x)=f''(x)=12x^2+12x+6$

三阶导数为：$\frac{d^3}{dx^3}f(x)=f^{(3)}(x)=24x+12$

四阶导数为：$\frac{d^4}{dx^4}f(x)=f^{(4)}(x)=24$

五阶导数为：$\frac{d^5}{dx^5}f(x)=f^{(5)}(x)=0$

几个常用函数的高阶导数如表1.1—2所示

1·1·3 偏导数

偏导数：设二元函数为

$$u=f(x,y)$$

当自变量x有一个改变量$\triangle x$，而自变量y保持不变时，得到函数u的一个改变量

$$\triangle u=f(x+\triangle x,y)-f(x,y)$$

如果$\triangle x\to 0$时，极限

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle u}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x,y)-f(x,y)}{\triangle x}$$

存在，那么这个极限称为函数$u=f(x,y)$关于变量x的偏导数，记作$\frac{\partial u}{\partial x}$或$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$，也记作$f'_x(x,y)$，即

表 1.1—2

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
x^m	$m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$ (当m为整数且$n>m$时，$f^{(n)}(x)=o$)
$\sqrt{x}$	$(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2n-1}{2}}}$ 这里 $(2n-3)!!=(2n-3)(2n-5)\cdots5.3.1$
e^x	e^x
e^{mx}	m^ne^{mx}
a^x	$a^x(lna)^n \quad (a>o)$
lnx	$(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$
$logax$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{lna}\cdot\frac{1}{x^n}$
$Sinx$	$Sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$Cosx$	$Cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$Sin(mx)$	$m^nSin\left(mx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$Cos(mx)$	$m^nCos\left(mx+\frac{n\pi}{2}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=f_x'(x,y)$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle u}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x,y)-f(x,y)}{\triangle x}$$

类似地，可以给出二元函数 $u=f(x,y)$ 关于变量y的偏

导数，为

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f'_y(x,y)$$

$$=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{\triangle u}{\triangle y}=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{f(x,y+\triangle y)-f(x,y)}{\triangle y}$$

偏导数可以按照一个变量的函数的求导法则求出，只需对所论变量求导数，其余变量都被看做常数。

例： 若 $y=8x_1^2+7x_1x_2+9x_2^2$， 有

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}=7x_1+18x_2$$

若 $y=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+dx_1x_2x_3$，有

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=2ax_1+dx_2x_3$$

1.2 平均成本的变动率等

例1： 如果总成本$g(x)$由固定成本K_0与变动成本$K(x)$组成，$g(x)$与$K(x)$均系产品数量x的函数，而K_0与x无关为一常量，有：

$$g(x)=K_0+K(x)$$

则$g(x)$的导数$g'(x)$为边际成本，有

$$g'(x)=\frac{d}{dx}(K_0)+\frac{d}{dx}[K(x)]=K'(x)$$

可见，边际成本与固定成本无关。