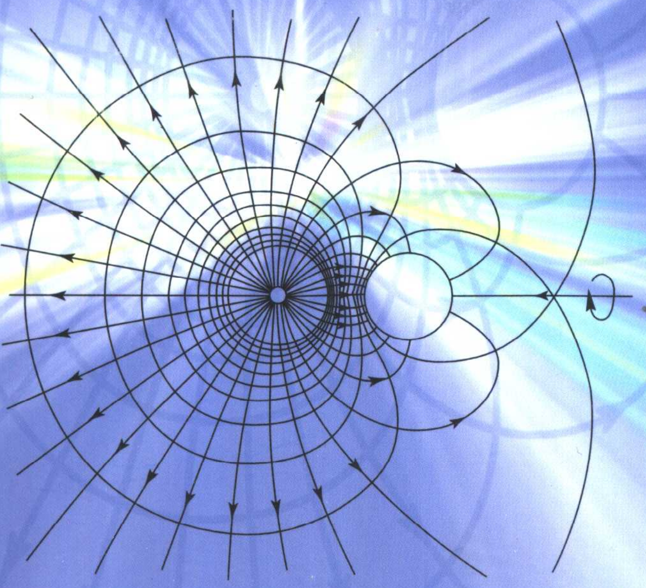
面向21世纪课程教材

《工程电磁场导论》习题详解

王仲奕　刘补生　邱捷



西安交通大学出版社

面向21世纪课程教材

《工程电磁场导论》
习题详解

王仲奕　刘补生　邱　捷

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书是与教育部面向21世纪课程教材《工程电磁场导论》配套使用的辅助教学用书。书中对教材中的全部习题进行了详细解答，对思考题作了简答。

本书对使用和学习《工程电磁场导论》的教师和学生将是一本很好的学习参考书，也可以做为电气工程和自动化类各专业学生以及夜大、函大学生学习电磁场理论的辅助教材。

图书在版编目(CIP)数据

《工程电磁场导论》习题详解 / 王仲奕等编 .—西安：西安交通大学出版社，2001.6
ISBN 7-5605-1413-8

Ⅰ.工… Ⅱ.王… Ⅲ.电磁场-高等学校-解题
Ⅳ.O441.4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 022118 号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市兴庆南路 25 号 邮政编码:710049 电话:(029)2668316)
陕西宝石兰印务有限责任公司印装
各地新华书店经销

*

开本:787 mm×960 mm 1/16 印张:17.5 字数:288 千字
2001 年 6 月第 1 版 2001 年 6 月第 1 次印刷
印数:0 001～4 000 定价:23.00 元

前　言

“电磁场理论”是电类专业的一门重要的技术基础课，它是在物理学的基础上系统地阐述电磁场的基本属性、运动规律以及与带电物质相互作用的一门学科。时值今日，电磁场的应用已广泛而深入地渗透到科学的各个领域，形成了许多专门的学科。因此，掌握好电磁场的基本理论将有助于更好地解释自然和改造世界。

多年来，对于正在学习电磁场理论的学生和刚开始从事电磁场课程教学的教师都有这样的体会，那就是电磁场课程是本科教学中难教、难学的课程。其原因之一，是这门学科理论抽象，需运用较多的数学知识和有关场的概念来求解问题；原因之二，是教学课时压缩，教师课堂讲授例题减少，致使初次学习这门课程者在解题时常遇到较大的困难。而一本书的习题又往往是该书的重要组成部分，通过对习题的分析求解，有助于对书中基本原理的深刻理解。鉴于以上原因，我们编写了这本习题解，作为《工程电磁场导论》配套使用的辅助教材。希望本书给学习者以帮助，在一定程度上解决电磁场课程难教、难学的问题。

本书对《工程电磁场导论》中的每一道习题给出了一种解答方法，对思考题做了简答。习题的解答力求与《工程电磁场导论》各章、节讲述的内容密切配合，主要用当节、当章所讲述的内容作解答，以便深化和掌握该节、该章所讲授的基本概念和基本分析方法。本书在解题的过程中力求做到精心思考与分析，注重阐述分析问题和解决问题的方法；对一些易于混淆的物理概念，力求通过分析比较给予澄清；对于教材中所涉及的一些较为深难的问题，力求用深入浅出的方法加以分析讨论；对于数学工具在电磁场中的应用，也给予足够的重视。其目的在于提供学习电磁场课程的参考与比较，而对于自学者，则有启发与提示的作用。

应当明确，一个问题的解答方法常因思维的角度不同而异，很多习题并不是只有一种求解方法。特别是思考题的讨论，无论在教或学的过程中，都是一项比较困难的任务。由于思考题的灵活多变，对其解答的具体方式和深浅程度不易掌握，因而容易引起争论，稍有考虑不周，还会出现错误，但我们还是尝试去做了。我们认为对不同意见的争论，可以促进大家思考更多的问题，它对于深入理解电磁场理论的基本概念和规律，提高分析问题和解决问题的能力，是很有帮助的。

由于我们的水平和能力有限，加之编写时间仓促，缺点错误和不全面之处在所难免，希望广大读者谅解和指正。

编者

2001 年 4 月

目　录

第六章　平面电磁波的传播

第七章　均匀传输线中的导行电磁波

第八章　波导与谐振腔

模拟试题 1

模拟试题 2

第一章　静电场

习题(1-1)

1-1-1　真空中有一密度为2π nC/m的无限长电荷沿 y 轴放置，另有密度分别为 0.1 nC/m^2 和 -0.1 nC/m^2 的无限大带电平面分别位于 $z=3$ m 和 $z=-4$ m 处。试求 P 点(1,7,2)的电场强度 $\boldsymbol{E}$。

解　$z=3$ m 和 $z=-4$ m 的带电平面产生的电场为

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{cases}-\dfrac{0.1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z & (-4<z<3)\\ 0 & (z<-4 \text{ 或 } z>3)\end{cases}$$

沿 y 轴放置的线电荷产生的电场为

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{2\pi}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\boldsymbol{e}_x+\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\boldsymbol{e}_z\right)$$
$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+z^2)}(x\boldsymbol{e}_x+z\boldsymbol{e}_z)\quad \text{nV/m}$$

所以，P 点(1,7,2)的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$$
$$=-\frac{0.1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{1+4}(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_z)$$
$$=22.59\boldsymbol{e}_x+33.88\boldsymbol{e}_z\quad \text{V/m}$$

应用叠加原理计算电场强度时，要注意是矢量的叠加。

1-1-2　一充满电荷(电荷体密度为常数 ρ_0)的球，证明球内各点场强与到球心的距离成正比。

解　应用叠加原理，将带电球体分割成无限多个同心薄球壳，它们都可视为一均匀带电球面。所有薄球壳在同一场点上的元场强(可利用教材中例 1-3 的结果求得)的叠加就是需求的总场强。

求球内离球心距离 r 处的场强。半径 $r'(r'<r)$、厚度 $\mathrm{d}r'$ 的带电薄壳的电荷元 $\mathrm{d}q=\rho_0 4\pi r'^2\mathrm{d}r'$，它在 r 处的场强为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1=\frac{\rho_0 4\pi r'^2\mathrm{d}r'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

半径 $r'(r'>r)$的带电薄壳在 r 处的场强

$$dE_2 = 0$$

于是,球内场强

$$d\boldsymbol{E} = d\boldsymbol{E}_1 + d\boldsymbol{E}_2$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_r \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 r^2}\int_0^r r'^2 dr' = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r \qquad (r<a)$$

说明球内各点的场强与到球心的距离成正比。

本题应用教材 1-2 节中的高斯定律证明将更简便。

1-1-3 已知电位函数 $\varphi=\dfrac{10}{x+y^2+z^3}$,试求 $\boldsymbol{E}$,并计算在(0,0,2)及(5,3,2)点处的 $\boldsymbol{E}$ 值。

解 $$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)$$
$$=\frac{10}{(x+y^2+z^3)^2}(\boldsymbol{e}_x+2y\boldsymbol{e}_y+3z^2\boldsymbol{e}_z)$$

代入数据,得

$$\boldsymbol{E}(0,0,2)=(0.156\boldsymbol{e}_x+1.875\boldsymbol{e}_z)\quad \text{V/m}$$
$$\boldsymbol{E}(5,3,2)=(0.021\boldsymbol{e}_x+0.124\boldsymbol{e}_y+0.248\boldsymbol{e}_z)\quad \text{V/m}$$

1-1-4 证明两等量而异号的长直平行线电荷场中的等位面是一组圆柱面。

解 设两等量异号长直平行线电荷 τ 和 $-\tau$ 都与 xoy 平面垂直,且分别位于$(d,0)$和$(-d,0)$,那么 xoy 平面内任一点 $P(x,y)$的电位为

$$\varphi(x,y)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(x+d)^2+y^2}}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}}$$

这里,已经取 $x=0$ 平面为电位参考点。

由上式可知,当

$$\frac{\sqrt{(x+d)^2+y^2}}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}}=K$$

时,φ 为常数。故该式为等位线的方程式。平方之,并整理得

$$\left(x-\frac{K^2+1}{K^2-1}d\right)^2+y^2=\left(\frac{2dK}{K^2-1}\right)^2$$

这是圆的方程。可见,在 xoy 平面上,等位线是一族圆心在 x 轴上的偏心圆,即等位面是一些偏心的圆柱面。

习题(1-2)

1-2-1 一点电荷 q 放在无界均匀介质中的一个球形空腔中心,设介质的

介电常数为 ε，空腔的半径为 a，求空腔表面的极化电荷面密度。

解　由高斯定律，介质中的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{e}_r$$

由关系式　$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，得电极化强度为

$$\boldsymbol{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{e}_r$$

因此，空腔表面的极化电荷面密度为

$$\sigma_p=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n\Big|_{r=a}=\boldsymbol{P}(a)\cdot(-\boldsymbol{e}_r)=-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)q}{4\pi\varepsilon a^2}$$

1-2-2　求下列情况下，真空中带电面之间的电压：

(1) 相距为 a 的两无限大平行板，电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$；

(2) 无限长同轴圆柱面，半径分别为 a 和 $b(b>a)$，每单位长度上电荷：内柱为 τ 而外柱为 $-\tau$；

(3) 半径分别为 R_1 和 R_2 的两同心球面 $(R_2>R_1)$，带有均匀分布的面积电荷，内外球面电荷总量分别为 q 和 $-q$。

解　(1) 因两无限大平行板间电场强度为

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

所以，电压

$$U=Ea=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a$$

(2) 因两圆柱面间的电场强度为

$$E=E_\rho=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

所以，电压

$$U=\int_a^b\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathrm{d}\rho=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

(3) 因两球面间的电场强度为

$$E=E_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

所以，电压

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

1-2-3　高压同轴线的最佳尺寸设计——一高压同轴圆柱电缆，外导体的内半径为 2 cm，内外导体间电介质的击穿场强为 200 kV/cm。内导体的半径

为 a,其值可以自由选定,但有一最佳值。因为若 a 太大,内外导体的间隙就变得很小,以致在给定的电压下,最大的 E 会超过电介质的击穿场强。另一方面,由于 E 的最大值 E_{m} 总是在内导体表面上,当 a 很小时,其表面的 E 必定很大。试问 a 为何值时,该电缆能承受最大电压?并求此最大电压值。

解 设内外导体的半径分别为 a 和 b。显然,最大场强出现在 $\rho=a$ 处。由高斯定律,求得介质中的电场为

$$E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon\rho}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon a}\ \frac{a}{\rho}=E_{\mathrm{m}}\frac{a}{\rho}$$

内外导体间的电压为

$$U=\int_a^b E_{\mathrm{m}}\frac{a}{\rho}\mathrm{d}\rho\ =\ aE_{\mathrm{m}}\ln\frac{b}{a}$$

可见 U 随 a 而变化,但不是一单调函数,必存在一极值。为求此极值,必有

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}=0$$

由此,得

$$\ln\frac{b}{a}-1=0$$

即

$$a=\frac{b}{\mathrm{e}}$$

因此,取 $a=\frac{b}{\mathrm{e}}$ 时,该电缆能承受最大电压

$$U_{\mathrm{m}}=\frac{b}{\mathrm{e}}E_{\mathrm{m}}\ln\frac{b}{b/\mathrm{e}}=\frac{b}{\mathrm{e}}E_{\mathrm{m}}$$

代入数据 $b=2\ \mathrm{cm}$, $E_{\mathrm{m}}=20\ 000\ \mathrm{kV/m}$,得

$$a=\frac{2}{\mathrm{e}}=0.736\quad \mathrm{cm}$$

$$U_{\mathrm{m}}=\frac{2\times10^{-2}}{\mathrm{e}}\times 20\ 000=147\quad \mathrm{kV}$$

习题(1-3)

1-3-1 从静电场基本方程出发,证明当电介质均匀时,极化电荷密度 ρ_{p} 存在的条件是自由电荷的体密度 ρ 不为零,且有关系式 $\rho_{\mathrm{p}}=-(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho$。

解 均匀介质的 ε 为常数。从关系式 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ 及 $D=\varepsilon E$,得介质中的电极化强度

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon}=(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\boldsymbol{D}$$

极化电荷密度

$$\rho_p = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} = -\nabla\cdot[(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\boldsymbol{D}]$$

$$= -\boldsymbol{D}\cdot\nabla(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}) - (1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\nabla\cdot\boldsymbol{D}$$

由于$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$和$\nabla(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})=0$,故上式成为

$$\rho_p = -(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho$$

1-3-2 试证明不均匀电介质在没有自由电荷体密度时可能有极化电荷体密度,并导出极化电荷体密度ρ_p的表示式。

解 由习题(1-3-1)知,极化电荷体密度

$$\rho_p = -\boldsymbol{D}\cdot\nabla(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}) - (1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\nabla\cdot\boldsymbol{D}$$

对于不均匀介质,$\varepsilon\neq$常数,故$\nabla(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\neq0$,没有自由电荷体密度时,$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$。因此

$$\rho_p = -\boldsymbol{D}\cdot\nabla(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}) = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon^2}\boldsymbol{D}\cdot\nabla\varepsilon$$

这说明不均匀电介质在没有自由电荷体密度时,可能有极化电荷体密度ρ_p。

1-3-3 两种介质分界面为平面,已知$\varepsilon_1=4\varepsilon_0$,$\varepsilon_2=2\varepsilon_0$,且分界面一侧的电场$E_1=100$ V/m,其方向与分界面的法向成45°角,求分界面另一侧的电场E_2的值。

解 介质1一侧电场的法向分量和切向分量为

$$E_{1t}=E_1\sin45°=50\sqrt{2} \quad \text{V/m}$$

$$E_{1n}=E_1\cos45°=50\sqrt{2} \quad \text{V/m}$$

根据分界面上的衔接条件,E的切向分量和D的法向分量分别连续,因此

$$E_{2t}=E_{1t}=50\sqrt{2} \quad \text{V/m}$$

$$D_{2n}=D_{1n}=\varepsilon_1E_{1n}=4\varepsilon_0\times50\sqrt{2}$$

而

$$E_{2n}=\frac{D_{2n}}{\varepsilon_2}=\frac{4\varepsilon_0\times50\sqrt{2}}{2\varepsilon_0}=100\sqrt{2} \quad \text{V/m}$$

最后得

$$E_2=\sqrt{E_{2t}^2+E_{2n}^2}=\sqrt{50^2\times2+100^2\times2}$$
$$=158.11 \quad \text{V/m}$$

E_2 与分界面法向间的夹角，由静电场的折射定律$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$，得

$$\tan\alpha_2=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\tan\alpha_1=\frac{2\varepsilon_0}{4\varepsilon_0}\tan45^\circ=\frac{1}{2}$$

所以
$$\alpha_2=26.57^\circ$$

习题(1－4)

1－4－1 电荷按 $\rho=\frac{\alpha}{r^2}$的规律分布于 $R_1\leqslant r\leqslant R_2$ 的球壳层中，其中 α 为常数，试由泊松方程直接积分求电位分布。

解 选球坐标系，球心与原点重合。由对称性知，电位 φ 仅为 r 坐标的函数，故

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}r}\right)=0 \qquad (0\leqslant r<R_1)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}=-\frac{\alpha}{\varepsilon_0 r^2} \qquad (R_1<r<R_2)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}r}\right)=0 \qquad (R_2<r<\infty)$$

积分之，得通解为

$$\varphi_1(r)=\frac{C_1}{r}+C_2 \qquad (0\leqslant r<R_1)$$

$$\varphi_2(r)=-\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\ln r+\frac{C_3}{r}+C_4 \qquad (R_1<r<R_2)$$

$$\varphi_3(r)=\frac{C_5}{r}+C_6 \qquad (R_2<r<\infty)$$

下面来确定积分常数。

因 $r\to0$ 时，φ_1 应为有限值，故 $C_1=0$；$r\to\infty$时，$\varphi_3(\infty)=0$，故 $C_6=0$。

当 $r=R_1$ 时，$\varphi_1=\varphi_2$，故

$$C_2=-\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\ln R_1+\frac{C_3}{R_1}+C_4$$

及 $\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=R_1}=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=R_1}$，故有

$$-\frac{\alpha}{\varepsilon_0 R_1}-\frac{C_3}{R_1^2}=0 \quad\Rightarrow\quad C_3=-\frac{\alpha}{\varepsilon_0}R_1$$

当 $r=R_2$ 时，$\varphi_2=\varphi_3$ 及 $\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=R_2}=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}\Big|_{r=R_2}$，故有

$$-\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\ln R_2+\frac{C_3}{R_2}+C_4=\frac{C_5}{R_2}$$

$$-\frac{\alpha}{\varepsilon_0 R_2}-\frac{C_3}{R_2^2}=-\frac{C_5}{R_2^2}$$

解之,得

$$C_2=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$C_3=-\frac{\alpha}{\varepsilon_0}R_1$$

$$C_4=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}(1+\ln R_2)$$

$$C_5=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}(R_2-R_1)$$

从而有

$$\varphi_1(r)=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}\qquad(0\leqslant r<R_1)$$

$$\varphi_2(r)=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{r}+\frac{\alpha}{\varepsilon_0}(1-\frac{R_1}{r})\qquad(R_1<r<R_2)$$

$$\varphi_3(r)=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}(R_2-R_1)\frac{1}{r}\qquad(R_2<r<\infty)$$

本题说明,由泊松方程式拉普拉斯方程求解电位分布时,要注意$\nabla\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$和$\nabla^2\varphi=0$适用于各向同性的线性均匀电介质,当所求场域存在多种电介质或不同电荷密度的区域,则需分区设不同的φ函数,分别求解,再根据不同区域边界上φ的衔接条件定积分常数。

1-4-2　两平行导体平放,相距为d,板的尺寸远大于d,一板电位为零,另一板电位为V_0,两板间充满电荷,电荷体密度与距离成正比,即$\rho(x)=\rho_0 x$。试求两板间的电位分布(注:$x=0$处板的电位为零)。

解　平板可视为无限大平板的情况,且由于$\rho(x)=\rho_0 x$,则电位φ仅为坐标x的函数。这样,泊松方程就简化成

$$\nabla^2\varphi=\frac{d^2\varphi}{dx^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}x$$

积分之,得通解为

$$\varphi(x)=-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}x^3+C_1x+C_2$$

应用给定的边界条件:$x=0,\varphi=0;x=d,\varphi=V_0$,故

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ V_0 = -\dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0}d^3 + C_1 d, \quad 即\ C_1 = \dfrac{V_0}{d} + \dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0}d^2 \end{cases}$$

从而得

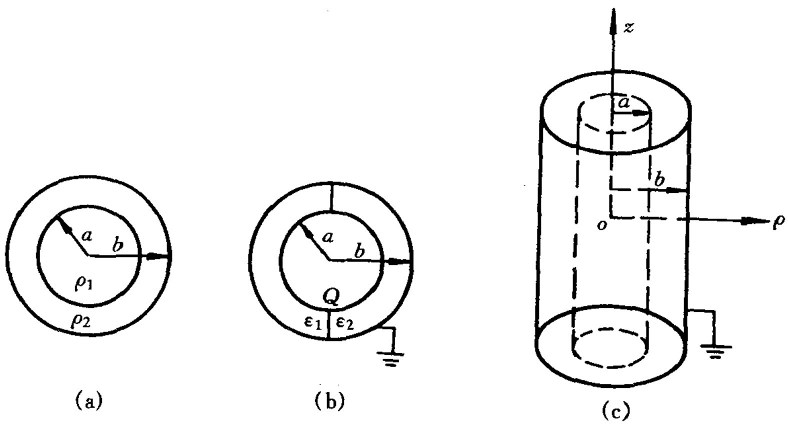
$$\varphi(x) = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}x^3 + \left(\frac{V_0}{d} + \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}d^2\right)x$$

1-4-3 写出下列静电场的边值问题:

(1) 电荷体密度分别为 ρ_1 和 ρ_2,半径分别为 a 与 b 的双层同心带电球体(如题 1-4-3 图(a));

(2) 在两同心导体球壳间,左半部和右半部分别填充介电常数为 ε_1 与 ε_2 的均匀介质,内球壳带总电荷量为 Q,外球壳接地(如题 1-4-3 图(b));

(3) 半径分别为 a 与 b 的两无限长空心同轴圆柱面导体,内圆柱表面上单位长度的电量为 τ,外圆柱面导体接地(如题 1-4-3 图(c))。



题 1-4-3 图

解 (1) 选球坐标系,球心与原点重合。由对称性可知,电位 φ 仅为 r 的函数,故有如下静电场边值问题:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}r}\right)=-\dfrac{\rho_1}{\varepsilon_0} & (0\leqslant r<a)\\
\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}r}\right)=-\dfrac{\rho_2}{\varepsilon_0} & (a<r<b)\\
\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}r}\right)=0 & (b<r<\infty)\\
\varphi_1\Big|_{r=a}=\varphi_2\Big|_{r=a},\ \varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=a}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=a} & \\
\varphi_2\Big|_{r=b}=\varphi_3\Big|_{r=b},\ \varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=b}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial r}\Big|_{r=b} & \\
\varphi_1\Big|_{r\to0}=\text{有限值},\ \varphi_3\Big|_{r\to\infty}=0 &
\end{cases}
$$

(2) 选球坐标系,球心与原点重合。分析可知,电位 φ 仅为 r 的函数,故有如下的静电场边值问题:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}r}\right)=0 & (\text{在介质 }\varepsilon_1\text{ 中})\\
\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}r}\right)=0 & (\text{在介质 }\varepsilon_2\text{ 中})\\
\varphi_1\Big|_{r=b}=\varphi_2\Big|_{r=b}=0 & \\
\displaystyle\int_{S_{\text{左半面}}}-\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\mathrm{d}S+\int_{S_{\text{右半面}}}-\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\mathrm{d}S=Q & \\
\varphi_1=\varphi_2 & (\text{在介质分界面上})
\end{cases}
$$

由于在 $a<r<b$,有 $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$,所以以上边值问题可以简化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)=0\\
\varphi\Big|_{r=b}=0\\
\displaystyle\int_S\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\mathrm{d}S=-\dfrac{Q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}
\end{cases}
$$

(3) 选圆柱坐标系,z 轴与圆柱导体面的轴线重合,因圆柱导体无限长,故由对称性可知,电位 φ 仅为 ρ 的函数,有如下的静电场边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho})=0 \qquad (a<\rho<b)\\ \varphi\Big|_{\rho=b}=0\\ -\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho}\Big|_{\rho=a}\times 2\pi a=\tau\end{cases}$$

习题(1-5)

1-5-1 一长直接地金属槽,其三壁的电位为零,顶盖电位为 $V_0\sin\dfrac{\pi x}{a}$,如图所示。求金属槽内的电位分布。

解 边值问题为:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad (\text{在金属槽内}) & (1)\\ \varphi(0,y)=\varphi(a,y)=\varphi(x,0)=0 & (2)\\ \varphi(x,h)=V_0\sin\dfrac{\pi x}{a} & (3)\end{cases}$$

应用分离变量法,得满足方程(1)和边界条件(2)的解形式为

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{sh}\frac{n\pi y}{a}$$

利用边界条件(3),则有

$$V_0\sin\frac{\pi x}{a}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{sh}\frac{n\pi h}{a}$$

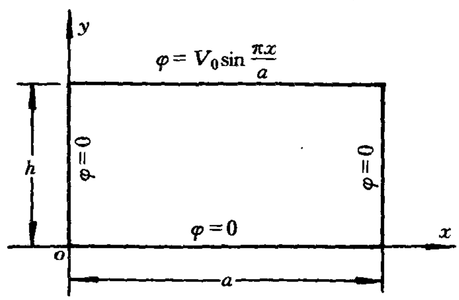
比较系数,便得

$$A_1=\frac{V_0}{\mathrm{sh}\dfrac{\pi h}{a}}$$

$$A_n=0 \qquad (n\neq 1)$$

所以最终得电位 φ 的解答是

$$\varphi(x,y)=\frac{V_0}{\mathrm{sh}\dfrac{\pi h}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{sh}\frac{\pi y}{a}$$



题1-5-1图

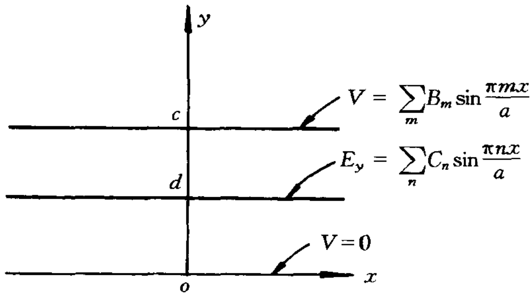
1-5-2 在直角坐标中 $y=0$ 的面是零电位,$y=c$ 的电位是

$$V\equiv\sum_m B_m\sin\frac{\pi mx}{a}$$

若使 $y=d(c>d>0)$ 处电场的 y 分量是

$$E_y=\sum_n C_n\sin\frac{\pi nx}{a}$$

问 B_m 的表示式如何？



题 1－5－2 图

解　在 $0\leqslant y\leqslant c$ 的两极板间，无自由电荷分布，故电位 φ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi=0$。从边界条件

$$\varphi\Big|_{y=0}\quad 和\quad \varphi\Big|_{y=d}=V\equiv\sum_m B_m\sin\frac{\pi mx}{a}$$

知，满足拉普拉斯方程的电位 φ 的解形式可取为

$$\varphi(x,y)=\sum_{m=1}B_m\sin\frac{\pi mx}{a}\,\mathrm{sh}\frac{\pi my}{a}\Big/\mathrm{sh}\frac{\pi mc}{a}$$

由此得，在 $y=d$ 处的电场分量是

$$E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=d}=-\sum_{m=1}B_m\frac{\pi m}{a}\sin\frac{\pi mx}{a}\mathrm{ch}\frac{\pi md}{a}\Big/\mathrm{sh}\frac{\pi mc}{a}$$

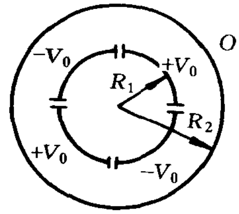
利用已给条件 $E_y\Big|_{y=d}=\sum_n C_n\sin\frac{\pi nx}{a}$，得

$$-\sum_{m=1}B_m\frac{\pi m}{a}\sin\frac{\pi mx}{a}\mathrm{ch}\frac{\pi md}{a}\Big/\mathrm{sh}\frac{\pi mc}{a}=\sum_{m=1}C_m\sin\frac{\pi mx}{a}$$

比较两边系数，得

$$B_m=-\frac{aC_m}{\pi m}\mathrm{sh}\frac{\pi mc}{a}\Big/\mathrm{ch}\frac{\pi md}{a}$$

1－5－3　一个半径为 R_1 的四片整流子与一个半径为 $R_2(R_2>R_1)$ 的接地圆管同轴，求其间电位的分布。整流片的电位交错为 $\pm V_0$。



题 1－5－3 图

解　选圆柱坐标系，使圆管的轴线与 z 轴重合。由于圆管可看作无限长，电位 φ 仅为 (ρ,ϕ) 的函数，与 z 坐标无关，故有静电场边值问题：