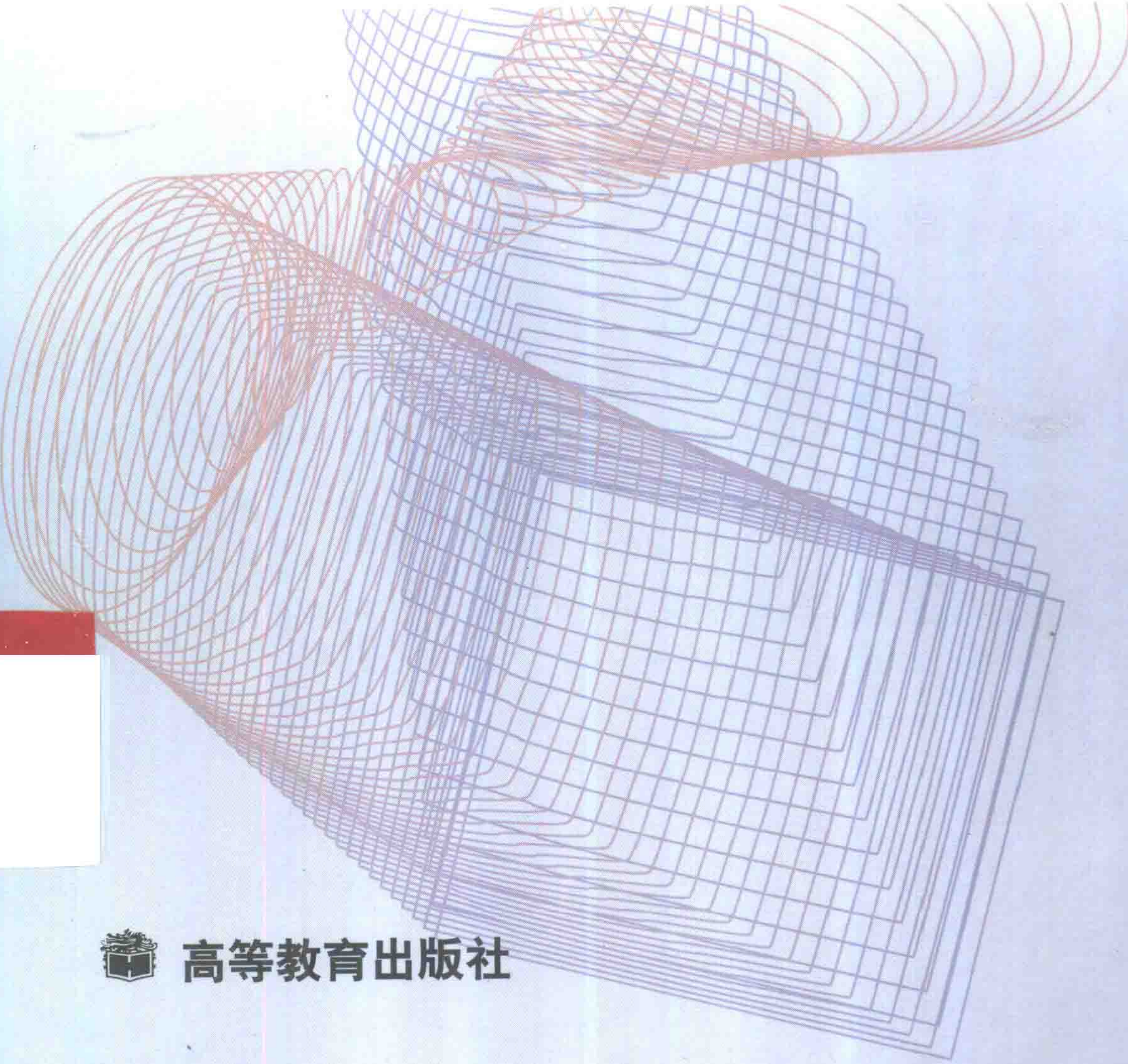
高等学校教材

高等代数与解析几何

谭宜家 编



高等教育出版社

高等代数与解析几何
谭宜家 编
版社

高等学校教材

高等代数与解析几何

谭宜家 编

高等教育出版社

内容提要

本书系统地介绍了高等代数与解析几何的基本理论与方法，把代数与几何有机地结合起来，既保持它们各自的独立性，又反映它们之间的统一性。本书层次清晰，论证严谨，联系实际，例题丰富。内容包括矢量代数与仿射几何，矢量代数与欧氏几何，n 维向量空间，矩阵代数，行列式，多项式代数与多项式矩阵，线性空间，欧氏空间与酉空间，同态与线性映射，特征值与特征向量，双线性函数与二次型等，并配有丰富的习题供读者练习。

本书可作为高等院校数学类各专业的高等代数与解析几何教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何/谭宜家编.—北京:高等教育出版社,2001

ISBN 7-04-010032-0

Ⅰ.高… Ⅱ.谭… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教材 ②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 023731 号

责任编辑 王 瑜 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 郝 林
版式设计 马静如 **责任校对** 存 怡 **责任印制** 杨 明

高等代数与解析几何
谭宜家 编

出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电 话	010-64054588	传 真	010-64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	中国农业出版社印刷厂		
开 本	787×1092 1/16	版 次	2001 年 7 月第 1 版
印 张	19.75	印 次	2001 年 7 月第 1 次印刷
字 数	480 000	定 价	16.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

高等代数与空间解析几何是大学数学系各专业的两门重要基础课,也是数学系的传统基础课.这些基础课的内容凝聚着数学发展史上许多伟大研究成果.学习这些成果是学生学习后继课程必不可少的工具,它们在教学中占有重要的地位.我们知道,解析几何的研究对象是用代数方法(坐标法和矢量法)研究空间几何图形及有关问题,而线性代数讨论的线性空间是源于解析几何中的矢量代数,并进一步抽象推广出来的.代数的许多基本概念与方法有很强的几何背景.这两部分内容本来就有紧密的联系,可以说是不可分割的.然而,在传统的课程中,往往将这两部分内容分开,设置为高等代数,空间解析几何两门课程,这样很难处理好代数理论与几何的关系.主要表现在:

1. 空间解析几何一般是大学一年级第一学期开设的课程,学生没有足够的代数知识为几何提供必要的研究工具,不得不把所需要的代数工具列入几何课程中,这样造成了不必要的内容重复与课时浪费;

2. 在高等代数课程中,又很少介绍代数理论的几何背景,在一定程度上造成代数与几何的脱节现象,致使学生在学代数课时仍感到很抽象,难以理解.

另一方面,随着社会经济、科学技术的发展和教学改革的不断深入,在大学教学中要反映科学的新发展、新成果,就必须在大学开设一些新的课程,这样不得不减少基础课程的课时.

面对上述情况与要求,对数学系的高等代数,空间解析几何两门主要基础课进行课程内容与体系整改已迫在眉睫.因此,我们在处理这两门传统基础课时,要赋予新的现代数学观点,要有意识地突出课程的数学思想与方法,建立新的课程体系,使我们的课程体系与教学内容既符合学生认识事物的教育客观规律,又符合当代数学教育思想和适应21世纪时代的要求.这种新的课程体系的基本思想是:以现代数学的思想与语言统筹高等代数与空间解析几何的基本教学内容,既保持它们各自的独立性又反映出它们之间的统一性.将这两门课程有机地结合在一起,组成一门新的课程——高等代数与解析几何.通过这门课程的学习,不仅能使学生掌握高等代数与空间解析几何的基本理论、内容与方法,提高学生的逻辑思维、运算与空间想象能力,同时还使学生得到现代数学语言、思想与方法的初步训练,以利于后继课程的学习.下面谈谈本教材的主要特点:

1. 本教材以线性空间为基础,线性映射为主线,以矩阵为工具,将代数与几何的教学内容有机地结合在一起,进行统一处理.在课程体系与内容结构上,先让解析几何为代数提供几何背景,然后以代数为工具解释几何现象,将读者逐步引到以线性空间为基础,以线性映射为主线的广阔天地中去,形成代数与几何相互交叉的格局.这样做不仅可以借助几何直观使一些抽象的代数概念和理论变得容易接受,而且也可以借助矩阵方法处理解析几何中一些原本比较困难的问题.

2. 突出现代数学思想与方法,用运算的语言和代数系统的思想去统筹“多项式代数”,“矩阵代数”,“线性空间”,“欧氏空间”,“双线性函数”等内容;用等价关系与集合分类的思想去统筹“矩阵的等价”,“矩阵的合同”,“矩阵的相似”,“向量组的等价”,“群的同构”,“环的同构”以及“线性

空间的同构”等标准内容.

3. 突出矩阵初等变换的地位.教材中除了介绍传统课程中常用的初等变换解线性方程组,计算行列式,求矩阵的逆,计算矩阵的秩,求矩阵的等价标准形与合同标准形,还介绍了用初等变换讨论 n 维向量的线性关系.

本教材的内容主要分两大部分:第一部分以线性空间为核心,共有八章,即第一～八章.第一章介绍解析几何中矢量的线性运算,建立仿射坐标系,讨论空间中平面与直线的仿射性质,为学习线性空间提供几何背景.第二章介绍矢量的另外几种代数运算,引入空间直角坐标系,讨论空间中直线与平面的度量性质,为学习欧氏空间提供几何背景.本章最后还讨论了空间中常见的二次曲面.第三章在中学的二元、三元线性方程组的基础上引入一般线性方程组的概念,并介绍解线性方程组的一般方法——高斯消元法,进而引入 n 维向量的概念,讨论向量组的线性相关性,并引入矩阵的秩这个重要参数.第四章介绍矩阵的代数运算、矩阵的初等变换与等价标准形以及矩阵分块的技巧.第五章在二阶、三阶行列式的基础上引入 n 阶行列式的概念,讨论行列式的性质,并通过例子介绍行列式计算的基本方法与技巧,最后给出行列式的几个应用.第六章讨论一元多项式理论与多项式矩阵.至于多元多项式理论则在近世代数中讨论.第七章讨论线性空间、线性子空间的概念、性质与代数结构.它们是矢量空间中相关内容的推广.第八章讨论欧氏空间与酉空间,在这里向量的模与夹角起着关键性作用.第二部分主要讨论线性映射及其应用,共有三章.即第九～十一章.第九章讨论线性映射及欧氏空间的保模线性映射,并应用它们讨论解析几何的等距变换与仿射变换.第十章讨论科技中常用的特征值与特征向量问题,并通过它们讨论矩阵的对角化与一般矩阵的Jordan标准形问题.第十一章讨论双线性函数与二次型,并论述二次型在数学分析中的应用,同时利用二次型理论讨论二次曲面的仿射标准方程与度量标准方程.

本教材是原国家教委教改项目“面向21世纪应用数学专业类教学内容与课程体系改革研究”的成果之一,已在福州大学数学系应用数学专业、信息与计算科学专业试用多次并作了多次修改.福州大学数学系雷英果教授审阅了本书的第一稿,湖北大学数学系王学宽教授审读了全书.他们独到和中肯的意见使本书增色不少.本书的编写与出版得到了福州大学“面向21世纪教学内容与课程体系改革”项目的经费资助,并得到高等教育出版社的鼎力支持.编者谨向他们表示由衷的感谢.

限于学识水平,不妥之处实属难免,敬请广大读者批评指正.

编著者

2000年10月于福州大学

目　录

第一章　矢量代数与仿射几何

在中学数学中，我们已学过平面解析几何，所用的研究方法是在平面坐标系的基础上，用坐标表示平面中的点，用方程表示平面中的曲线（包括直线），通过研究方程的特征间接地来研究平面曲线的性质，从而使许多较复杂的平面几何问题得以简化．类似地，在将要学习的空间解析几何中，我们将建立空间坐标系，并用坐标表示空间中的点，用方程表示曲面（包括平面）（用方程组表示空间曲线）．通过研究方程（组）的特征间接地研究曲面（空间曲线）的性质．不同的是，在这里我们还将充分利用矢量这一工具．

本章从矢量的线性运算入手，充分结合几何形象，讨论矢量的线性关系．在此基础上，给出空间仿射坐标系的定义．然后以矢量的线性运算为基础，引用点的坐标与矢量的坐标来处理几何空间中的直线和平面的相互结合以及平行问题．

§1　矢量及其线性运算

自然界有一些量只要确定了测量单位就可以用一个实数表示．例如长度，面积，体积，温度，时间……．这类量通常称为**数量**．而另一类量，如速度，加速度，力，位移等，它们既有大小又有方向，只用一个数就不足以反映它们的本质，这类量称为**矢量**（或**向量**）．矢量不只是物理量的抽象，它也是几何空间的基本几何量．通过它可以反映几何空间中点与点之间的位置关系．在对矢量引进运算以后，就成为研究几何的有力工具．在今后的学习中将会看到，无论是几何空间中直线、平面问题的讨论，还是代数中方程组解的理论研究，以及许多重要课题的分析研讨，如能借助于矢量这一工具，都将使我们对问题有较深刻的认识和理解，工作也能简便得多．

1.1　矢量及其表示

定义 1.1　**矢量**是既有大小（用一个非负实数表示）又有方向的量．用 V_3 表示空间中所有矢量组成之集．

矢量的几何描述是这样的：从起点 A 到终点 B 作有向线段 $\overrightarrow{AB}$，A,B 两点的距离是该矢量的大小，而 A 到 B 的方向是该矢量的方向．今后，常用字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 或 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 等来表示矢量．见图 1-1 所示．

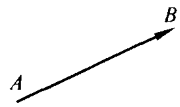


图 1-1

矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的大小称为矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**模**（或**范数**），用 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ 表示．

两个矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 称为**相等**，记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$，如果 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\|\boldsymbol{\beta}\|$，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 同方向．两个矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 称为**相反矢量**，记作 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$，如果 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\|\boldsymbol{\beta}\|$，且 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 方向相反．

应该注意的是，几何上讨论的矢量，不强调起、终点的位置，只强调大小与方向，称为**自由矢量**．而在实际问题里，使用矢量分析问题（如在力学中力的分析），常与矢量的起点（作用点）有关、

而且矢量不能任意平移.

这里所讨论的矢量均以自由矢量为前提,即讨论矢量的共性问题.

方向相同或相反的矢量称为**平行矢量(或共线矢量)**.平行矢量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$ 一般表示为 $\boldsymbol{\alpha}//\boldsymbol{\beta}$.

终点与始点重合的矢量称为**零矢量**.用 $\mathbf{0}$ 表示,零矢量的长度为 0,没有确定的方向,我们规定:一切零矢量都相等.

模为 1 的矢量称为**单位矢量(或幺矢)**,两个单位矢量一般不平行,即使平行,也不一定有相同方向,因此,它们一般不相等.

1.2 矢量的线性运算

在物理学中,作用在同一点的两个力可以看成两个矢量,它们的合力是以这两个力为边的平行四边形对角线上的矢量.于是,两个矢量的加法就是求两个力的合力,从而引出矢量的加法定义与运算法则.

定义 1.2 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_3$.在空间中任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\beta}$,以 OA,OB 为边作平行四边形 $OACB$.设 $\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{OC}$.则称 $\boldsymbol{\gamma}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**和**,记作 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.此种运算称为**矢量的加法**.

利用上述定义两矢量之和的方法称为**平行四边形法则**.由图 1-2 所示.

矢量的加法也可用三角形法则来确定.即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 是这样完成的:以 O 为起点作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$,再以 A 为起点作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\beta}$,然后连接 O,B 两点,则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.如图 1-3 所示.

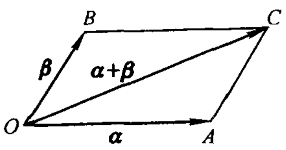


图 1-2

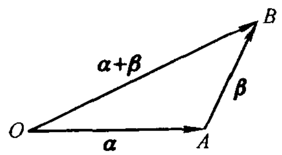


图 1-3

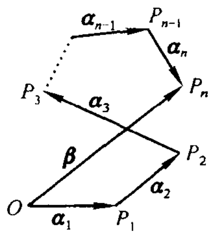


图 1-4

例如,某一质点 O 接连作了两次位移 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$,合起来也是一个位移 $\boldsymbol{\gamma}$,则 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

显然,矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与起点的选取无关,从不同的起点作图,只差一个平行移动而已.

矢量求和的三角形法则,可以推广到 n 个矢量的和,其方法称为**多边形法则**,这 n 个矢量的和可以用折线一次作出:如图 1-4 所示

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$$

由定义 1.2 可知,矢量的加法满足

(1) 交换律:$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$; (1.1)

(2) 结合律:$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$; (1.2)

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$; (1.3)

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$. (1.4)

这些就是矢量加法的基本规律,前两个式子可从图 1-5 与图 1-6 立刻得到验证,后两个式

子是显然的.

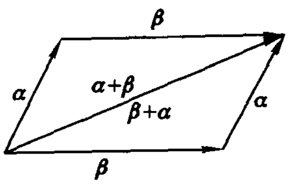


图 1-5

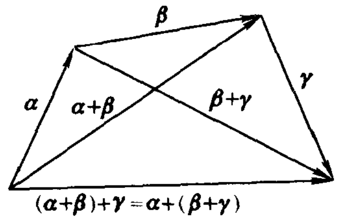


图 1-6

矢量加法的逆运算是矢量的**减法**.

定义 1.3 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_3$,定义 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$,称 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**差矢量**.

由定义1.3可知,矢量的减法也可用平行四边形法则或三角形法则进行刻画.如图1-7所示.

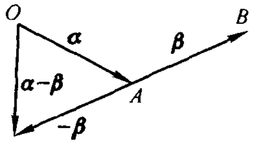


图 1-7

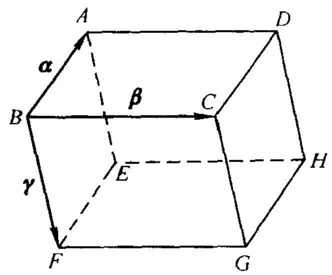


图 1-8

显然,$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 是矢量方程 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$ 的惟一解.

例 1.1 如图 1-8 所示的平行六面体上,矢量$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{\alpha}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\beta}$,$\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{\gamma}$,分别指出用 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 表示的各边矢量的式子,并求六个面的对角线矢量.

解 由于平行边上的矢量相等(注意方向),有

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GH}=\boldsymbol{\alpha}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EH}=\boldsymbol{\beta}$,

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DH}=\boldsymbol{\gamma}$,

而六个面上的对角线分别为:

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{BG}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$,$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{FC}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$,$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}$,

$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}$, $\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$, $\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$.

对于若干个相等矢量的求和,其结果是该矢量的几倍,即将其和矢量表示成倍数与矢量的乘积,将这个概念推广,就得到数与矢量的乘积概念.

定义 1.4 设 $\mathbf{R}$ 是实数集,V_3 表示所有矢量组成之集.现定义**数与矢量的乘法**,即 $\forall\lambda\in\mathbf{R}$,$\boldsymbol{\alpha}\in V_3$,在 V_3 中有惟一的矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 与之对应,称 $\boldsymbol{\beta}$ 为 λ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**乘积**,记为 $\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$.

$\boldsymbol{\beta}$ 的长度 $\|\boldsymbol{\beta}\|=\|\lambda\boldsymbol{\alpha}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{\alpha}\|$.

$\boldsymbol{\beta}$ 的方向,当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时,规定 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,这时 $\|\lambda\boldsymbol{\alpha}\|=0$,当然就不讲方向了.

定义 1.4 的几何意义是明显的,如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示位移,那么 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 就是朝着 $\boldsymbol{\alpha}$ 相同($\lambda>0$)或相反($\lambda<0$)的方向移动一段 $|\lambda|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|$ 的距离所得到的矢量.也可以说,是把 $\boldsymbol{\alpha}$ 伸缩了 $|\lambda|$ 倍,λ 是负数时表示要转方向.如图 1-9 所示.

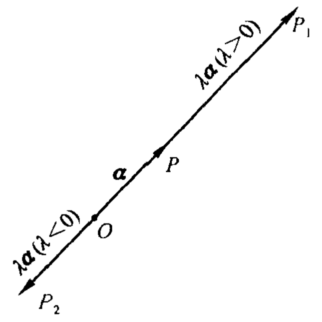


图 1-9

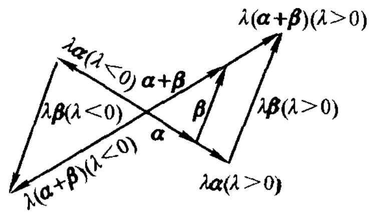


图 1-10

由定义 1.4,数与矢量的乘法满足下列运算律:

(1) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$; (1.5)

(2) 分配律 Ⅰ:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$; (1.6)

(3) 分配律 Ⅱ:$\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$; (1.7)

(4) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$,$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$. (1.8)

这里 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为矢量,λ,μ 为任意实数.

证明 为了证明上述各等式,只要证明等号两边的矢量方向相同,并且模相等即可.

(1)当 λ,μ 中至少有一个为0,或 $\boldsymbol{\alpha}$ 是零矢量时,则结合律显然成立.下面讨论 $\lambda\mu\neq0$ 及 $\boldsymbol{\alpha}\neq0$ 的情况.

首先,(1.5)式中两边矢量的模是相等的.因为:

$$\|\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})\|=|\lambda|\cdot\|\mu\boldsymbol{\alpha}\|=|\lambda|\cdot|\mu|\cdot\|\boldsymbol{\alpha}\|=|\lambda\mu|\cdot\|\boldsymbol{\alpha}\|=\|(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}\|.$$

其次,证明两边矢量的方向相同,这可从 λ 与 μ 的正负看出.例如,若 $\lambda>0$ 而 $\mu<0$,则两边矢量的方向都与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相反,因而两者同向.其余情况类似可证.

(2) (1.6)式表示位移了 λ 个 $\boldsymbol{\alpha}$,又位移了 μ 个 $\boldsymbol{\alpha}$,合起来就是位移了 $\lambda+\mu$ 个 $\boldsymbol{\alpha}$,这在 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 或 $\lambda\geqslant0$ 而且 $\mu\geqslant0$ 的情况是显然的,其他情形可类似进行讨论.

(3) (1.7)式可看作把矢量和三角形伸缩 $|\lambda|$ 倍仍是三角形.如图 1-10 所示.

(4) (1.8)式显然.

定义1.5 对于矢量集 V_3,若同时考虑 V_3 中矢量的加法与数量乘法,则称 V_3 为**矢量空间**.

例 1.2 已知△ABC 三边 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\alpha}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{\beta}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\gamma}$,三边中点依次为 D,E,F.求 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$.(如图 1-11)

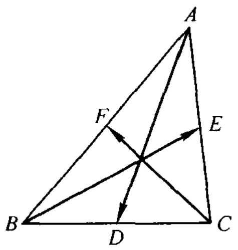


图 1 - 11

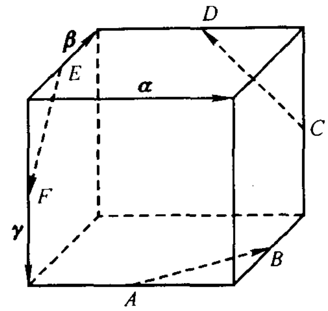


图 1 - 12

解 由题意知

$$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\gamma}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha},\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{\alpha}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta},\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{\beta}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma},$$

所以$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\frac{3}{2}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$,

但 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$,故$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$.

例 1.3 设已给平行六面体三边上的矢量为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$,$A,B,C,D,E,F$ 为各边的中点,如图 1 - 12 所示,求证

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\mathbf{0}.$$

证明 因为$\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}+\frac{\boldsymbol{\beta}}{2},\overrightarrow{CD}=-\frac{\boldsymbol{\gamma}}{2}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2},\overrightarrow{EF}=-\frac{\boldsymbol{\beta}}{2}+\frac{\boldsymbol{\gamma}}{2}$,于是

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}+\frac{\boldsymbol{\beta}}{2}-\frac{\boldsymbol{\gamma}}{2}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}-\frac{\boldsymbol{\beta}}{2}+\frac{\boldsymbol{\gamma}}{2}=\mathbf{0}.$$

1.3 共线矢量

定义 1.6 若有一组矢量均与一个矢量平行,则称该组矢量为**平行矢量**.平行矢量又称为**共线矢量**.

平行矢量的特点是:若将各矢量的起点放在同一点上,那么这些矢量均落在过该点的一条直线上,故又称为共线矢量,我们规定,零矢量与任何矢量共线.

定理 1.1 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_3$,那么 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$ 的充要条件是存在不全为零的数 $k,l\in\mathbf{R}$,使 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

证明 如果存在不全为零的数 $k,l\in\mathbf{R}$,使 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,不妨设 $k\neq0$,于是 $\boldsymbol{\alpha}=\left(-\frac{1}{k}\right)\boldsymbol{\beta}$,所以 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$.

反之,假定 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$,若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 中至少有一个是零矢量,则结论成立.现设 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$,设 $\|\boldsymbol{\alpha}\|/\|\boldsymbol{\beta}\|=\lambda(\lambda>0)$.若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 同向,则 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}$.若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 反向,则 $\boldsymbol{\alpha}=-\lambda\boldsymbol{\beta}$. ■

由定理 1.1 知,如果 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}\in V_3$,那么 $\boldsymbol{\alpha}\not\parallel\boldsymbol{\beta}$ 当且仅当 $\forall k,l\in\mathbf{R}$,由 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}\Rightarrow k=l=0$.

推论 1.1 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_3,\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$,那么 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$ 当且仅当存在惟一 $\lambda\in\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}$.

证明 充分性显然,下证必要性.

由定理 1.1 知,存在不全为零的数 $k,l\in\mathbf{R}$,使 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.若 $k=0$,则有 $l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,但 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$,所

以 $l=0$,矛盾.所以 $k\neq 0$,现取 $\lambda=-\dfrac{1}{k}$,则有 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}$.现设有 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\beta}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda_2\boldsymbol{\beta}$,$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$,则有 $(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,但 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$,所以 $\lambda_1=\lambda_2$,惟一性得证. ■

例 1.4 在 $\triangle ABC$ 中(见图1-13),D 点分 AB 边为 $m:n$,E 点分 AC 边为 $m:n$,求证 $DE/\!/BC$.

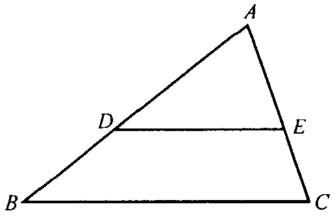


图 1-13

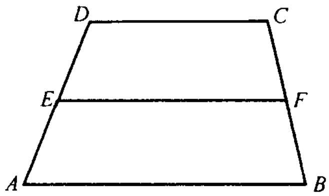


图 1-14

证明 将 $\triangle ABC$ 的边按有向线段绘出.按矢量的运算关系,有

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{BA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}=\dfrac{m}{m+n}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}.(m+n\neq 0)$,

所以 $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是共线矢量,即 $DE/\!/BC$.

例 1.5 证明梯形的中位线平行于上下底,且等于上下底边和的一半.

证明 如图 1-14,因为 $AB/\!/CD$,所以存在 $x(x>0)\in\mathbf{R}$,使 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{DC}$.

而

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF},\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF},$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}&=\frac{1}{2}((\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF}))\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\\&=\frac{1}{2}(x\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC})\\&=\frac{1}{2}(x+1)\overrightarrow{DC}.\end{aligned}$$

于是,$\overrightarrow{EF}/\!/\overrightarrow{DC}$,即 $EF/\!/DC/\!/AB$.

又因为

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{EF}\|&=\frac{1}{2}(x+1)\|\overrightarrow{DC}\|\\&=\frac{1}{2}(x\|\overrightarrow{DC}\|+\|\overrightarrow{DC}\|)\\&=\frac{1}{2}(\|x\overrightarrow{DC}\|+\|\overrightarrow{DC}\|)\\&=\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{DC}\|)\end{aligned}$$

故梯形的中位线平行于上下底且等于上下底和的一半.

1.4 共面矢量

定义 1.7 若一组矢量均平行于同一个平面,则称该组矢量为**共面矢量**.共线矢量必为共面矢量.

显然,一个矢量或两个矢量必是共面矢量.

定理 1.2 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V_3$.则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面的充要条件是存在不全为零的数 $k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}$,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$.

证明 充分性:设存在不全为零的数 $k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}$,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$,不妨设 $k_3\neq 0$,于是 $\boldsymbol{\gamma}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}$(这里 $\lambda=-\frac{k_1}{k_3},\mu=-\frac{k_2}{k_3}$).如果 λ,μ 中至少有一个是零,或 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 中至少有一个是零矢量,则均有 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面.下设 $\lambda\mu\neq 0,\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$,则由矢量加法的平行四边形法则可知,$\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\lambda\boldsymbol{\alpha},\mu\boldsymbol{\beta}$ 共面,但 $\lambda\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\alpha},\mu\boldsymbol{\beta}/\!/\boldsymbol{\beta}$,于是 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 共面.

必要性:假定 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 共面,若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 中至少有一个是零矢量,则结论显然成立.以下设 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$,把三个矢量的始点放在同一点 O(如图 1-15),则它们在同一平面上,经过 $\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{OC}$的终点$C$ 分别作直线平行于矢量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,依次交 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 所在直线于 M,N,则$\overrightarrow{OM}/\!/\boldsymbol{\alpha}$,$\overrightarrow{ON}/\!/\boldsymbol{\beta}$.现设$\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,$\overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{\beta}$,则 $\boldsymbol{\gamma}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}$. ■

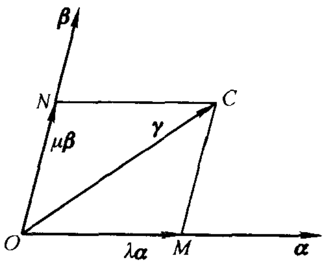


图 1-15

由定理 1.2 知,如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V_3$,那么 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 不共面当且仅当 $\forall\, k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}$,由 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$.

推论 1.2 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V_3$,且 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 不共线,那么 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面的充要条件是存在惟一的$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,使 $\boldsymbol{\gamma}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}$.

证明 充分性显然,下证必要性.

由定理 1.2 知,存在不全为零的数 $k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}$,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$.若 $k_3=0$,则有 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,但 $\boldsymbol{\alpha}\not\parallel\boldsymbol{\beta}$,所以 $k_1=k_2=0$,矛盾.于是 $k_3\neq 0$,现取 $\lambda=-\frac{k_1}{k_3},\mu=-\frac{k_2}{k_3}$,则 $\boldsymbol{\gamma}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}$.现设 $\boldsymbol{\gamma}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\mu_1\boldsymbol{\beta}$,且 $\boldsymbol{\gamma}=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}+\mu_2\boldsymbol{\beta}$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbf{R}$,则有$(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}+(\mu_1-\mu_2)\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,但 $\boldsymbol{\alpha}\not\parallel\boldsymbol{\beta}$,所以 $\lambda_1=\lambda_2,\mu_1=\mu_2$,惟一性得证. ■

1.5 矢量的分解

由推论 1.2 知,如果两个矢量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 不共线,则与 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 共面的矢量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可惟一地表示成下面形式

$$\boldsymbol{\gamma}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}$$

其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$.现将这个原理推广到空间中去.

定理 1.3 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V_3$,且 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 不共面,则 V_3 中任一矢量 $\boldsymbol{\delta}$ 可惟一地表示成下面形式

$$\boldsymbol{\delta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}+\nu\boldsymbol{\gamma}$$

其中 $\lambda,\mu,\nu\in\mathbf{R}$.

证明 由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 不共面，则 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$，且彼此不平行. 以空间一点 O 作为矢量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 的起点，以 $\boldsymbol{\delta}$ 的终点 P 作直线平行于 $\boldsymbol{\gamma}$，与 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 所在的平面交于点 Q（如图 1－16），由推论 1.2 知，$\overrightarrow{OQ}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}$，又由推论 1.1 知，$\overrightarrow{QP}=\nu\boldsymbol{\gamma}$，所以 $\boldsymbol{\delta}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}+\nu\boldsymbol{\gamma}$.

若 $\boldsymbol{\delta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\mu_1\boldsymbol{\beta}+r_1\boldsymbol{\gamma}$，且 $\boldsymbol{\delta}=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}+\mu_2\boldsymbol{\beta}+r_2\boldsymbol{\gamma}$，则有 $(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}+(\mu_1-\mu_2)\boldsymbol{\beta}+(r_1-r_2)\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，但 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 不共面，则有 $\lambda_1=\lambda_2,\mu_1=\mu_2,r_1=r_2$. ■

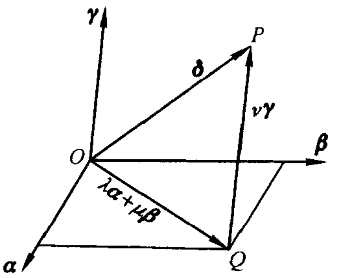


图 1－16

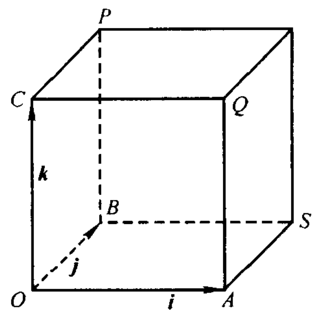


图 1－17

定义 1.8 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}\in V_3$. 若存在 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$，则称 $\boldsymbol{\beta}$ 为矢量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个**线性组合**. 因此由定理 1.3 知，V_3 中任一个矢量均可表为三个不共面矢量的线性组合，且表法惟一.

例 1.6 设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为单位正方体边上的矢量，即 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{k}$，其三个面的对角线矢量为 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\alpha},\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{\beta},\overrightarrow{OS}=\boldsymbol{\gamma}$，试把 $\boldsymbol{\delta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}+\nu\boldsymbol{\gamma}$ 写成 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的线性组合（见图 1－17）.

解 显然 $\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{OS}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$. 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}&=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}+\nu\boldsymbol{\gamma}\\&=\lambda(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+\mu(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})+\nu(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\\&=(\mu+\nu)\boldsymbol{i}+(\lambda+\nu)\boldsymbol{j}+(\lambda+\mu)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

习　题

1. 若 $ABCD$ 是一个平行四边形，O 是对角线的交点，判别下列矢量组中哪些是相等矢量，哪些是相反矢量.

(1) $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$.　　(2) $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$.

2. 矢量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 必须满足哪些几何性质，下列式子才成立？

(1) $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|=\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|$；　(2) $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|=\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$；

(3) $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|<\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|$；　(4) $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|>\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|$；

(5) $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|=\|\boldsymbol{\alpha}\|-\|\boldsymbol{\beta}\|$；　(6) $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|=\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.

3. 求三个矢量之和是零矢量的充要条件，并推广为 n 个矢量之和为零矢量的情形.

4. 已知 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=1,\|\boldsymbol{\beta}\|=3$，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角为 60°，求 $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|$ 与 $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|$.

5. 设 M 是线段 AB 之中点，O 是空间中任意一点，试证 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

6. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{\beta}$，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

7. 设 $ABCD$ 是一空间四边形，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\beta}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{\gamma}$，$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{\delta}$，求连接对角线 AC 与 BD 的中点 E、F 的矢量 $\overrightarrow{EF}$.

8. 设四面体 $OABC$ 的三条棱 AB，BC，CA 的中点为 L，M，N. 求证：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

9. 已知矢量：$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{\gamma}=6\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+6\boldsymbol{e}_3$，其中矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 不共面，问 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 是否共线？

10. 已知矢量 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_1$，问矢量 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}$ 是否共面？如果共面，写出它们的线性关系式.

11. 判别下列结论是否正确

(1) 矢量 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}/\!/\boldsymbol{\gamma}$，则必有 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\gamma}$；

(2) 矢量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 共面，$\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 共面，则 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 必共面.

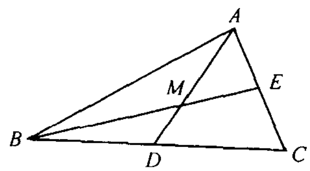
12. 设矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$，求证 A，B，D 三点共线.

13. 设矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AD}=3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$，求证 A，B，C，D 四点共面.

14. 已知矢量 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{\gamma}=6\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$，试将矢量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$ 表成矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合.

15. 用矢量证明三角形中位线定理.

16. 用矢量证明：如点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心，AD 是 BC 边上的中线(如图)，则 $AM=\frac{2}{3}AD$.



第 16 题图

17. 设 $\overrightarrow{OP_i}=\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3,4)$，证明：$P_1$，$P_2$，$P_3$，$P_4$ 四点共面的充要条件是存在不全为零的 λ_1，λ_2，λ_3，$\lambda_4\in\mathbf{R}$，使

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0} \text{ 且 } \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0.$$

§2　二阶、三阶行列式

为了能更好地运用坐标法研究空间几何问题，本节将引入二阶、三阶行列式的概念.

2.1　二阶、三阶行列式

在中学数学里，我们学过用行列式解二元一次方程组，设有方程组