高等学校财经类专业核心课程教材

经济数学基础

（第三分册　概率统计）

（修订本）

主　编 龚德恩　　副主编 范培华 胡显佑

四川人民出版社

(川) 新登字 001 号

特约编辑：朱　平
责任编辑：王　茵
封面设计：魏天禄
技术设计：古　蓉

经济数学基础（第三分册：概率统计）（修订本）
龚德恩 主编　范培华 胡显佑 副主编

四川人民出版社出版（成都盐道街3号）
四川省新华书店经销
西充县印刷厂印刷

开本 850×1168mm　1/32　印张 10.75　插页　字数 250 千
1995 年 7 月修订第 1 版　1995 年 7 月第 1 次印刷
ISBN7—220—01799—5/F.168　印数：1—10000 册

定价：12：00 元

再版说明

本书系高等学校财经类专业核心课程教材之一，初版于1992年．该书出版后，各方反映较好．由于初版成书时时间紧迫，匆忙之中难免有错误疏漏之处．今特约请作者详细修订后重新照排，从而更具正确性和合理性，便于广大师生阅读使用．

出版者

1995年7月

出版说明

1990 年，财经类专业核心课程的 10 门教学大纲通过了审定并正式出版．当年暑期，国家教委根据教学大纲组织了全国性的师资培训工作，在此基础上，为了进一步加强财经类专业的核心课程建设，国家教委决定委托教学大纲的主编根据教学大纲的要求编写教材，并争取在今、明两年内使这 10 本教材出版，供普通高等学校财经类本科专业使用．

在着手组织编写教材时，我们确定的指导思想是：教材编写应以马克思主义为指导，坚持四项基本原则，贯彻理论联系实际的原则，反映和体现中国特色；注重本学科基本理论、基本知识的介绍以及基本技能的训练，注意吸收本学科新的、比较成熟的研究成果；教材内容应观点正确、鲜明，取材准确，起点、份量适中．在介绍外国经济理论时，应根据我国与外国在国情和意识形态上的差异，本着思想性与科学性统一的原则，作必要的评论和批判．

这套教材是基本按照教学大纲编写的，除包括本课程基本内容外，选学内容比较广泛．在使用时，各专业在保证基本内容讲授的前提下，可以根据各自的要求对教学内容作必要的调整和增

删．教学大纲出版后，许多同志对教学大纲的修订提供了重要而中肯的意见，主编对这些意见进行了认真的研究，并在教材编写中予以相应采纳．因此，教材的体系和内容在教学大纲的基础上有了一些改进和调整．

编写教学大纲和教材是财经类专业核心课程建设的一项重要基础工作，有利于逐步深化教学改革，提高我国高等财经教育的教学质量．我们希望全国高等财经类专业的广大教师继续关心和支持这项工作，及时将使用这套教材中遇到的问题和改进意见向我司和作者反映，以供修订教学大纲和教材时参考．

这套《经济数学基础》教材由中国人民大学龚德恩副教授主编，北京大学范培华副教授和中国人民大学胡显佑副教授副主编．编写组成员有张学贞、靳云汇、袁荫棠．参加本教材审稿讨论的有：南开大学周概容教授，上海财经大学朱幼文副教授，江西财经学院刘序球副教授，（以下按姓氏笔划为序）内蒙古自治区财经学院马华副教授，山东经济学院王好民副教授，中国金融学院王新民副教授，陕西财经学院叶玉琴副教授，东北财经大学刘文龙副教授，天津财经学院张源教授，北京经济学院张广梵副教授，广东商学院郑万伏副教授，中央财政金融学院单立波副教授，湖南财经学院周江雄副教授，浙江财经学院周继高副教授，北京商学院顾瑾副教授，西南财经大学倪训芳副教授，中南财经大学彭勇行副教授，西北师范大学熊烈副教授．

国家教委社会科学
研究与艺术教育司
1992 年 1 月

编著者说明

受国家教委委托，中国人民大学和北京大学共同承担了编写核心课程《经济数学基础》教材的任务．这套教材是按照国家教委高等教育司1989年10月审定的“高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲”的要求编写的，由龚德恩任主编，范培华、胡显佑任副主编．全套教材分为《微积分》、《线性代数》和《概率统计》三个分册．《微积分》分册由张学贞（一、二、三、四、七章）和龚德恩（五、六、八、九、十章）编写，龚德恩统纂；《线性代数》分册由胡显佑（一、二、三章）和靳云汇（四、五、六章）编写，胡显佑统纂；《概率统计》分册由袁荫棠（一、二、三章）和范培华（四、五、六、七章）编写，范培华统纂．

在编写教材时，既要考虑到教学大纲对内容和学分的要求（学分减少而内容有所增加），又要考虑到数学学科的特点和目前国内财经类专业的实际教学情况．因此，要编写一套适合实际教学需要的高质量教材，其难度是很大的．为此，我们在编写教材时着重考虑了以下几个问题：

1．在符合教学大纲规定的内容和学分要求的前提下，希望

能尽可能多地介绍一些财经类专业所必需的数学知识．为此，教材对内容取舍、结构安排、程度要求和某些具体内容的处理等问题进行了认真的分析和研究，与现有教材相比较有所变化．另外，教材中有些内容注有“＊”号，是否讲授这些内容，各校可根据专业特点和实际教学情况决定．

2．《经济数学基础》作为财经类专业的一门基础课，编写教材时既要考虑到财经类专业对数学知识的直接或间接需要，又要考虑到学习数学对培养学生逻辑思维能力的重要性．因此，为了使读者更好地理解和掌握教材中介绍的基本原理和方法，除一些超出大纲要求或过于繁琐的定理（法则）的证明外，教材对大多数定理（法则）都给出了严格的证明，而且尽量采用文科学生易于接受的证明方法，希望这样处理既能保持数学学科本身的系统性、逻辑严密性和科学性，又有利于培养学生的逻辑思维能力．

3．目前国内已出版了不少《经济数学基础》教材，这些教材都是各兄弟院校数学教师在总结实际教学经验的基础上编写而成的，我们编写这套教材时，希望能将各兄弟院校编写《经济数学基础》教材的先进经验反映出来．为此，在编写教材过程中，我们听取了部分兄弟院校数学教师对编写教材的意见，也参考了不少兄弟院校编写的有关教材．

4．为了使读者更好地理解和掌握教材中介绍的基本原理和方法，教材中选编了相当数量的典型例题．为了提高读者运用数学知识分析和处理实际经济问题的能力，教材中介绍了一定数量的经济应用例题．为了使读者有较多的练习机会，教材中选配了大量的习题，书后附有习题参考答案．授课教师可根据实际教学情况，布置习题中的一部分给学生练习，其余部分留给学有余力的学生自行练习．

1991 年 7 月 28 日至 8 月 2 日，国家教委聘请有关专家对这套教材的初稿进行了评审．评审组的各位专家以高度负责的精

神，对教材初稿进行了严肃认真的审核，认为教材初稿基本体现了教学大纲的要求，并提出了很多具体的宝贵修改意见，这些修改意见对保证和提高教材的质量，无疑是非常有益的，在此向参加评审会的各位专家表示衷心的感谢．

1991 年 7 月中下旬，在国家教委委托中国人民大学举办的《经济数学基础》暑期师资研讨班上，各兄弟院校的老师也对教材初稿提出过很多宝贵的修改意见．在此向提出过修改意见的各校老师表示衷心的感谢．

西北师范大学熊烈副教授对《微积分》的编写曾提出过书面意见，中国人民大学莫颂清副教授曾仔细审阅过《微积分》初稿，南开大学周概容教授曾仔细审阅和修改过《概率统计》修改稿，在此向他们表示衷心的感谢．

虽然我们尽了很大的努力，希望能写出一套质量较高、适合实际教学需要的教材，但由于水平有限和时间仓促，教材中一定还会存在这样或那样的缺点和问题，敬请读者不吝指正，我们将万分感谢．

龚德恩　范培华　胡显佑

1992 年 1 月 10 日于北京

目　　录

第一章　随机事件与概率

引　言

当我们对自然界和人类社会进行考察时，将会发现两类不同性质的现象．其中一类现象，它出现与否完全取决于它所依存的条件：当条件满足时，现象一定发生，反之则一定不会发生．比如像水的物理状态的变化，我们知道，在标准大气压下，液态水的温度超过 100℃时就会汽化，这是一个必然出现的结果，而在同样的气压条件下，高于 4℃的水结冰则是一个不可能出现的结果．这类现象，我们可以根据其赖以存在的条件，事先准确地断定它们未来的结果，称之为**确定现象**．另一类现象则表现为，在相同的可控制条件下进行观察或实验，有时出现这种结果，有时又会出现那种结果．就某一现象而言，在条件相同的一系列重复观察中，会时而出现时而不出现，呈现出不确定性，并且在每次观察之前不能准确预料其是否出现．这类现象我们称之为**随机现象**．比如，保险公司的年赔偿金额，抽样检验产品质量的结果，掷一颗骰子出现的点数等等，事先我们都无法确切预言它们的结果．但是，进一步更仔细地观察和研究，你又会发现，这些无法准确预料的现象，它们并非杂乱无章的，而是存在着某种宏观的规律．也就是说，当我们在相同的条件下多次重复某一个试验时，其各种结果会表现出一定的量的规律性，我们称之为**随机现

象的**统计规律性**．以掷骰子为例，尽管掷一次时，我们不能预言是否会出现 4 点，但是重复掷多次时，将会发现 4 点的出现次数与所掷总次数的比值接近 1/6．

上面这两种现象性质的差异，决定了人们必须建立不同的概念，运用不同的方法去描写和研究它们．概率论与数理统计就是用以研究随机现象统计规律性的一门数学学科，它是近代数学的重要组成部分．

§1.1 随机事件

在概率论里，我们把对随机现象进行的实验或观察统称为**随机试验**，简称**试验**，用字母 E 表示．例如，观察社会对某种商品的日需求量；观察某段时间内电话用户的呼叫次数；从一批产品中任取一个，检验其质量；测量一个人的身高；统计某时刻地球上的人口数量、人口组成；抛掷一枚匀称的硬币等等都是随机试验．这些试验的结果都是可以观测的，并且具有下列三个特点：

1．在可控制条件相同的情况下，试验可以或原则上可以重复进行，即**重复性**．

2．每次试验的结果具有多种可能性，但是在试验之前可以明确一切可能出现的基本结果，即**明确性**．

3．在一次试验中，某种结果出现与否是不确定的，在试验之前不能准确地预言将会出现哪一种结果，即**随机性**．

一、随机事件的概念

试验的每一种可能的结果称为**事件**．在一次试验中可能出现也可能不出现的事件称为**随机事件**，简称为**事件**，用大写拉丁字

母 A，B，C，……表示，必要时加上下标．比如，A＝“正面向上”，B＝“抽到合格品”，C＝“掷出偶数点”等都是**随机事件**．在一个试验中，我们首先关心的是，它所有可能出现的基本结果，它们是试验中最简单的随机事件，称之为**基本事件**．

例 1．设试验 E 为掷一颗骰子，观察其出现的点数，在这个试验中，记事件 A_n＝“n 点”，n＝1，2，3，4，5，6．显然，A_1，A_2，…，A_6 都是基本事件．除此之外，若记 A＝“奇数点”，B＝“被 3 整除的点”，则 A，B 也都是随机事件．其中事件 A 是由 A_1，A_3，A_5 这三个基本事件组成的，我们说“奇数点这个事件出现，当且仅当 A_1，A_3，A_5 这三个基本事件中有一个出现，类似地，所谓事件 B 发生，当且仅当 A_3，A_6 这两个基本事件中有一个发生．

每次试验中一定出现的事件称为**必然事件**，用符号 Ω 表示；每次试验中一定不出现的事件称为**不可能事件**，用符号 Φ 表示．例 1 的试验 E 中，“点数大于 0”是必然事件，它是由所有基本事件 A_1，A_2，…，A_6 组成．由于每次试验中，必然出现基本事件之一，因此必然事件在试验 E 中一定出现，而“点数大于 7”在试验 E 中一定不会发生，是个不可能事件．

需要指出的是：必然事件与不可能事件是每次试验之前都可以准确预言的，其结果不是随机事件．但是为了讨论问题方便，把它们都看成是特殊的随机事件，作为随机事件的两个极端情况．再者，事件都是相对于一定的试验而言的．如果试验的条件变化了，事件的性质也将可能发生变化．例如，掷 m 颗骰子的试验，观察它们出现的点数之和，事件“点数之和小于 15”，当 m＝2时为必然事件，当 m＝3 时是随机事件，而在 m＝20 时则是不可能事件．

二、样本空间与事件

用点集的概念研究试验及其事件将有助于对它们的理解．

对于一个试验，首先需要知道它所有可能出现的基本结果，也就是试验的全部基本事件．我们把一个试验中每一个可能出现的基本结果，即每一个基本事件用只包含一个元素的单点集合表示，这样的元素称为**样本点**，通常用 ω 表示．由试验的全部基本事件对应的元素，即试验的所有样本点，组成的集合称为**样本空间**．由于任何一次试验必然出现全部基本事件之一，也就是一定有样本空间中的一个样本点出现，因此样本空间作为一个事件是必然事件，也用 Ω 表示．由一些基本事件复合而成的随机事件用由这些基本事件对应的样本点集合表示，它是样本空间的一个子集．我们称在一次试验中某随机事件出现，当且仅当该集合的一个样本点在这次试验中出现．例如，在例 1 的试验 E 中，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，基本事件 $A_i=\{i\}$，$i=1,2,\cdots,6$．$A=\{1,3,5\}$，是含三个样本点的集合，所谓事件 A 发生，即 1，3，5 这三个样本点中有一个发生，空集 Φ 作为一个事件，它在每次试验中都不会出现，因此空集 Φ 表示不可能事件．

为了直观，有时用图形表示事件，比如用平面上某一个方形(或矩形)区域表示必然事件，该区域中的一个子区域表示事件．

三、事件间的关系和运算

在研究随机现象时，我们看到同一个试验可以有很多随机事件，其中有些比较简单，有些则相当复杂．为了从较简单事件的规律中寻求较复杂事件出现的规律，我们需要研究同一试验的各种事件之间的关系和运算．

1．事件的包含与相等．如果事件 A 出现，一定导致事件 B 也出现，即 A 为 B 的子集，则称**事件 B 包含事件 A**，记住 $B\supset A$

或 $A\subset B$. 显然，对于任何事件 A，有

$$\phi\subset A\subset\Omega$$

如果事件 B 包含事件 A，而且事件 A 也包含事件 B，则称**事件 A 与 B 相等**，或称 A 与 B 等价，记作 $A=B$.

2. 事件的和（并）. 两个事件 A 与 B 中至少有一个出现，即"A 或 B"，也是一个事件，称为**事件 A 与 B 的和（并）**，记作 $A+B$ 或 $A\cup B$.

3 事件的积（交）. 两个事件 A 与 B 同时发生，即"A 且 B"，也是一个事件，称为**事件 A 和 B 的积（交）**，记作 AB 或 $A\cap B$.

读者不难定义 n 个事件，乃至无穷可列个事件和与积的运算.

4. 事件的差. 事件 A 出现而事件 B 不出现，也是一个事件，称为**事件 A 与 B 的差**，记住 $A-B$.

5. 互不相容事件. 如果事件 A 与 B 不可能同时出现，即 $AB=\phi$，则称**事件 A 和 B 互不相容**，又称 **A 与 B 互斥**. 类似地，称 **n 个事件 A_1，A_2，$\cdots A_n$ 是互不相容的**，如果它们中任何两个事件 A_i 与 A_j（$i\neq j$，i，$j=1$，2，…，n）都互不相容，**称可列个事件 A_1，A_2，…，A_n… 互不相容**，如果它们中任何两个事件都互不相容.

6. 对立事件. 事件 A 不出现，即事件"非 A"，称为 **A 的对立事件**，又称为 **A 的逆事件**，记作 $\overline{A}$. 由于 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，因此称 A 与 $\overline{A}$ 互为对立事件. 由定义可知，两个对立事件一定是互不相容事件；反之，两个互不相容的事件不一定为对立事件. 对立事件满足下面关系式：

$$\overline{\overline{A}}=A$$

$$A\overline{A}=\phi$$

$$A+\overline{A}=\Omega$$

7. **完备事件**. 如果 n 个事件 A_1, A_2, …, A_n 互不相容，并且它们的和是必然事件，则称这 n 个事件 **A_1, A_2, …, A_n 构成一个完备事件组**. 它的实际意义是在每次试验中必然发生且仅能发生 A_1, A_2, …, A_n 中的一个事件. 当 n=2 时，A_1 与 A_2 就是对立事件. 类似地，称可列个事件 **A_1, A_2, …A_n, …构成一个完备事件组**. 如果 $\sum A_i = \Omega$, 并且对于任何的 $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \cdots$), 有 $A_iA_j = \varphi$.

各事件间的关系及运算如图 1—1 所示.

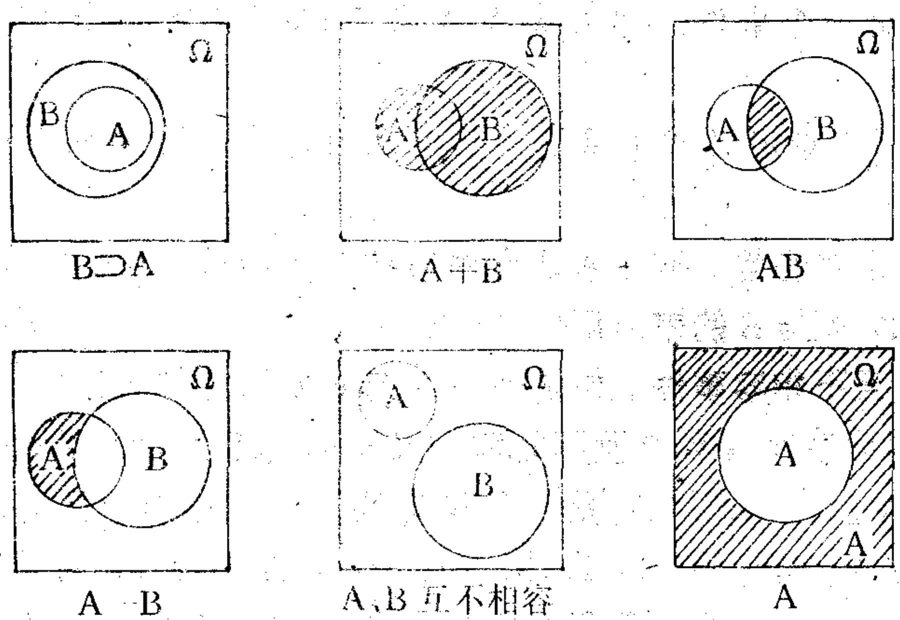

图 1—1

例 2. 在例 1 的试验 E 中，已定义的事件 A、B 不变，再令 C="点数小于 2", D="偶数点", F="点数不超过 4", 写出试验 E 的样本空间及各事件间的关系.

解

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$　　　　$A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{3, 6\}$　　　　$C = \{1\}$

$D = \{2, 4, 6\}$　　　　$F = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \supset C$, $F \supset C$;