高等学校教学参考书

数学分析中一些重要概念及其矛盾概念

吕通庆 编

人民教育出版社

本小册子由数学分析中的一些重要概念出发，推导出这些概念的矛盾概念，如无界、发散、间断、不可导、不可积、不一致收敛、不一致连续等的分析定义；讨论了数学分析中一些重要概念之间的关系；在叙述中引用了不少具体例子．可供综合大学及师范院校数学系的教师和学生参考．

高等学校教学参考书

数学分析中

一些重要概念及其

矛盾概念

吕通庆 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 1.625　字数 36,000

1979年3月第1版　1979年12月第2次印刷

印数 20,001－50,000

书号 13012·0295　　定价 0.14 元

序

我们知道，有界、收敛、连续、可导、可积、一致收敛等概念，是数学分析中的重要基本概念．要理解这些基本概念，不但要知道它的正面，还要掌握它的反面．即不但要知道这些基本概念本身，还要掌握这些基本概念的矛盾概念，诸如无界、发散、间断、不可导、不可积、不一致收敛等．而要做到这一点，就要知道它们的分析定义．可是，怎样由已知概念的分析定义，推导出它的矛盾概念的分析定义呢？这里给出一种方法．在此基础上，再来讨论数学分析中一些重要概念之间的关系．这就是这本小册子的基本内容．

由于这本小册子是作为数学分析的教学辅助材料编写的，故对于一般课本中都有的定义、定理以及一些熟知的结果，这里不再赘述，都将直接引用．

这本小册子中出现的〈　〉、《　》、《《　》》等，里面都是一个判断，表示集合中元素具有的某种性质．这里的区间 X，如果不加特别说明，可以是闭区间，也可以是非闭区间，可以是有限区间，也可以是无穷区间．

由于水平有限，时间仓促，缺点错误可能不少，诚恳期望同志们批评指正．

编　者

1977 年12 月

目　录

第一节　预备知识

一　集合

集合是数学中最基本的概念之一，它是无法用其它概念来定义的. 一般地说，我们称具有某种特定性质的事物的全体为“集合”①，其中的事物称为这个集合的“元素”. 例如，全体自然数组成一个集合，这个集合的元素是自然数.

由满足条件$\mathscr{P}$的元素组成的集合，用符号

$$\{x;\mathscr{P}\}$$

表示之. 例如，满足 $0<|x-a|<\delta$ 的 x 的全体组成的集合，用

$$\{x;0<|x-a|<\delta\}$$

表示；以在区间 X 上连续的函数 $f(x)$ 为元素组成的集合，用

$$\{f(x);f(x)\text{在} X \text{上连续}\}$$

表示.

集合，通常用大写的拉丁字母 A、B、E 等来表示它. 集合中的元素，通常用小写的拉丁字母 a、b、x 等来表示.

如果 x 是集合 E 的元素，用符号

$$x\in E$$

表示，读作“x 属于 E”.

如果 x 不是集合 E 的元素，用符号

$$x\overline{\in} E$$

表示，读作“x不属于 E”.

---

① 见 И. П. 那汤松著，徐瑞云译，陈建功校《实变函数论》(高等教育出版社，1958 年)第 1 页.

例 1 设有闭区间 $[a,b]$，在 (a,b) 内任意插入 $n-1$ 个分点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$，满足

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

就称为对闭区间 $[a,b]$ 的一个分割，记为 Δ，称小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 的长度 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$ 中的最大者 $\max\limits_{k=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_k\}$ 为在分割 Δ 之下的最大小区间长度，记为 $\|\Delta\|$.

以满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的分割 Δ 和在分割 Δ 之下，小区间 $[x_0,x_1]$ 上的点 ξ_1, $[x_1, x_2]$ 上的点 ξ_2, $\cdots$, $[x_{n-1},x_n]$ 上的点 ξ_n 为元素组成的集合，用

$$\{\Delta \text{ 和 } \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n; \|\Delta\|<\delta \text{ 和 } \xi_k\in [x_{k-1},x_k](k=1,2,\cdots,n)\}$$

表示.

最后，介绍几个有关集合的概念.

设有两个集合 A 和 B,

1° 如果对任何 $x\in A$，都有 $x\in B$，则称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$，读作"A 含于 B"，或记为 $B\supset A$，读作"B 包含 A"；

2° 如果 A 是 B 的子集，又 B 是 A 的子集，即 $A\subset B$，又 $A\supset B$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$，读作"A 等于 B"；

3° 如果 A 是 B 的子集，而 B 不是 A 的子集，即对任何 $x\in A$，都有 $x\in B$，而至少存在一个 $x_0\in B$，可是 $x_0\overline{\in} A$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A<B$.

显然，任何集合都是自身的子集.

设有两个集合 A 与 B，由既属于 A 又属于 B 的元素 x 组成的集合 $\{x; x\in A \text{ 且 } x\in B\}$，叫做集合 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x; x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

如果某个集合一个元素也没有，则称这个集合为空集.

二 “集合中元素具有某种性质”的否定判断

定义 设有两个判断 A 与 B，如果满足以下两个条件：

1° 若 A 成立，则 B 不成立；

2° 若 A 不成立，则 B 成立，

就称 A 与 B 互为否定判断，或称 A 与 B 存在着矛盾关系.

例如“$a<b$”与“$a\geqslant b$”，“$a>b$”与“$a\leqslant b$”，“$a=b$”与“$a\neq b$”，分别互为否定判断，即分别存在着矛盾关系.

定理 1 “集合中任意元素都具有某种性质”与“集合中至少存在一个元素具有与这种性质矛盾的性质”互为否定判断，即存在着矛盾关系.

证明 1° 若“集合中任意元素都具有某种性质”成立，那么，集合中任意元素都不具有与这种性质矛盾的性质，所以，“集合中至少存在一个元素具有与这种性质矛盾的性质”不成立；

2° 若“集合中任意元素都具有某种性质”不成立，那么，集合中至少存在一个元素不具有这种性质，因此，“集合中至少存在一个元素具有与这种性质矛盾的性质”成立.

由 1°、2° 知定理得证.

定理 2 “集合中至少存在一个元素具有某种性质”与“集合中任意元素都具有与这种性质矛盾的性质”互为否定判断，即存在着矛盾关系.

证明 1° 若“集合中至少存在一个元素具有某种性质”成立，即集合中至少存在一个元素不具有与这种性质矛盾的性质，因此，“集合中任意元素都具有与这种性质矛盾的性质”不成立；

2° 若“集合中至少存在一个元素具有某种性质”不成立，那么，集合中任意元素都不具有这种性质，所以，“集合中任意元素都具有与这种性质矛盾的性质”成立.

由 1°、2° 知定理得证.

例2 “集合$\{n;\ n$为自然数$\}$中任意元素n，都具有$\langle |x_n|\leqslant M\rangle$的性质”与“集合$\{n;n$为自然数$\}$中至少存在一个元素$n_0$，具有$\langle |x_{n_0}|>M\rangle$的性质”互为否定判断，即存在着矛盾关系.

例3 “集合$\{n;n>N,\ n$为自然数$\}$中至少存在一个元素n_0，具有$\langle |x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0\rangle$的性质”与“集合$\{n;n>N,\ n$为自然数$\}$中任意元素$n$，都具有$\langle |x_n-A|<\varepsilon_0\rangle$的性质”互为否定判断，即存在着矛盾关系.

例4 “集合$\{\Delta$和$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n;\ \|\Delta\|<\delta$和$\xi_k\in[x_{k-1},x_k](k=1,2,\cdots,n)\}$中任意元素$\Delta$和$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，都具有$\left\langle \left|\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|<\varepsilon_0\right\rangle$的性质”与“集合$\{\Delta$和$\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n;\ \|\Delta\|<\delta$和$\xi_k\in[x_{k-1},x_k](k=1,2,\cdots,n)\}$中至少存在一个元素$\Delta^0$和$\xi_1^0,\xi_2^0,\cdots,\xi_{n_0}^0$，具有$\left\langle \left|\sum\limits_{k=1}^{n_0}f(\xi_k^0)\Delta x_k-I\right|\geqslant\varepsilon_0\right\rangle$的性质”互为否定判断，即存在着矛盾关系.

第二节　一些重要概念的矛盾概念的分析定义

一　数列$\{x_n\}$无界的分析定义

我们知道，数列$\{x_n\}$无界与$\{x_n\}$有界互为否定判断，即存在着矛盾关系.

我们也知道，数列$\{x_n\}$有界的分析定义是"存在$M>0$，对任何自然数n，都有$|x_n|\leqslant M$成立."

"存在$M_0>0$，对任何自然数n，都有$|x_n|\leqslant M_0$成立"即"集合$\{M;M>0\}$中至少存在一个元素M_0，具有〈对任何自然数n，都有$|x_n|\leqslant M_0$成立〉的性质"的否定判断是

"集合$\{M;M>0\}$中任意元素M，都具有与〈对任何自然数n，都有$|x_n|\leqslant M$成立〉矛盾的性质"，即

"集合$\{M;M>0\}$中任意元素M，都具有与〈集合$\{n;n$为自然数$\}$中任意元素n，都具有《$|x_n|\leqslant M$》的性质〉矛盾的性质"，即

"集合$\{M;M>0\}$中任意元素M，都具有〈集合$\{n;n$为自然数$\}$中至少存在一个元素n_0，具有《$|x_{n_0}|>M$》的性质〉的性质"，即

"集合$\{M;M>0\}$中任意元素M，都具有〈至少存在一个自然数n_0，使$|x_{n_0}|>M$成立〉的性质"，即

"对任意的$M>0$，都至少存在一个自然数n_0，使$|x_{n_0}|>M$成立."

这样，就得到数列$\{x_n\}$无界的分析定义：

对任意的$M>0$，都存在自然数n_0，使$|x_{n_0}|>M$成立.

例1　试证数列$\{[1+(-1)^n]^n\}$无界.

证明 对任意的$M>0$，都存在自然数

$$n_0=2\left(\left[\frac{\log_2 M}{2}\right]+1\right)^{①}$$

使

$$|x_{n_0}|=\left[1+(-1)^{2\left(\left[\frac{\log_2 M}{2}\right]+1\right)}\right]^{2\left(\left[\frac{\log_2 M}{2}\right]+1\right)}$$

$$=2^{2\left(\left[\frac{\log_2 M}{2}\right]+1\right)}>2^{\log_2 M}=M$$

成立，依定义，数列$\{[1+(-1)^n]^n\}$无界.

二 函数$f(x)$在区间X上无界的分析定义

仿照一，可以得到函数$f(x)$在区间X上无界的分析定义：

对任意的$M>0$，都存在$x_0\in X$，使$|f(x_0)|>M$成立.

例 2 试证函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界.

证明 对任意的$M>0$，都存在

$$x_0=\frac{1}{M+1}\in(0,1)$$

使

$$|f(x_0)|=\left|\frac{1}{\frac{1}{M+1}}\right|=M+1>M$$

成立. 依定义，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界.

三 数列$\{x_n\}$不以A为极限的分析定义

数列$\{x_n\}$不以A为极限与$\{x_n\}$以A为极限互为否定判断，即存在着矛盾关系.

数列$\{x_n\}$以A为极限的分析定义是“对任意$\varepsilon>0$，都存在自然数N，对任何$n>N$，都有$|x_n-A|<\varepsilon$成立.”

---

① $[a]$表示小于等于a的最大整数. 以下同.

"对任意 $\varepsilon>0$，都存在自然数 N_0，对任何 $n>N_0$，都有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立"即"集合 $\{\varepsilon;\varepsilon>0\}$ 中任意元素 ε，都具有〈存在自然数 N_0，对任何 $n>N_0$，都有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立〉的性质"的否定判断是

"集合 $\{\varepsilon;\varepsilon>0\}$ 中至少存在一个元素 ε_0，具有与〈存在自然数 N_0，对任 $n>N_0$，都有 $|x_n-A|<\varepsilon_0$ 成立〉矛盾的性质"，即

"集合 $\{\varepsilon;\varepsilon>0\}$ 中至少存在一个元素 ε_0，具有与〈集合 $\{N;N$ 为自然数$\}$ 中至少存在一个元素 N_0，具有《对任 $n>N_0$，都有 $|x_n-A|<\varepsilon_0$ 成立》的性质〉矛盾的性质"，即

"集合 $\{\varepsilon;\varepsilon>0\}$ 中至少存在一个元素 ε_0，具有〈集合 $\{N;N$ 为自然数$\}$ 中任意元素 N，都具有与《对任何 $n>N$，都有 $|x_n-A|<\varepsilon_0$ 成立》矛盾的性质〉的性质"，即

"集合 $\{\varepsilon;\varepsilon>0\}$ 中至少存在一个元素 ε_0，具有〈集合 $\{N;N$ 为自然数$\}$ 中任意元素 N，都具有与《集合 $\{n;n>N,\ n$ 为自然数$\}$ 中任意元素 n，都具有《《$|x_n-A|<\varepsilon_0$》》的性质》矛盾的性质〉的性质"，即

"集合 $\{\varepsilon;\varepsilon>0\}$ 中至少存在一个元素 ε_0，具有〈集合 $\{N;N$ 为自然数$\}$ 中任意元素 N，都具有《集合 $\{n;n>N,\ n$ 为自然数$\}$ 中至少存在一个元素 n_0，具有《《$|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$》》的性质》的性质〉的性质"，即

"集合 $\{\varepsilon;\varepsilon>0\}$ 中至少存在一个元素 ε_0，具有〈集合 $\{N;N$ 为自然数$\}$ 中任意元素 N，都具有《至少存在一个自然数 $n_0>N$，使 $|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$ 成立》的性质〉的性质"，即

"集合 $\{\varepsilon;\varepsilon>0\}$ 中至少存在一个元素 ε_0，具有〈对任何自然数 N，都至少存在一个自然数 $n_0>N$，使 $|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$ 成立〉的性质"，即

"至少存在一个 $\varepsilon_0>0$，对任何自然数 N，都至少存在一个 $n_0>N$，使 $|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$ 成立."

于是，得到数列$\{x_n\}$不以A为极限的分析定义：

存在$\varepsilon_0>0$，对任何自然数N，都存在$n_0>N$，使$|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$成立.

例3 在数学分析中，研究了数列与其子列的收敛性之间的关系，得出"若数列$\{x_n\}$收敛于A，则其任一子列$\{x_{n_k}\}$都收敛于A."现在我们来证明它的逆命题"若数列$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_k}\}$都收敛于A，则数列$\{x_n\}$收敛于A"也是正确的.

事实上，假设数列$\{x_n\}$不收敛于A，即存在$\varepsilon_0>0$，对任何自然数N，都存在$n_0>N$，使$|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$成立. 因此，

对于$N=1$，存在$n_1>1$，使$|x_{n_1}-A|\geqslant\varepsilon_0$成立，

对于$N=n_1$，存在$n_2>n_1$，使$|x_{n_2}-A|\geqslant\varepsilon_0$成立，

对于$N=n_2$，存在$n_3>n_2$，使$|x_{n_3}-A|\geqslant\varepsilon_0$成立，

……………………………………………………

这样无限继续下去，就得到数列$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$，对任何自然数k，都有$|x_{n_k}-A|\geqslant\varepsilon_0$成立. 当然，对任意自然数$K$，都存在$k_0>K$，使$|x_{n_{k_0}}-A|\geqslant\varepsilon_0$成立.

于是，我们证明了，在假设数列$\{x_n\}$不收敛于A的条件下，必然得出存在$\varepsilon_0>0$，对任意自然数K，都存在$k_0>K$，使$|x_{n_{k_0}}-A|\geqslant\varepsilon_0$成立，即子列$\{x_{n_k}\}$不收敛于$A$的结论. 这与已知是矛盾的，故必有数列$\{x_n\}$收敛于$A$.

因此，得到数列与其子列的收敛性之间的关系定理：

数列$\{x_n\}$收敛于A的充分必要条件是其任何子列$\{x_{n_k}\}$都收敛于A.

四　函数$f(x)$当$x\to\infty$时不以A为极限的分析定义

仿照三，可以得到函数$f(x)$当$x\to\infty$时不以A为极限的分析定义：

存在$\varepsilon_0>0$，对任意$R>0$，都存在满足$|x|>R$的x_0，使得

$|f(x_0)-A|\geqslant\varepsilon_0$ 成立.

例 4 试证: 如果对任何无穷大量$\{x_n\}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

证明 用反证法.

假设函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时不以 A 为极限, 即存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意 $R>0$, 都存在满足$|x|>R$ 的x_0, 使$|f(x_0)-A|\geqslant\varepsilon_0$ 成立. 因此,

对于 $R=1$, 有满足$|x|>1$ 的 x_1, 使$|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$ 成立,

对于 $R=2$, 有满足$|x|>2$ 的 x_2, 使$|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$ 成立,

对于 $R=3$, 有满足$|x|>3$ 的 x_3, 使$|f(x_3)-A|\geqslant\varepsilon_0$ 成立,

……………………………………………………………………

这样无限继续下去, 就得到两个数列$\{x_n\}$和$\{f(x_n)\}$, 分别满足$|x_n|>n$ 和$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0(n=1,2,\cdots)$. 显然, 数列$\{x_n\}$是无穷大量, 而$\{f(x_n)\}$不以 A 为极限, 与已知矛盾. 于是, 必有

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

五 函数 $f(x)$当 $x\to a$ 时不以 A 为极限的分析定义

同样, 不难推出函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时不以 A 为极限的分析定义:

存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意 $\delta>0$, 都存在满足 $0<|x-a|<\delta$ 的x_0, 使$|f(x_0)-A|\geqslant\varepsilon_0$ 成立.

六 数列$\{x_n\}$不是无穷大量的分析定义

数列$\{x_n\}$不是无穷大量的分析定义:

存在 $M_0>0$, 对任何自然数 N, 都存在 $n_0>N$, 使$|x_{n_0}|\leqslant M_0$ 成立.

例 5 试证数列$\{x_n\}=\{[1+(-1)^n]^n\}$不是无穷大量.

证明 存在 $M_0=1>0$, 对任何自然数 N, 都有 $n_0=2N+1>N$, 使

$$|x_{n_0}| = |[1+(-1)^{2N+1}]^{2N+1}| = 0 < 1$$

成立，依定义，数列$\{x_n\} = \{[1+(-1)^n]^n\}$不是无穷大量.

七　函数 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时不是无穷大量的分析定义

函数 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时不是无穷大量的分析定义:

存在$M_0>0$，对任意 $\delta>0$，都存在满足 $0<|x-a|<\delta$ 的 x_0，使 $|f(x_0)| \leqslant M_0$ 成立.

例 6　试证：如果对任何以 a 为极限且 $x_n \neq a(n=1, 2, \cdots)$ 的数列$\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

证明　用反证法.

假设函数 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时不是无穷大量，即存在$M_0>0$，对任意 $\delta>0$，都存在满足 $0<|x-a|<\delta$ 的 x_0，使$|f(x_0)| \leqslant M_0$ 成立. 因此，

对于 $\delta=1$，存在满足 $0<|x-a|<1$ 的 x_1，使$|f(x_1)| \leqslant M_0$ 成立，

对于 $\delta=\frac{1}{2}$，存在满足 $0<|x-a|<\frac{1}{2}$的 x_2，使$|f(x_2)| \leqslant M_0$ 成立，

对于 $\delta=\frac{1}{3}$，存在满足 $0<|x-a|<\frac{1}{3}$的 x_3，使$|f(x_3)| \leqslant M_0$ 成立，

……………………………………………………

这样无限继续下去，就得到两个数列$\{x_n\}$和$\{f(x_n)\}$，分别满足 $0<|x_n-a|<\frac{1}{n}$和$|f(x_n)| \leqslant M_0(n=1, 2, \cdots)$. 显然，数列$\{x_n\}$以 a 为极限且 $x_n \neq a(n=1, 2, \cdots)$，而数列$\{f(x_n)\}$不是无穷大量，与已知矛盾. 故有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

八　函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时不是无穷大量的分析定义

函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$时不是无穷大量的分析定义:

存在 $M_0>0$，对任意 $R>0$，都存在满足 $|x|>R$ 的 x_0，使 $|f(x_0)|\leqslant M_0$ 成立.

九　数列$\{x_n\}$发散的分析定义

数列$\{x_n\}$发散的分析定义:

对任意数 A，都存在 $\varepsilon_0>0$，对任何自然数 N，都有 $n_0>N$，使 $|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$ 成立.

例 7　试证$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$发散.

证明　分两种情况讨论.

1° 对 $A\geqslant0$，存在 $\varepsilon_0=1+A>0$，对任何自然数 N，都存在 $n_0=2N+1>N$，使

$$|x_{n_0}-A|=|(-1)^{2N+1}-A|=1+A$$

成立;

2° 对 $A<0$，存在 $\varepsilon_0=1-A>0$，对任何自然数 N，都存在 $n_0=2N>N$，使

$$|x_{n_0}-A|=|(-1)^{2N}-A|=1-A$$

成立.

综合 1°、2° 知，对任意数 A，都存在 $\varepsilon_0>0$，对任何自然数 N，都存在 $n_0>N$，使 $|x_{n_0}-A|=\varepsilon_0$成立. 依定义，$\{(-1)^n\}$发散.

十　函数 $f(x)$在 a 点间断的分析定义

函数 $f(x)$在 a 点间断与 $f(x)$在 a 点连续互为否定判断，即存在着矛盾关系.

函数 $f(x)$在 a 点连续的分析定义是"函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时以 $f(a)$为极限"，即"对任意的 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使满足 $|x-a|<\delta$ 的 x，都有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ 成立."

故函数 $f(x)$ 在 a 点间断的分析定义是"函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时不以 $f(a)$为极限"，即"存在 $\varepsilon_0>0$，对任意的 $\delta>0$，都存在满足 $|x-a|<\delta$ 的 x_0，使 $|f(x_0)-f(a)|\geqslant\varepsilon_0$ 成立."

例 8 试证函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } x=0 \text{ 时}\end{cases}$$

在 $x=0$ 点间断.

证明 由于

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} 0=0\neq f(0)$$

依定义, $f(x)$ 在 $x=0$ 点间断.

例 9 试证黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 } x \text{ 为 } (0,1) \text{ 内的有理点} \dfrac{p}{q} \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为} (0,1) \text{内的无理点时}\end{cases}$$

(其中$\dfrac{p}{q}$为既约分数)在$(0,1)$内的无理点连续，而在$(0,1)$内的有理点不连续.

证明 设 x_0 是$(0,1)$内的任意一点. 对任意的 $\varepsilon>0$, 使$\dfrac{1}{q}\geqslant\varepsilon$ (即$q\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$)的 q 只有有限个, 而$\dfrac{p}{q}$是 $(0,1)$ 内的既约分数，故使$\dfrac{1}{q}\geqslant\varepsilon$ 的$(0,1)$ 内的既约分数$\dfrac{p}{q}$也只有有限个，从而在$(0,1)$内使 $f(x)\geqslant\varepsilon$ 且异于 x_0 的 x 也只有有限个, 不妨设为 $x_1, x_2, \cdots, x_m$, 取 $\delta=\min\limits_{i=1,\cdots,m}\{|x_i-x_0|\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $0\leqslant f(x)<\varepsilon$ 成立, 从而恒有 $|f(x)-0|<\varepsilon$ 成立.

这样，证明了对任意的 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-0|<\varepsilon$ 成立. 依定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. 这就说明了黎曼函数$f(x)$在$(0,1)$内的无理点连续，而在$(0,1)$内的有理点不连续.