

SCHAUM'S  
ouTlines

全美经典 学习指导系列

# 离散数学

[美] S. 利普舒尔茨 M. 利普森 著

周兴和 孙志人 张学斌 译

获取好成绩的最好帮手

涵盖了课程的所有基本内容，任一教材的补充

教授有效的解题技巧

几百道含有详细解答的习题

给出了最新的应用



科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

全美经典学习指导系列

# 离散数学

[美] S. 利普舒尔茨 著  
M. 利普森

周兴和 孙志人 张学斌 译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

## 内 容 简 介

本书共分15章,包括离散数学的最基本内容.其中包括:集合、关系、函数与算法、逻辑、向量与矩阵、计数、概率、图论、有向图、二叉树、整数的性质、代数系统、形式语言与自动机、有序集与格及布尔代数的性质.本书的特点是叙述清楚、浅显易懂、简洁明快,内容多而不杂、占有材料量大,十分易于自学.章后配有问题和解答与补充题,几乎占全书的一半以上的篇幅,提供了大量练习和学习的机会.本书是一本优秀的参考书.

读者对象:大学数学及计算机等相关专业的学生.

Seymour Lipschutz, Marc Lipson: Schaum's Outline of Theory and Problems of Discrete Mathematics, Second edition

ISBN:0-07-038045-7

Copyright © 1997 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

Authorized translation from the English language edition published by McGraw-Hill Companies, Inc.

All rights reserved.

本书中文简体字版由科学出版社和美国麦格劳-希尔教育出版集团合作出版.未经出版者书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分.

版权所有,翻印必究.

本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签,无标签者不得销售.

图字:01-2001-1774

### 图书在版编目(CIP)数据

离散数学/[美]利普舒尔茨(Lipschutz, S.)[美]利普森(Lipson, M.)著;周兴和,孙志人,张学斌译. —北京:科学出版社,2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009619-3

I. 离… II. ①利…②利…③周…④孙…⑤张… III. 离散数学 IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 047879 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

[http // www. sciencep. com](http://www.sciencep.com)

西源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2002年1月第 一 版 开本:A4(890×1240)

2002年1月第一次印刷 印张:26

印数:1—5 000 字数:747 000

定价:36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

## 译者序

本书是我们所见到的内容最为广泛的离散数学教材之一. 学生往往感到离散数学课程不仅内容多, 而且繁而又难, 枯燥无味. 但是本书叙述清楚, 浅显易懂, 简洁明快, 内容多而不杂, 占有材料量大而不难. 书中附有大量的例子, 这些例子不仅生动活泼, 语言叙述细腻, 而且紧扣实际应用和日常生活, 使人读来顺理成章, 兴趣顿生. 对于一些有难度的重要定义和定理, 这样处理之后, 都不再让人感到枯燥和困难了. 问题和解答与补充题几乎占全书一半以上的篇幅, 提供了大量的习题和理解练习机会, 是本书的又一大特点. 作为教材, 教师可有活动范围广泛的选择空间; 作为自学读本, 又十分易于入门, 大量获得知识, 相信本书将成为我国读者学习离散数学的一本优秀参考书.

本书第一章到第五章由周兴和翻译, 第六章到第十章由孙志人翻译, 第十一章到第十五章由张学斌翻译, 最后由周兴和负责全书的统稿和审校. 在翻译过程中, 我们参阅了国内外大量的离散数学资料, 力争翻译准确并保持原书的风格. 同时, 对于原书中的许多(打印)错误, 进行了力所能及的纠正, 纠正与修改之处, 恕不一一注明. 由于水平有限, 不当之处在所难免, 恳请读者批评指正.

最后, 谨对科学出版社及其科学出版中心, 特别是林鹏、吕虹、陈玉琢等的指导和帮助, 以及他们为本书出版所付出的辛勤劳动致以衷心的感谢.

译者

2001年3月

于南京师范大学随园

## 作 者 序

随着计算机科学的发展,重点研究有限系统的离散数学已经成为一门越发重要的科学.数字计算机本质上是一个有限结构,它的许多性质都可以在有限数学系统的框架下得到解释.本书包括离散数学的最基本的内容,既可作为离散数学先修课程的教材,也可作为现行课程的补充读物.

前三章讨论集合、关系、函数与算法.第四章至第七章分别讨论逻辑、向量与矩阵、计数与概率.第八章至第十章是关于图论的三章,分别讨论图、有向图和二叉树.第十一章至第十五章是相对独立的,分别讨论整数理论、代数系统、形式语言与自动机、有序集与格以及布尔代数的性质.第三章包括了对基数、可数集和计算复杂性的讨论.第八章也讨论了图的平面性、可旅行性、极小路以及 Warshall 算法和 Huffman 算法.第十三章讨论了正则表达、自动机、Turing 机以及可计算函数.基于本书内容的合理组织,改变本书章的次序不会造成学习困难也不会影响知识的连贯性.

《离散数学》第二版在内容的广度和深度上都比第一版有明显的增加.有关概率论、正则表达与正则集、二叉树、基数、计算复杂性以及 Turing 机和可计算函数等内容在第一版中或者没有出现或者仅仅是提及而已.增加这些材料的主要原因是,大部分学校都已将离散数学由一学期课程改为一学年课程.

每一章都从有关的基本定义和原理的清晰叙述开始,对于所有的定理,我们都给出了一系列的例子和其他帮助理解的材料.各章问题与解答部分的主要作用是给出增进理解学习内容的例子和该章定理的证明,而补充题则是对该章内容的完整复习.本书所包括的内容已大大超过了对初步课程要求,材料的整体组织更增进了本书作为教材的更大的灵活性,作为参考书的更强的功用性,并可以进一步提高读者学习离散数学的兴趣.

最后,我们对 McGraw-Hill Schaum 概览丛书的全体编辑人员,特别是对 Arthur Biderman 和 Maureen Walker 给予的成功合作表示衷心的感谢.

S. 利普舒尔茨  
M. 利普森

(O-1514.0101)

责任编辑：陈玉琢

全球销量  
超越 3000万 的

SCHAUM'S  
ouTlines

# “全美经典学习指导系列” 是您的最佳 学习伴侣！



40年来最畅销的教辅系列

全美著名高校资深教授倾力之作

国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译

省时高效的学习辅导，全面详细的习题解答

迄今为止国内最全面的教辅系列

覆盖大学理工科专业

## 全美经典学习指导系列

概率和统计

统计学

离散数学

Mathematica使用指南

数理金融引论

机械振动

微分方程

统计学原理（上）

统计学原理（下）

微积分

静力学与材料力学

有限元分析

传热学

近代物理学

2000工程力学习题精解

工程力学

3000物理习题精解

流体动力学

物理学基础

材料力学

2000离散数学习题精解

工程热力学

数值分析

量子力学

有机化学习题精解

3000化学习题精解

大学化学习题精解

电路

电气工程基础

工程电磁场基础

数字信号处理

数字系统导论

数字原理

电机与机电学

基本电路分析

信号与系统

微生物学

生物化学

生物学

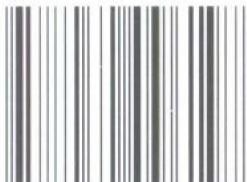
分子和细胞生物学

人体解剖与生理学

<http://www.sciencep.com>

<http://www.mheducation.com>

ISBN 7-03-009619-3



9 787030 096197 >



ISBN 7-03-009619-3/O · 1514

定价：36.00 元

# 目 录

<b>第一章 集合论</b> .....	(1)
1.1 引言 .....	(1)
1.2 集合与元素 .....	(1)
1.3 全集与空集 .....	(2)
1.4 子集 .....	(2)
1.5 Venn 图 .....	(3)
1.6 集合的运算 .....	(3)
1.7 集合的代数运算和对偶性 .....	(6)
1.8 有限集和计数原理 .....	(7)
1.9 集族, 幂集和集合的划分.....	(8)
1.10 数学归纳法 .....	(10)
问题与解答 .....	(10)
补充题 .....	(17)
补充题答案 .....	(20)
<b>第二章 关系</b> .....	(22)
2.1 引言.....	(22)
2.2 集合的积.....	(22)
2.3 关系.....	(23)
2.4 关系的图示.....	(24)
2.5 关系的合成.....	(25)
2.6 典型关系.....	(26)
2.7 闭包性质.....	(28)
2.8 等价关系.....	(29)
2.9 偏序关系.....	(30)
2.10 $n$ 元关系 .....	(30)
问题与解答 .....	(31)
补充题 .....	(37)
补充题答案 .....	(38)
<b>第三章 函数与算法</b> .....	(40)
3.1 引言.....	(40)
3.2 函数.....	(40)
3.3 一一的, 映上的与可逆的函数 .....	(42)
3.4 数学函数, 指数函数, 对数函数.....	(43)
3.5 序列, 集合的指标类 .....	(46)
3.6 递归函数.....	(47)
3.7 基数.....	(49)
3.8 算法与函数.....	(50)
3.9 算法的复杂性.....	(51)
问题与解答 .....	(53)
补充题 .....	(60)

补充题答案 .....	(62)
<b>第四章 逻辑与命题演算 .....</b>	<b>(64)</b>
4.1 引言.....	(64)
4.2 命题与复合命题.....	(64)
4.3 基本逻辑运算.....	(64)
4.4 命题与真值表.....	(66)
4.5 永真命题和永假命题.....	(67)
4.6 逻辑等价.....	(67)
4.7 命题代数.....	(68)
4.8 条件语句和双条件语句.....	(68)
4.9 论证.....	(69)
4.10 逻辑蕴含 .....	(70)
4.11 命题函数,量词.....	(71)
4.12 量词语句的否定 .....	(73)
问题与解答 .....	(75)
补充题 .....	(79)
补充题答案 .....	(80)
<b>第五章 向量与矩阵 .....</b>	<b>(83)</b>
5.1 引言.....	(83)
5.2 向量.....	(83)
5.3 矩阵.....	(85)
5.4 矩阵的加法和数乘.....	(85)
5.5 矩阵的乘法.....	(86)
5.6 转置矩阵.....	(88)
5.7 方阵.....	(88)
5.8 可逆(非奇异)矩阵和逆矩阵.....	(89)
5.9 行列式.....	(90)
5.10 初等行变换,高斯消去法.....	(92)
5.11 布尔(零-幺)矩阵.....	(96)
问题与解答 .....	(97)
补充题.....	(107)
补充题答案.....	(109)
<b>第六章 计数.....</b>	<b>(112)</b>
6.1 引言,基本计数原理.....	(112)
6.2 阶乘符号 .....	(112)
6.3 二项式系数 .....	(113)
6.4 排列 .....	(114)
6.5 组合 .....	(116)
6.6 鸽笼原理 .....	(117)
6.7 容斥原理 .....	(117)
6.8 有序划分与无序划分 .....	(118)
问题与解答.....	(119)
补充题.....	(124)
补充题答案.....	(126)
<b>第七章 概率论.....</b>	<b>(127)</b>



7.1 引言 .....	(127)
7.2 样本空间与事件 .....	(127)
7.3 有限概率空间 .....	(128)
7.4 条件概率 .....	(129)
7.5 独立事件 .....	(131)
7.6 独立重复试验,二项分布.....	(132)
7.7 随机变量 .....	(133)
问题与解答.....	(136)
补充题.....	(152)
补充题答案.....	(155)
<b>第八章 图论</b> .....	(158)
8.1 引言,数据结构.....	(158)
8.2 图与多重图 .....	(160)
8.3 子图,同构与同胚图.....	(161)
8.4 路,连通度.....	(162)
8.5 Königsberg 桥,可旅行多重图 .....	(163)
8.6 标号图与赋权图 .....	(164)
8.7 完全图,正则图与二部图.....	(165)
8.8 树图 .....	(166)
8.9 平面图 .....	(168)
8.10 图着色.....	(169)
8.11 在计算机存储器中的表示图.....	(171)
8.12 图算法.....	(173)
问题与解答.....	(176)
补充题.....	(185)
补充题答案.....	(189)
<b>第九章 有向图</b> .....	(192)
9.1 引言 .....	(192)
9.2 有向图 .....	(192)
9.3 基本定义 .....	(193)
9.4 有根树 .....	(194)
9.5 有向图的序列表示 .....	(196)
9.6 Warshall 算法,最短路 .....	(199)
9.7 有向图的链表示 .....	(201)
9.8 图算法,深度优先查找与广度优先查找.....	(203)
9.9 有向无圈图,拓扑排序.....	(205)
9.10 最短路的修剪算法.....	(207)
问题与解答.....	(209)
补充题.....	(217)
补充题答案.....	(221)
<b>第十章 二叉树</b> .....	(224)
10.1 引言.....	(224)
10.2 二叉树.....	(224)
10.3 完全二叉树与扩充二叉树.....	(225)
10.4 二叉树的存贮表示.....	(227)

10.5	穿过二叉树	(228)
10.6	二叉查找树	(229)
10.7	优先队列,堆积	(232)
10.8	路长,Huffman 算法	(234)
10.9	一般(有序有根)树回顾	(238)
	问题与解答	(240)
	补充题	(248)
	补充题答案	(251)
<b>第十一章</b>	<b>整数的性质</b>	(253)
11.1	引言	(253)
11.2	序、不等式与绝对值	(253)
11.3	数学归纳法	(254)
11.4	带余除法	(255)
11.5	整除、素数	(256)
11.6	最大公因数、带余除法	(257)
11.7	算术基本定理	(259)
11.8	同余关系	(260)
11.9	同余式	(263)
	问题与解答	(267)
	补充题	(284)
	补充题答案	(286)
<b>第十二章</b>	<b>代数系统</b>	(288)
12.1	引言	(288)
12.2	运算	(288)
12.3	半群	(290)
12.4	群	(293)
12.5	子群,正规子群和同态	(294)
12.6	环,整环和域	(297)
12.7	域上的多项式	(299)
	问题与解答	(302)
	补充题	(314)
	补充题答案	(317)
<b>第十三章</b>	<b>形式语言、形式语法和自动机</b>	(319)
13.1	引言	(319)
13.2	字母表,字符串,自由半群	(319)
13.3	形式语言	(320)
13.4	正则表达,正则语言	(321)
13.5	有限自动机	(322)
13.6	形式语法	(324)
13.7	有限状态机	(328)
13.8	Gödel 数	(330)
13.9	Turing 机	(330)
13.10	可计算的函数	(333)
	问题与解答	(335)
	补充题	(342)

补充题答案·····	(345)
<b>第十四章 有序集与格</b> ·····	(349)
14.1 引言·····	(349)
14.2 有序集·····	(349)
14.3 偏序集的 Hasse 图 ·····	(351)
14.4 相容编号·····	(352)
14.5 上确界和下确界·····	(352)
14.6 同构序集·····	(354)
14.7 良序集·····	(354)
14.8 格·····	(355)
14.9 有界格·····	(357)
14.10 分配格 ·····	(357)
14.11 补元,有补格·····	(358)
问题与解答·····	(359)
补充题·····	(367)
补充题答案·····	(370)
<b>第十五章 布尔代数</b> ·····	(374)
15.1 引言·····	(374)
15.2 基本定义·····	(374)
15.3 对偶性·····	(375)
15.4 基本定理·····	(375)
15.5 作为格的布尔代数·····	(375)
15.6 表示定理·····	(376)
15.7 集合的积和式·····	(377)
15.8 布尔代数的积和式·····	(377)
15.9 极小布尔表达式,素隐项 ·····	(379)
15.10 逻辑门与电路 ·····	(381)
15.11 真值表,布尔函数·····	(384)
15.12 Karnaugh 图·····	(386)
问题与解答·····	(390)
补充题·····	(401)
补充题答案·····	(404)

# 第一章 集合论

## 1.1 引言

集合的概念出现于所有的数学分支中. 本章引入集合论的记号和术语, 这些记号和术语都是基本的, 其使用将贯穿全书.

尽管要到第四章才正式讨论逻辑, 但是本章引入关于表示集合的 Venn 图, 并展示它在逻辑论证中的应用. 到第十五章讨论布尔代数时, 我们将进一步探索集合论与逻辑之间的关系.

在本章的最后, 我们给出数学归纳法的正式定义, 同时给出其应用实例.

## 1.2 集合与元素

集合可以看作是一些事物, 即集合的元素或成员的全体. 我们通常用大写字母表示集合, 如  $A, B, X, Y, \dots$ , 而用小写字母表示集合的元素, 如  $a, b, x, y, \dots$ . 术语“ $p$  是  $A$  的元素”或等价地“ $p$  属于  $A$ ”记作

$$p \in A.$$

而术语  $p$  不是  $A$  的元素, 即  $p \in A$  的否命题, 记作

$$p \notin A.$$

在指定其元素之后, 一个集合就被完全确定. 这个事实的正式叙述称为外延公理.

**外延公理** 两个集合  $A$  与  $B$  相等当且仅当其元素相同.

如果集合  $A$  与  $B$  相等, 则记  $A=B$ , 否则记  $A \neq B$ .

### 集合的表示

集合有两种基本的表示方法. 其一是, 在可能的情况下, 列出其元素. 例如,

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

这里集合  $A$  的元素为字母  $a, e, i, o, u$ . 注意, 元素之间用逗号隔开, 并用花括号  $\{ \}$  将它们括起来. 其二是给出集合中元素的特征性质. 例如,

$$B = \{x : x \text{ 为偶数}, x > 0\}$$

读作“ $B$  是所有大于 0 的偶数  $x$  的集合”, 注意集合  $B$  的元素一定是正整数. 我们用一个字母, 通常用  $x$  来表示集合的一般元素; 记号中的冒号读作“使得”, 而后面的逗号则读作“而且”.

**例 1.1** (a) 上述集合  $A$  可以表示为

$$A = \{x : x \text{ 是英文字母}, x \text{ 是元音字母}\}.$$

显然,  $b \notin A, e \in A$ , 而  $p \notin A$ .

(b) 对于上述集合  $B$ , 我们不能列出其所有元素, 但是通常我们将其写为

$$B = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

我们假定大家都知道其中的涵义. 显然,  $8 \in B$ , 但是  $-7 \notin B$ .

(c) 设  $E = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ . 换句话说,  $E$  所含的元素恰是方程  $x^2 - 3x + 2 = 0$  的解, 我们有时称之为给定方程的解集. 因为该方程的解为 1 和 2, 所以也可记  $E = \{1, 2\}$ .

(d) 设  $E = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  $F = \{2, 1\}$  而  $G = \{1, 2, 2, 1, 6/3\}$ . 则  $E = F = G$ . 显然, 一个集合与其元素在集合记号中的表现形式无关. 元素在集合记号中被重复书写或者改变元素在记号中的次序, 都不会改变集合本身.

有些集合在本书中将经常用到, 我们以特定的记号来表示它们. 除非特别说明, 一般设

$N$ =全体正整数的集合:  $1, 2, 3, \dots$

$Z$ =全体整数的集合:  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$Q$ =全体有理数的集合

$R$ =全体实数的集合

$C$ =全体复数的集合

有时,尽管理论上可以列出某个集合的所有元素,但实际上却不可操作. 比如,全世界生于1976年的人的集合,尽管从理论上说,我们应该可以列出其所有元素,但我们却宁愿不这样做. 也就是说,只有当集合中所含元素很少时,我们才用列举元素的方法来表示集合,否则我们就用元素的特征性质来表示集合.

利用元素的性质表示集合的方法的正式表述为抽象原则.

**抽象原则** 给定集合  $U$  和性质  $P$ , 则存在集合  $A$  恰好包含  $U$  中具有性质  $P$  的那些元素.

### 1.3 全集与空集

在集合论的任何应用中,所论集合的元素往往都属于一个大的集合叫做全集. 例如,在平面几何中,全集由平面上的所有点构成;而在人口学研究中,全集则包含世界上所有的人. 在没有特别说明的情况下,我们将用字母  $U$  来表示全集.

对于给定集合  $U$  和性质  $P$ ,  $U$  中满足性质  $P$  的元素可能不存在. 例如,集合

$$S = \{x : x \text{ 为正整数}, x^2 = 3\}$$

没有元素,因为没有正整数满足指定性质.

没有元素的集合称为空集或零集,记作  $\emptyset$ . 空集只有一个. 即若  $S, T$  都是空集,则  $S=T$ , 因为它们恰好含有相同的元素即没有任何元素.

### 1.4 子集

如果集合  $A$  的每个元素都是集合  $B$  的元素,则称  $A$  为  $B$  的一个子集. 此时我们也称  $A$  包含于  $B$  或  $B$  包含  $A$ . 这个关系记作

$$A \subseteq B \quad \text{或} \quad B \supseteq A.$$

如果  $A$  不是  $B$  的子集,即  $A$  至少有一个元素不属于  $B$ ,则记  $A \not\subseteq B$  或  $B \not\supseteq A$ .

**例 1.2** (a) 考察集合

$$A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}, \quad B = \{1, 2, 3, 5, 7\}, \quad C = \{1, 5\}.$$

则  $C \subseteq A$  而且  $C \subseteq B$ , 因为  $C$  的元素  $1, 5$  都是  $A$  和  $B$  的元素. 但是  $B \not\subseteq A$ , 因为  $B$  中有某些元素如  $2$  和  $7$  不属于  $A$ . 进而, 因为  $A, B$  和  $C$  的元素都必须属于全集  $U$ , 所以, 全集  $U$  至少包含集合  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

(b) 设集合  $N, Z, Q$  和  $R$  的定义如 1.2. 则

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R.$$

(c) 集合  $E = \{2, 4, 6\}$  是集合  $F = \{6, 2, 4\}$  的一个子集, 因为属于  $E$  的每个元素  $2, 4$  和  $6$  也都属于  $F$ . 事实上,  $E = F$ . 可以证明, 任何一个集合都是它自己的一个子集.

需要注意的是, 集合具有下列性质.

(i) 每个集合  $A$  都是全集的一个子集, 因为由定义, 集合  $A$  的所有元素都属于  $U$ . 同样地, 空集  $\emptyset$  是  $A$  的一个子集.

(ii) 每个集合  $A$  都是它自己的一个子集, 因为显然  $A$  的元素都属于  $A$ .

(iii) 如果  $A$  的每个元素都属于集合  $B$ , 而  $B$  的每个元素都属于集合  $C$ , 则显然  $A$  的每个元素都属于集合  $C$ . 换句话说, 若  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq C$ , 则  $A \subseteq C$ .

(iv) 如果  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ , 则  $A$  与  $B$  具有相同的元素, 即  $A = B$ . 反之, 如果  $A = B$ , 则因为每个集合都是它自己的子集, 我们有  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ .

上述性质的正式叙述如下:

- 定理 1.1** (i) 对任意集合  $A, \emptyset \subseteq A \subseteq U$ .  
(ii) 对任意集合  $A, A \subseteq A$ .  
(iii) 如果  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq C$ , 则  $A \subseteq C$ .  
(iv)  $A = B$  当且仅当  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ .

如果  $A \subseteq B$ , 则仍然可能有  $A = B$ . 当  $A \subseteq B$  但  $A \neq B$  时, 我们称  $A$  是  $B$  的一个真子集. 记  $A \subset B$  表示  $A$  是  $B$  的一个真子集. 例如, 假设

$$A = \{1, 3\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{1, 3, 2\},$$

则  $A$  和  $B$  都是  $C$  的子集; 但是  $A$  是  $C$  的一个真子集, 而  $B$  不是  $C$  的真子集, 因为  $B = C$ .

## 1.5 Venn 图

Venn 图是一张表示集合的图形, 在其中集合被表示为平面上的闭区域.

全集  $U$  由矩形表示, 而其他集合则由位于矩形中的圆盘表示. 如果  $A \subseteq B$ , 则表示  $A$  的圆盘在表示  $B$  的圆盘内, 如图 1-1(a) 所示. 如果  $A$  与  $B$  不交, 即它们没有公共元素, 则表示  $A$  和  $B$  的两个圆盘在图中是分离的, 如图 1-1(b).

然而, 如果  $A$  与  $B$  是任意两个集合, 则可能有某些元素在  $A$  中但不在  $B$  中; 某些元素在  $B$  中但不在  $A$  中; 而有些元素可能同时属于  $A$  与  $B$ ; 有些元素可能既不在  $A$  中也不在  $B$  中. 因此, 一般地, 我们表示集合  $A$  与  $B$  如图 1-1(c).

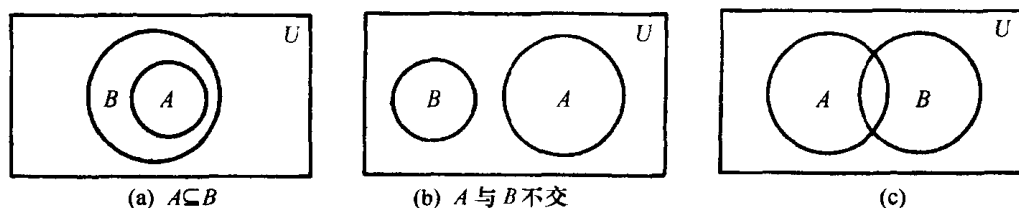


图 1-1

### Venn 图与论证

许多论证语言本质上是关于集合的论述, 从而可以用 Venn 图来表现.

因此 Venn 图有时可以用来确定一个论证是否有效. 考虑下面的例子.

**例 1.3** 证明下述命题为真(引自一本逻辑书, 书的作者 Lewis Carroll 曾经写过《爱丽丝漫游仙境》):

- $S_1$ : 除了汤盘以外我没有一样东西是锡做的.  
 $S_2$ : 你给我的礼物都是很有用的.  
 $S_3$ : 我的汤盘都没有用.

$S$ : 你给我的礼物都不是锡做的.

(水平线以上的  $S_1, S_2$  和  $S_3$  为假设条件, 水平线以下的  $S$  为结论. 若命题为真, 则  $S$  为由假设  $S_1, S_2$  和  $S_3$  得到的逻辑结论.)

由  $S_1$ , 锡做的汤盘包含在汤盘的集合中, 由  $S_3$ , 汤盘的集合与有用的东西的集合是不交的, 因此可以画出 Venn 图, 如图 1-2.

由  $S_2$ , “你的礼物”的集合是有用的东西的集合的一个子集, 因此有 Venn 图, 如图 1-3.

因为“你的礼物”的集合与锡做的东西的集合不交, 由上述 Venn 图, 论证显然为有效.

## 1.6 集合的运算

本节将引入集合上的一些重要运算.

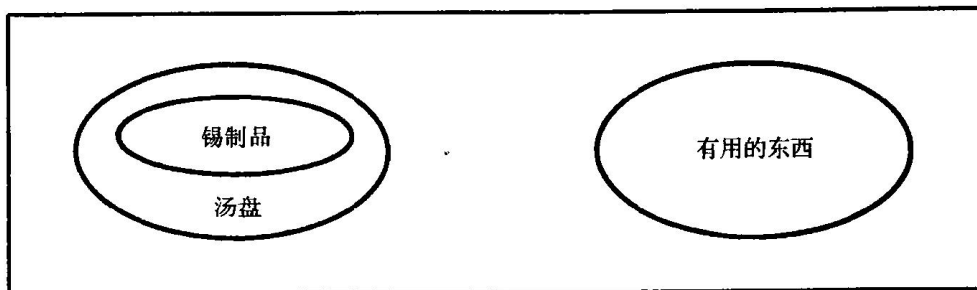


图 1-2

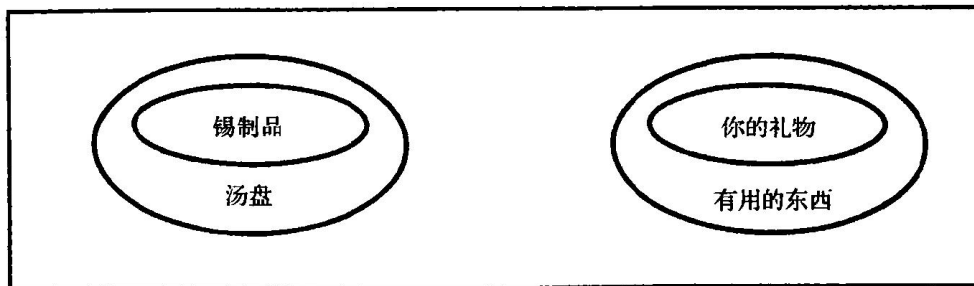


图 1-3

### 集合的并与交

两个集合  $A$  和  $B$  的并记作  $A \cup B$ , 是指属于  $A$  或者属于  $B$  的所有元素的集合, 即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

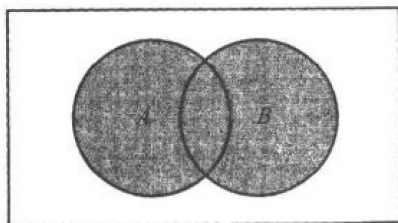
这里的“或者”即是指“与/或”意义上的或者. Venn 图 1-4(a) 中的阴影部分表示  $A \cup B$ .

两个集合  $A$  和  $B$  的交记作  $A \cap B$ , 是指同时属于  $A$  和  $B$  的所有元素的集合, 即

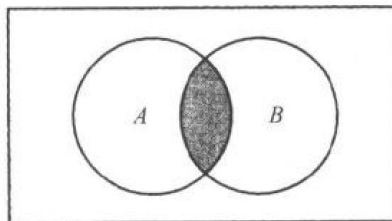
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

Venn 图 1-4(b) 中的阴影部分表示  $A \cap B$ .

如果  $A \cap B = \emptyset$ , 即  $A$  与  $B$  没有公共元素, 则称集合  $A$  与  $B$  是不交的.



(a) 阴影为  $A \cup B$



(b) 阴影为  $A \cap B$

图 1-4

**例 1.4** (a) 设  $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7\}, C = \{2, 3, 5, 7\}$ . 则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A \cap B = \{3, 4\},$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}, A \cap C = \{2, 3\}.$$

(b) 设  $C$  表示大学全体学生的集合,  $M$  表示  $C$  中全体男生的集合, 而  $F$  表示  $C$  中全体女生的集合. 因为  $C$  中的成员不是男生就是女生, 所以

$$M \cup F = C.$$

另一方面, 因为不可能有某学生既是男生又是女生, 所以

$$M \cap F = \emptyset.$$

集合的包含运算与集合的并和交有着密切的关系, 归纳为如下的定理.

**定理 1.2** 下述语句等价:  $A \subseteq B, A \cap B = A, A \cup B = B$ .

注 本定理的证明见问题 1.27,  $A \subseteq B$  的其他等价条件在问题 1.37 中给出.

集合的补

回忆前述,在某一特定场合我们所讨论的集合都是一个固定集合  $U$  的子集. 集合  $A$  的绝对补或者简称补,记作  $A^c$ ,是指所有属于  $U$  但不属于  $A$  的元素构成的集合. 即

$$A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}.$$

有些教科书中用  $A^c$  或  $\bar{A}$  记  $A$  的补. Venn 图 1-5(a) 中的阴影部分表示  $A^c$ .

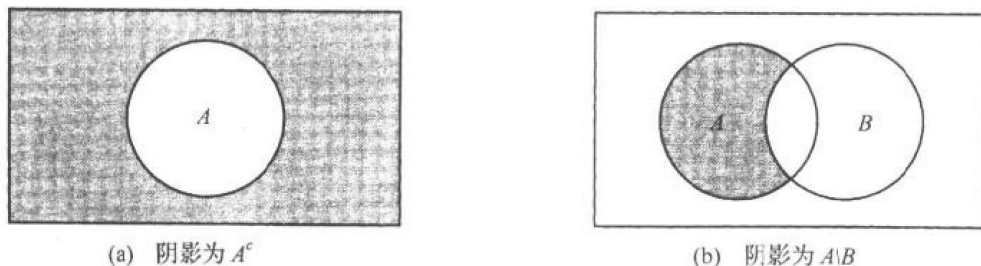


图 1-5

集合  $B$  关于集合  $A$  的相对补或者简称为集合  $A$  与  $B$  的差,记作  $A \setminus B$ ,是由所有属于  $A$  但不属于  $B$  的元素构成的集合. 即

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}.$$

集合  $A \setminus B$  读作“ $A$  减  $B$ ”. 有许多教科书中将  $A \setminus B$  写作  $A - B$  或  $A \sim B$ . Venn 图 1-5(b) 中的阴影部分表示  $A \setminus B$ .

例 1.5 设全集  $U = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  为全体正整数的集合. 令

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\} \quad C = \{6, 7, 8, 9\}.$$

并令  $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  为全体偶数的集合. 则

$$A^c = \{5, 6, 7, 8, \dots\}, \quad B^c = \{1, 2, 8, 9, 10, \dots\}, \quad C^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, \dots\}.$$

而

$$A \setminus B = \{1, 2\}, \quad B \setminus C = \{3, 4, 5\}, \quad B \setminus A = \{5, 6, 7\}, \quad C \setminus E = \{7, 9\}.$$

同样可得  $E^c = \{1, 3, 5, \dots\}$  为全体正奇数的集合.

集合的基本积

考虑  $n$  个不同的集合  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . 这  $n$  个集合的基本积是一个形如

$$A_1^* \cap A_2^* \cap \dots \cap A_n^*$$

的集合,其中  $A_i^*$  或者是  $A_i$  或者是  $A_i^c$ . 注意:(1) 这样的基本积共有  $2^n$  个;(2) 任意两个这样的基本积是不交的;(3) 全集  $U$  是所有这些基本积的并(问题 1.64). 下面给出这些基本积的几何描述.

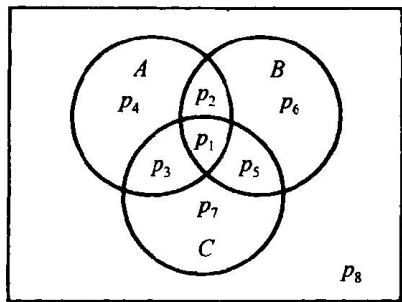
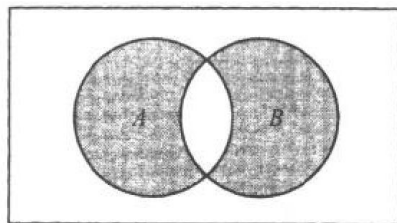


图 1-6



阴影为  $A \oplus B$

图 1-7

例 1.6 考虑三个集合  $A, B, C$ . 列出这三个集合所构成的八个基本积如下:



$$P_1 = A \cap B \cap C, P_2 = A \cap B \cap C^c, P_3 = A \cap B^c \cap C, \\ P_4 = A \cap B^c \cap C^c, P_5 = A^c \cap B \cap C, P_6 = A^c \cap B \cap C^c, \\ P_7 = A^c \cap B^c \cap C, P_8 = A^c \cap B^c \cap C^c,$$

这八个基本积恰好对应着关于集合  $A, B, C$  的 Venn 图 1-6 中八个不交的区域.

**对称差**

集合  $A$  与  $B$  的对称差, 记作  $A \oplus B$ , 是所有属于  $A$  或  $B$  但不同时属于  $A$  和  $B$  的元素的集合. 即

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

可以证明(问题 1.18)

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

例如, 假设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  而  $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . 则

$$A \setminus B = \{1, 2, 3\}, \quad B \setminus A = \{7, 8, 9\},$$

从而

$$A \oplus B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}.$$

Venn 图 1-7 中的阴影部分表示  $A \oplus B$ .

**1.7 集合的代数运算和对偶性**

集合的并, 交和补运算满足的运算规律和等式如表 1-1 所示. 事实上, 我们可以正式地叙述如下.

**定理 1.3** 集合满足表 1-1 所列规律.

表 1-1 集合的代数运算规律

(1a) $A \cup A = A$	<b>幂等律</b> (1b) $A \cap A = A$
(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	<b>结合律</b> (2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(3a) $A \cup B = B \cup A$	<b>交换律</b> (3b) $A \cap B = B \cap A$
(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	<b>分配律</b> (4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(5a) $A \cup \phi = A$	<b>同一律</b> (5b) $A \cap U = A$
(6a) $A \cup U = U$	(6b) $A \cap \phi = \phi$
	<b>对合律</b> (7) $(A^c)^c = A$
(8a) $A \cup A^c = U$	<b>互补律</b> (8b) $A \cap A^c = \phi$
(9a) $U^c = \phi$	(9b) $\phi^c = U$
(10a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	<b>De Morgan 律</b> (10b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

证明有关集合运算的等式有两种方法. 一种是对一个元素  $x$ , 去验证它同时属于方程的两边; 另一种是利用 Venn 图. 例如, 考虑 De Morgan 律的第一式

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

**方法一** 首先证明  $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ . 如果  $x \in (A \cup B)^c$ , 则  $x \notin A \cup B$ . 于是,  $x \notin A$  且  $x \notin B$ , 因此  $x \in A^c$  且  $x \in B^c$ . 于是  $x \in A^c \cap B^c$ .

然后证明  $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ . 设  $x \in A^c \cap B^c$ . 则  $x \in A^c$  且  $x \in B^c$ , 因此  $x \notin A$  且  $x \notin B$ . 于