

目 录

第一篇 线性代数

引言	(1)
第一章 行列式	(4)
§ 1 二、三阶行列式的回顾	(4)
§ 2 n 阶行列式	(9)
§ 3 按行(列)展开行列式	(15)
§ 4 克莱姆法则	(20)
本章要点	(23)
习题(1-1)	(23)
习题(1-1)简答	(26)
第二章 矩阵	(34)
§ 1 矩阵及其运算	(34)
§ 2 逆矩阵	(41)
§ 3 矩阵的初等变换和等价标准型	(46)
§ 4 矩阵的秩	(54)
§ 5 相容性定理	(58)
§ 6 线性方程组的矩阵解法	(61)
本章要点	(64)
习题(1-2)	(66)
习题(1-2)简答	(68)
第三章 向量空间	(79)
§ 1 n 维向量	(79)
§ 2 线性相关和线性无关	(81)
§ 3 向量组的秩	(87)
§ 4 齐次线性方程组解的结构	(90)

§ 5 非齐次线性方程组解的结构.....	(96)
本章要点.....	(100)
习题(1-3)	(102)
习题(1-3)简答	(105)
第四章 二次型	(116)
§ 1 二次型及其标准型	(116)
§ 2 合同标准型	(119)
§ 3 相似标准型	(124)
§ 4 正(负)定二次型	(132)
本章要点.....	(135)
习题(1-4)	(137)
习题(1-4)简答	(139)

第二篇 复变函数

引言	(148)
第一章 复变函数	(150)
§ 1 复数及其运算	(150)
§ 2 区域	(156)
§ 3 复变函数	(161)
§ 4 复变函数的极限和连续性	(165)
§ 5 初等函数	(167)
本章要点.....	(173)
习题(2-1)	(176)
习题(2-1)简答	(178)
第二章 解析函数	(195)
§ 1 可导与解析的概念	(195)
§ 2 可导与解析的充要条件	(198)
§ 3 解析函数与调和函数的关系	(204)
本章要点.....	(207)

习题(2-2)	(208)
习题(2-2)简答	(209)
第三章 复变函数的积分	(219)
§1 复变函数积分的概念及计算	(219)
§2 积分基本定理	(224)
§3 柯西积分公式	(229)
本章要点	(232)
习题(2-3)	(234)
习题(2-3)简答	(235)
第四章 级数	(243)
§1 幂级数	(243)
§2 泰勒级数	(247)
§3 罗伦级数	(250)
本章要点	(257)
习题(2-4)	(258)
习题(2-4)简答	(259)
第五章 留数	(268)
§1 孤立奇点	(268)
§2 留数	(272)
本章要点	(276)
习题(2-5)	(277)
习题(2-5)简答	(278)

第三篇 积分变换

引言	(284)
第一章 傅氏变换	(286)
§1 傅氏变换的概念	(286)
§2 傅氏变换的性质	(290)

§ 3 傅氏变换的应用	(294)
本章要点	(295)
习题(3-1)	(297)
习题(3-1)简答	(298)
第二章 拉氏变换	(305)
§ 1 拉氏变换的概念	(305)
§ 2 拉氏变换的性质	(309)
§ 3 拉氏变换的应用	(313)
本章要点	(317)
习题(3-2)	(318)
习题(3-2)简答	(320)

第四篇 概 率 论

引言	(329)
第一章 随机事件及其概率	(331)
§ 1 排列与组合	(331)
§ 2 随机事件及其概率	(337)
§ 3 事件的运算及概率的加法定理	(343)
§ 4 条件概率与乘法定理	(346)
§ 5 全概公式与逆概公式	(350)
§ 6 独立试验序列概型	(354)
本章要点	(356)
习题(4-1)	(358)
习题(4-1)简答	(361)
第二章 随机变量及其概率分布	(365)
§ 1 随机变量及其概率分布	(365)
§ 2 离散型随机变量	(368)
§ 3 连续型随机变量	(373)
§ 4 随机变量的期望与方差	(380)

本章要点	(391)
习题(4-2)	(394)
习题(4-2)简答	(398)
第三章 大数定律与中心极限定理	(409)
§1 大数定律的概念	(409)
§2 大数定律	(410)
§3 中心极限定理	(411)
本章要点	(413)
习题(4-3)	(414)
习题(4-3)简答	(414)
附录 I 傅氏变换简表	(417)
附录 II 拉氏变换简表	(426)
附录 III 泊松分布数值表	(429)
附录 IV 正态分布数值表	(431)

第一篇 线性代数

引 言

一、线性方程组问题的引入

在解析几何中我们知道,二元一次方程表示平面上的一条直线.求解二元一次联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

可以讨论平面上两条直线的位置关系.当方程组有唯一的解时,表示这两条直线相交且只有一个交点;当方程组无解时,则表示这两条直线相互平行;当方程组有无穷多解时,则表示这两条直线重合.

同样,三元一次方程表示空间的一个平面,求解三元一次联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$$

可以讨论空间两个平面的相互位置关系:相交、平行或重合.

在自然科学和工程技术中,大量遇到的是多个未知量、多个方程的联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

即 m 个 n 元一次联立方程组 (m, n 均为自然数), 以下简称线性方程组. 为了求解线性方程组, 就需要我们研究:

(1) 如何判断一个线性方程组有没有解? 即解的存在性问题.

(2) 如果线性方程组有解, 是否只有一个解? 即解的唯一性问题.

(3) 如果线性方程组有多个解, 这些解之间的关系怎样? 即解的结构问题.

(4) 如果一个线性方程组有解, 如何求出它的解? 即方程组的解法问题.

这是线性代数研究的重要课题之一.

二、二次型问题的引入

我们在解析几何中也知道, 二元二次方程

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

表示平面上的一条曲线. 适当地选择坐标变换: 如平移

$$\begin{cases} x = x' + p \\ y = y' + q \end{cases}$$

可以把方程化简, 消去一次项和常数项, 使其化成

$$a_1x'^2 + b_1x'y' + c_1y'^2 = d_1$$

的形式, 再施以适当的坐标变换: 如转轴

$$\begin{cases} x' = x''\cos\theta - y''\sin\theta \\ y' = x''\sin\theta + y''\cos\theta \end{cases}$$

进而可以把二次方程化为

$$mx'' + ny'' = r$$

的形式, 便于讨论二次曲线的性质和分类.

同样, 三元二次方程

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + ez^2 + fyz + gx + hy + kz + i = 0$$

表示空间的一个曲面. 通过适当的坐标变换, 它可以简化为

$$mx''^2 + ny''^2 + pz''^2 = q$$

的形式,便于讨论二次曲面的性质和分类.

大量的实际问题,要求我们对一般的多个变量的二次方程

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ = 0$$

(以下简称二次型)进行研究,给出适当的方法,消去变量的交叉项 $x_1x_2, x_1x_3, \cdots, x_{n-1}x_n$, 化简原方程为

$$b_{11}x_1'^2 + b_{22}x_2'^2 + \cdots + b_{nn}x_n'^2 = d$$

的形式,以利讨论其几何性质等.

这也是线性代数研究的重要课题之一.

关于线性方程组和二次型问题的讨论,都要借助于行列式、矩阵、向量这些数学工具. 在本书第一篇中,我们将以上述提出的两个问题为主线,介绍有关行列式、矩阵、向量空间、线性方程组和二次型的基本知识. 也为读者今后学习较抽象的线性代数知识,打下良好的基础.

线性代数是一个古老的数学分支. 在数学的其它分支及别的学科中,作为数学工具均有广泛的应用.

第一章 行列式

行列式的概念是从线性方程组的问题中引出来的. 我们先由二、三阶行列式的讨论开始, 找出规律, 推广到 n 阶行列式上去. 然后, 给出用行列式解 n 元线性方程组的一个直接应用.

§ 1 二、三阶行列式的回顾

一、二、三阶行列式的定义

我们早已知道, 解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

要用到二阶行列式. 即当

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 方程组有唯一的解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D}$$

当 $D=0$ 时, 方程组有无穷多组解或无解.

解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

时, 要用到三阶行列式. 当

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 方程组有唯一的解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

当 $D=0$ 时, 方程组无解或有无穷多组解.

在此, 我们应用的二、三阶行列式, 其定义分别是:

设有 2^2 个数, 按一定行和列的顺序, 排成一个两行、两列的表, 它表示一个不同行, 不同列 2 个数之乘积的代数之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

称为二阶行列式.

设有 3^2 个数, 按一定行和列的顺序, 排成一个三行、三列的表, 它表示一个不同行、不同列 3 个数之乘积的代数之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

称为三阶行列式.

其表中横的称为行, 竖的称为列, 而每一个数称为行列式的元素. 每个元素的下标, 前者表示所在的行序号, 称为行标, 后者表示所在的列序号, 称为列标.

注意 行列式只是一个记号, 它表示的是一个代数之和的数值.

二、三阶行列式的性质

由定义不难直接验证,二、三阶行列式具有如下性质(以三阶行列式为例):

1. 行列式与其转置行列式(行、列互换)相等.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. 互换行列式的任意两行(列),行列式变一号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

特别,若行列式中某两行(列)相同,行列式为零.

3. 在行列式的任一行(列)中,可以提取公因子.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

特别,若行列式中某一行(列)为零,则行列式为零.

4. 行列式中的任意两行(列)成比例,行列式为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

5. 行列式的某一行(列)是两项之和,则此行列式可拆成两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6. 行列式的某一行(列)乘以同一个数加到另一行(列)上去, 行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

有了这些性质, 我们可以简化行列式的计算.

【例 1】 计算上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

解 由三阶行列式定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

顺便指出, 下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

【例 2】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(\text{①} \text{ ②})} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & c \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{①} \times (-a) + \text{②}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & a+c \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{(\textcircled{2} \textcircled{3})} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & b & a+c \end{vmatrix}$$

$$\underline{\textcircled{2} \times b + \textcircled{3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a+c-b \end{vmatrix} = b-a-c$$

注意:我们约定,对行施以的性质记在等号之上,对列施以的性质,记在等号之下.例如: $\textcircled{2} \times (-1) + \textcircled{3}$ 是指第二行(列)乘以 (-1) 加到第三行(列)上; $(\textcircled{2}, \textcircled{3})$ 是指第二行(列)和第三行(列)互换.

由上例可以看出,利用行列式性质,把它化成三角行列式,然后求值,可以简化计算.

【例 3】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{解 } D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 500+3 & 200+1 & 300-2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 500 & 200 & 300 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 70 = -70$$

§ 2 n 阶行列式

一、二、三阶行列式概念的引伸

由二、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{33}$$

我们发现有以下 n 个特点:

1. 行列式元素的个数 二阶行列式有 2^2 个元素, 三阶行列式有 3^2 个元素.

2. 行列式中代数项的项数 二阶行列式有 $2! = 2$ 项, 三阶行列式有 $3! = 6$ 项, 且每一项均是取自不同行、不同列元素的乘积.

3. 代数和中每一项的符号 取决于各元素在行列式中所在的位置, 即行标和列标. 以三阶行列式为例, 代数和中每一乘积项的一般项应为

$$a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot a_{3p_3}$$

这里 (p_1, p_2, p_3) 表示列标. 此项的符号, 就取决于 (p_1, p_2, p_3) 的排列顺序. 为了说清这一点, 我们先介绍全排列和逆序数的概念.

一般, 我们把 n 个不同数字排成一列, 叫做这 n 个数字的全排列, 简称排列. 若这 n 个数字按自然数由小到大的顺序排列, 称为正序排列; 反之, 称为逆序排列. 在逆序排列中, 违反正序的次数, 称为逆序数. 逆序数是奇数的排列称作奇排列; 逆序数是偶数的排列称作偶排列.

例如 64875 这是 5 个数字的一个排列, 逆序数为 $2+0+2+1=5$, 记作 $\tau(64875)=5$

其中 τ 为排列 (64875) 的逆序数.

又如, $\tau(219734) = 6$ 它是偶排列.

由此, 我们再回到二、三阶行列式定义中, 一般项 $a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} + a_{1p_2} \cdot a_{2p_1}$, 列标的排列 $(p_1 p_2)$, $(p_1 p_2 p_3)$ 当逆序数 $\tau(p_1 p_2)$ 和 $\tau(p_1 p_2 p_3)$ 为偶数时, 在代数和中一般项均取“+”号, 为奇数时, 此项在代数和中均取“-”号.

例如: $a_{12} \cdot a_{21} \quad \tau(21) = 1$ 则 $a_{12}a_{21}$ 前取“-”号;

$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \quad \tau(312) = 2$ 则 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 前取“+”号.

于是, 二、三阶行列式又可记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2} (-1)^{\tau(p_1 p_2)} a_{1p_1} \cdot a_{2p_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 p_3} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot a_{3p_3}$$

二、 n 阶行列式

仿此, 我们进而可以定义 n 阶行列式.

定义 设有 n^2 个数, 按行和列的一定顺序排成 n 行、 n 列的表, 它表示一个不同行、不同列 n 个数之乘积的代数 and. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \cdots \cdot a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式. 其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为列标, τ 为列标排列的逆序数. 行列式可简记为 $\Delta(a_{ij})$, 数 a_{ij} 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 的元素.

注意 (1) 当 $n=1$ 时, $|a| = a$ 切勿与绝对值的记号相混淆.

(2) n 阶行列式亦可定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{q_1, q_2, \dots, q_n} (-1)^{\tau(q_1, q_2, \dots, q_n)} a_{q_1 1} \cdot a_{q_2 2} \cdot \cdots \cdot a_{q_n n}$$

其中 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 为行标, τ 为行标排列的逆序数.

特别, ①若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

交换其行和列

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D' 称为 D 的转置行列式.

②若在行列式 D 中, $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称 D 为对称行列式.

例如

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ -1 & 8 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

为对称行列式.

③若行列式 D 中, $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称 D 为反对称行列式.

例如 $D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & 8 \\ -7 & -8 & 0 \end{vmatrix}$

为反对称行列式.

三、 n 阶行列式的性质和计算

特别需要指出, n 阶行列式同样具有 §1 中性质 1~6, 在此不再赘述. 并依此进行 n 阶行列式的计算十分方便.

下面我们由行列式的定义和性质计算一些行列式.

【例 1】 计算上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由 n 阶行列式定义知

$$D = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

【例 2】 计算下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由 n 个阶行列式定义知

$$D = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

【例 3】 计算对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由 n 阶行列式定义知

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【例 4】 计算对角行列式