目　录

第一篇　线性代数

第二篇 复变函数

第三篇 积分变换

第四篇 概 率 论

第一篇　线性代数

引　　言

一、线性方程组问题的引入

在解析几何中我们知道，二元一次方程表示平面上的一条直线. 求解二元一次联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

可以讨论平面上两条直线的位置关系. 当方程组有唯一的解时，表示这两条直线相交且只有一个交点；当方程组无解时，则表示这两条直线相互平行；当方程组有无穷多解时，则表示这两条直线重合.

同样，三元一次方程表示空间的一个平面，求解三元一次联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$$

可以讨论空间两个平面的相互位置关系：相交、平行或重合.

在自然科学和工程技术中，大量遇到的是多个未知量、多个方程的联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

即 m 个 n 元一次联立方程组(m、n 均为自然数),以下简称线性方程组. 为了求解线性方程组,就需要我们研究:

(1)如何判断一个线性方程组有没有解? 即解的存在性问题.

(2)如果线性方程组有解,是否只有一个解? 即解的唯一性问题.

(3)如果线性方程组有多个解,这些解之间的关系怎样? 即解的结构问题.

(4)如果一个线性方程组有解,如何求出它的解? 即方程组的解法问题.

这是线性代数研究的重要课题之一.

二、二次型问题的引入

我们在解析几何中也知道,二元二次方程

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

表示平面上的一条曲线. 适当地选择坐标变换:如平移

$$\begin{cases} x = x' + p \\ y = y' + q \end{cases}$$

可以把方程化简,消去一次项和常数项,使其化成

$$a_1x'^2 + b_1x'y' + c_1y'^2 = d_1$$

的形式,再施以适当的坐标变换:如转轴

$$\begin{cases} x' = x''\cos\theta - y''\sin\theta \\ y' = x''\sin\theta + y''\cos\theta \end{cases}$$

进而可以把二次方程化为

$$mx'' + ny'' = r$$

的形式,便于讨论二次曲线的性质和分类.

同样,三元二次方程

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + ez^2 + fyz + gx + hy + kz + i = 0$$

表示空间的一个曲面. 通过适当的坐标变换,它可以简化为

$$mx''^2 + ny''^2 + pz''^2 = q$$

的形式，便于讨论二次曲面的性质和分类.

大量的实际问题，要求我们对一般的多个变量的二次方程

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n = 0$$

（以下简称二次型）进行研究，给出适当的方法，消去变量的交叉项 $x_1x_2, x_1x_3, \cdots, x_{n-1}x_n$，化简原方程为

$$b_{11}x_1'^2 + b_{22}x_2'^2 + \cdots + b_{nn}x_n'^2 = d$$

的形式，以利讨论其几何性质等.

这也是线性代数研究的重要课题之一.

关于线性方程组和二次型问题的讨论，都要借助于行列式、矩阵、向量这些数学工具. 在本书第一篇中，我们将以上述提出的两个问题为主线，介绍有关行列式、矩阵、向量空间、线性方程组和二次型的基本知识. 也为读者今后学习较抽象的线性代数知识，打下良好的基础.

线性代数是一个古老的数学分支. 在数学的其它分支及别的学科中，作为数学工具均有广泛的应用.

第一章 行 列 式

行列式的概念是从线性方程组的问题中引出来的. 我们先由二、三阶行列式的讨论开始,找出规律,推广到 n 阶行列式上去. 然后,给出用行列式解 n 元线性方程组的一个直接应用.

§1 二、三阶行列式的回顾

一、二、三阶行列式的定义

我们早已知道,解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

要用到二阶行列式. 即当

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,方程组有唯一的解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D}$$

当 $D=0$ 时,方程组有无穷多组解或无解.

解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

时,要用到三阶行列式. 当

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组有唯一的解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

当 $D=0$ 时，方程组无解或有无穷多组解.

在此，我们应用的二、三阶行列式，其定义分别是：

设有 2^2 个数，按一定行和列的顺序，排成一个两行、两列的表，它表示一个不同行，不同列 2 个数之乘积的代数和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

称为二阶行列式.

设有 3^2 个数，按一定行和列的顺序，排成一个三行、三列的表，它表示一个不同行、不同列 3 个数之乘积的代数和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

称为三阶行列式.

其表中横的称为行，竖的称为列，而每一个数称为行列式的元素. 每个元素的下标，前者表示所在的行序号，称为行标，后者表示所在的列序号，称为列标.

注意　行列式只是一个记号，它表示的是一个代数和的数值.

二、三阶行列式的性质

由定义不难直接验证，二、三阶行列式具有如下性质(以三阶行列式为例)：

1. 行列式与其转置行列式(行、列互换)相等.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. 互换行列式的任意两行(列)，行列式变一号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

特别，若行列式中某两行(列)相同，行列式为零.

3. 在行列式的任一行(列)中，可以提取公因子.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

特别，若行列式中某一行(列)为零，则行列式为零.

4. 行列式中的任意两行(列)成比例，行列式为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

5. 行列式的某一行(列)是两项之和，则此行列式可拆成两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6. **行列式的某一行(列)乘以同一个数加到另一行(列)上去,行列式不变.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

有了这些性质,我们可以简化行列式的计算.

【例 1】 计算上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

解 由三阶行列式定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{13}$$

顺便指出,下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{13}$$

【例 2】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

解 $$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{(①\ ②)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & c \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{①\times(-a)+②} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & a+c \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{(②\ ③)}}\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\0 & -1 & -1\\0 & b & a+c\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{②\times b+③}}\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\0 & -1 & -1\\0 & 0 & a+c-b\end{vmatrix}=b-a-c$$

注意:我们约定,对行施以的性质记在等号之上,对列施以的性质,记在等号之下.例如:②×(−1)+③是指第二行(列)乘以(−1)加到第三行(列)上;(②,③)是指第二行(列)和等三行(列)互换.

由上例可以看出,利用行列式性质,把它化成三角行列式,然后求值,可以简化计算.

【例 3】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\503 & 201 & 298\\5 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

解 $D=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\503 & 201 & 298\\5 & 2 & 3\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\500+3 & 200+1 & 300-2\\5 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\500 & 200 & 300\\5 & 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\3 & 1 & -2\\5 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\5 & 2 & 3\\5 & 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\3 & 1 & -2\\5 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=0-70=-70$$

§2 n 阶行列式

一、二、三阶行列式概念的引伸

由二、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{33}$$

我们发现有如下 n 个特点：

1. 行列式元素的个数 二阶行列式有 2^2 个元素，三阶行列式有 3^2 个元素.

2. 行列式中代数和的项数 二阶行列式有 $2!=2$ 项，三阶行列式有 $3!=6$ 项，且每一项均是取自不同行、不同列元素的乘积.

3. 代数和中每一项的符号 取决于各元素在行列式中所在的位置，即行标和列标. 以三阶行列式为例，代数和中每一乘积项的一般项应为

$$a_{1P_1}\cdot a_{2P_2}\cdot a_{3P_3}$$

这里 (P_1,P_2,P_3) 表示列标. 此项的符号，就取决于 (P_1,P_2,P_3) 的排列顺序. 为了说清这一点，我们先介绍全排列和逆序数的概念.

一般，我们把 n 个不同数字排成一列，叫做这 n 个数字的全排列，简称排列. 若这 n 个数字按自然数由小到大的顺序排列，称为正序排列；反之，称为逆序排列. 在逆序排列中，违反正序的次数，称为逆序数. 逆序数是奇数的排列称作奇排列；逆序数是偶数的排列称作偶排列.

例如 64875 这是 5 个数字的一个排列，逆序数为 $2+0+2+1=5$，记作 $\tau(64875)=5$

其中 τ 为排列(64875)的逆序数.

又如,$\tau(219734)=6$ 它是偶排列.

由此,我们再回到二、三阶行列式定义中,一般项 $a_{1P_1}\cdot a_{2P_2}$ 和 $a_{1P_1}\cdot a_{2P_2}\cdot a_{3P_3}$ 列标的排列(P_1P_2),$(P_1P_2P_3)$当逆序数 $\tau(P_1P_2)$和 $\tau(P_1P_2P_3)$为偶数时,在代数和中一般项均取"+"号,为奇数时,此项在代数和中均取"—"号.

例如:$a_{12}\cdot a_{21}$ $\tau(21)=1$ 则 $a_{12}a_{21}$前取"—"号;

$a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$ $\tau(312)=2$ 则 $a_{13}a_{21}a_{32}$前取"+"号.

于是,二、三阶行列式又可记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{P_1P_2}(-1)^{\tau(P_1P_2)}a_{1P_1}\cdot a_{2P_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{P_1P_2P_3}(-1)^{\tau(P_1P_2P_3)}a_{1P_1}\cdot a_{2P_2}\cdot a_{3P_3}$$

二、n 阶行列式

仿此,我们进而可以定义 n 阶行列式.

定义 设有 n^2 个数,按行和列的一定顺序排成 n 行、n 列的表,它表示一个不同行、不同列 n 个数之乘积的代数和. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{P_1P_2\cdots P_n}(-1)^{\tau(P_1P_2\cdots P_n)}a_{1P_1}\cdot a_{2P_2}\cdot\cdots\cdot a_{nP_n}$$

称为 n 阶行列式. 其中 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为列标,τ 为列标排列的逆序数. 行列式可简记为 $\Delta(a_{ij})$,数 a_{ij}称为行列式 $\Delta(a_{ij})$的元素.

注意 (1)当 $n=1$ 时,$|a|=a$ 切勿与绝对值的记号相混淆.

(2)n 阶行列式亦可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_1^1}\cdot a_{q_2^2}\cdot\cdots\cdot a_{q_n^n}$$

其中 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 为行标，τ 为行标排列的逆序数.

特别，①若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

交换其行和列

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D' 称为 D 的转置行列式.

②若在行列式 D 中，$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 D 为对称行列式.

例如

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ -1 & 8 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

为对称行列式.

③若行列式 D 中，$a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 D 为反对称行列式.

例如 $D=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & 8 \\ -7 & -8 & 0 \end{vmatrix}$

为反对称行列式.

三、n 阶行列式的性质和计算

特别需要指出，n 阶行列式同样具有§1 中性质 1～6，在此不再赘述. 并依此进行 n 阶行列式的计算十分方便.

下面我们由行列式的定义和性质计算一些行列式.

【例 1】 计算上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由 n 阶行列式定义知

$$D = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

【例 2】 计算下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由 n 个阶行列式定义知

$$D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$$

【例 3】 计算对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由 n 阶行列式定义知

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【例 4】 计算对角行列式