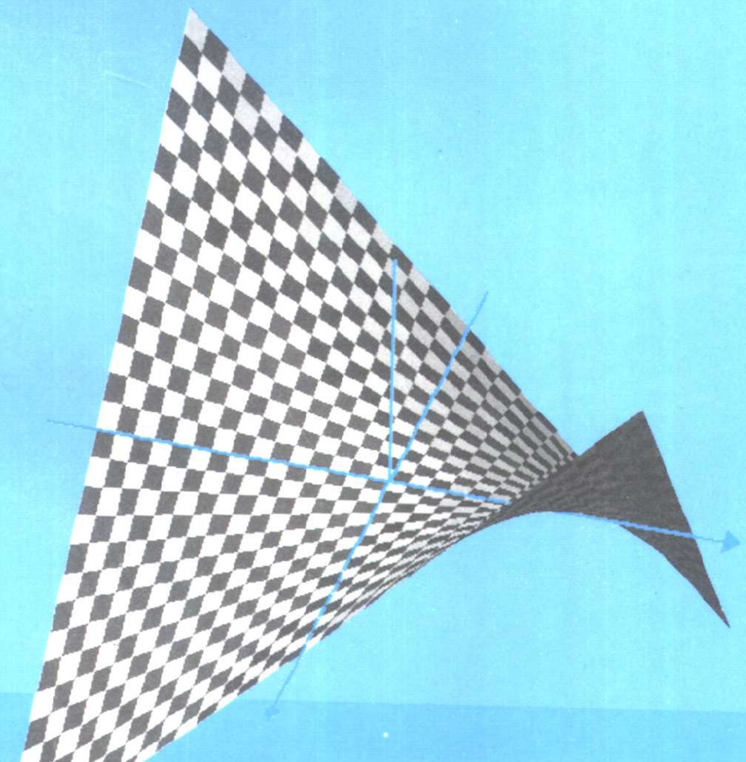
数学思想的渗透与训练

范永利　翟　刚　方　菁　编著



北京广播学院出版社

数学思想的渗透与训练

（初三年级）

范永利　翟　刚　方　菁　编著

北京广播学院出版社

京新登字 148 号

责任编辑：韩旺辰 王 鹏
封面设计：王 拓

数学思想的渗透与训练

范永利 翟 刚 方 菁 编著
北京广播学院出版社出版发行
(北京朝阳区东郊定福庄东街 1 号)
(邮编:100024 电话:65779405)
北京理工大学印刷厂印刷
各地新华书店经销
开本:787×1092 1/32 印张：13.375 字数：267 千字
1997 年 9 月第 2 版 1997 年 9 月第 1 次印刷
印数：15001—35000
ISBN 7—81004—671—3/G·350
定价:15.00 元

前　言

在大力提倡把纯知识传授转向能力教育，把应试教育转向素质教育的进程中，不少的有心人在默默地探索着、耕耘着，希望通过自己的辛勤的劳动换回改革的成果。正是在这个大潮的冲击下，我们产生了写这册书的念头。

《数学思想的渗透与训练》一书正是有感于对能力培养及素质培养的认识，集近几年初三数学教学的体会与经验，尤其是一些切肤的教训，结合近二年来的中考中所体现的能力与素质要求编辑而成。

为了更好地与教学有机结合，在编写的过程中，以九年义务教材中的知识为载体适时设计、安排、渗透相应的数学思想与方法，尤其是补充与完善了掌握知识与形成能力之间的中间环节，因此在体例的设计上遵循以初三教材为本，按知识顺序排序，突出必需强化的知识及相应的数学思想，结合典型例题，安排适量的练习题及供学有余力的同学提高解题水平的综合性题目。

在这本书的编写过程中，得到北京市教研部教研员宗福衡、王占元及特级教师贺信淳、赵大悌等同志的热情关切及帮助。他们在百忙之中对书稿进行审定与修正。在此向他们表示衷心的感谢。

由于编写者水平之限，书中若有疏漏或不足之处，欢迎读者批评指正。

1996 年 9 月

目　录

上篇　初三代数

第十二章　一元二次方程

（一）　一元二次方程的解法及应用

一元二次方程是中学数学的重要内容，在初中代数中占有重要地位．一元二次方程的解法及应用是一元二次方程这一章的重点之一，掌握一元二次方程的有关概念，熟练掌握直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法解一元二次方程是基本要求．根据方程的特征，灵活选用适当的方法解一元二次方程是能力的表现．运用一元二次方程解决实际问题，可以进一步提高分析问题和解决问题的能力．

例1　已知：$x=-1$ 是关于 x 的一元二次方程 $2x^2+px+q=0$ 和 $px^2-2qx-4=0$ 的公共根，求 p、q 的值．

分析：我们知道，使方程成立的未知数的值叫方程的解．$x=-1$ 是给出的两个方程的公共根，就是说 $x=-1$ 既是第一个方程的根，也是第二个方程的根．那么我们可以把 $x=-1$ 分别代入到这两个方程中去，转化出两个关于 p、q 的二元一次方程，解由它们组成的方程组，求出 p、q 的值．

解：$\because$　$x=-1$ 是 $2x^2+px+q=0$ 和 $px^2-2qx-4=0$ 的公共根，

$$\therefore\quad \begin{cases}2-p+q=0,\\ p+2q-4=0.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} p=\dfrac{8}{3}, \\ q=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

$\therefore \quad p=\dfrac{8}{3}$，$q=\dfrac{2}{3}$.

例 2 已知 a 是整数，满足 $\begin{cases} 3a+1>0, \\ 3-2a>0. \end{cases}$ 试解关于 x 的一元二次方程 $x^2-4=x\ (ax-3)$.

分析：把 $x^2-4=x\ (ax-3)$ 整理后，得 $(1-a)\ x^2+3x-4=0$，由已知它是一个关于 x 的一元二次方程，所以 $a\neq 1$. 又 a 是满足给出的不等式组的整数. 这样通过解这个不等式组，可以确定一元二次方程中的待定系数 a.

解：$\because \quad \begin{cases} 3a+1>0, \\ 3-2a>0. \end{cases}$

解这个不等式组，得 $-\dfrac{1}{3}<a<\dfrac{3}{2}$.

$\because \quad a$ 是整数，

$\therefore \quad a=0$，$a=1$.

整理 $x^2-4=x\ (ax-3)$，得

$(1-a)\ x^2+3x-4=0$ ①

$\because$ ①是关于 x 的一元二次方程，

$\therefore \quad a\neq 1$.

$\therefore \quad a=0$.

$x^2+3x-4=0$.

$(x-1)\ (x+4)\ =0$.

$\therefore \quad x_1=1$，$x_2=-4$.

说明：解决关于一元二次方程的问题时，首先要把方程整

理成一元二次方程的一般形式：$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$. 其中二次项系数 a 是不等于零的实数，这是因为如果 $a=0$，$ax^2+bx+c=0$ 就不是一元二次方程了.

例 3 已知 $|2m-3|=1$，试解关于 x 的方程 $3mx(x+1)-5(x+1)(x-1)=x^2$.

分析：由 $|2m-3|=1$，容易得到 $m=1$ 或 $m=2$. 整理关于 x 的方程，得 $(3m-6)x^2+3mx+5=0$. 题目没有指明这个方程的类型，就要对二次项系数进行讨论：当 $3m-6=0$ 时，方程变为一元一次方程，当 $3m-6\neq 0$ 时，方程是一元二次方程.

解：由 $|2m-3|=1$，解出

$m_1=2$，$m_2=1$.

整理 $3mx(x+1)-5(x+1)(x-1)=x^2$，得

$$(3m-6)x^2+3mx+5=0. \qquad ①$$

当 $m=2$ 时，方程①为 $6x+5=0$.

解出 $x=-\dfrac{5}{6}$.

当 $m=1$ 时，方程①为 $-3x^2+3x+5=0$.

解出 $x_1=\dfrac{3+\sqrt{69}}{6}$，$x_2=\dfrac{3-\sqrt{69}}{6}$.

∴ 当 $m=2$ 时，$x=-\dfrac{5}{6}$；当 $m=1$ 时，$x=\dfrac{3+\sqrt{69}}{6}$ 或 $x=\dfrac{3-\sqrt{69}}{6}$.

说明：当给出的关于 x 的方程的二次项系数中含有待定系数时，要特别注意审题. 当题目没有指明给出的方程是二次方程时，要对二次项的系数是否等于零进行讨论. 本题渗透了分类讨论的思想.

例4　m 为什么数值时，方程$(m^2-3m-4)x^2-(m+1)x+4=0$ 是关于 x 的一次方程？并求出这时方程的根.

分析：要使 $(m^2-3m-4)x^2-(m+1)x+4=0$ 是关于 x 的一次方程，需使 $(m^2-3m-4)=0$ 且 $m+1\neq 0$.

解：∵　$(m^2-3m-4)x^2-(m+1)x+4=0$ 是关于 x 的一次方程，

∴　$\begin{cases} m^2-3m-4=0, \\ m+1\neq 0. \end{cases}$

解出 $m=4$.

当 $m=4$ 时，原方程变形为：$-5x+4=0$.

解出 $x=\frac{4}{5}$.

∴　$m=4$，$x=\frac{4}{5}$.

说明：一元一次方程的一般形式是 $ax+b=0$ $(a\neq 0)$；一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$.

例5　已知：a、b 为实数，且 $|a^2-2a-8|+\sqrt{2a-b}=0$，求代数式$\frac{2a^2-3ab-2b^2}{a-2b}$的值.

分析：$|a^2-2a-8|$ 和$\sqrt{2a-b}$均为非负数，它们的和等于零，当且仅当 $a^2-2a-8=0$，且 $2a-b=0$，从中可以解 a，b 的值.

求代数式$\frac{2a^2-3ab-2b^2}{a-2b}$的值，宜先化简再代入求值.

解：∵　$|a^2-2a-8|+\sqrt{2a-b}=0$，

∴　$a^2-2a-8=0$ 且 $2a-b=0$.

解 $a^2-2a-8=0$，得

$a_1=4$，$a_2=-2$.

当 $a_1=4$ 时，$b_1=8$；

当 $a_2=-2$ 时，$b_2=-4$.

$\because\quad \dfrac{2a^2-3ab-2b^2}{a-2b}=\dfrac{(a-2b)(2a+b)}{a-2b}=2a+b$,

$\therefore$ 当 $a=4$，$b=8$ 时，原式$=16$；当 $a=-2$，$b=-4$ 时，原式$=-8$.

说明：有限个非负数之和等于零，有且只有每个非负数均等于零. 在初中阶段学习的非负数有绝对值、完全平方数、算术根.

求代数式的值时，一般解题步骤是：先化简，再求值.

例 6 解关于 x 的方程：

(1) $3x^2-4=0$；

(2) $4(x-2m)^2-9=0$；

(3) $2(x-1)^2=(x+\sqrt{2})^2$

分析：方程 $3x^2-4=0$ 没有一次项，且二次项系数与常数项异号，宜变形为 $x^2=\dfrac{4}{3}$，运用直接开平方法求解比较简捷.

当我们把 $(x-2m)$ 看作一个整体时，可以把 $4(x-2m)^2-9=0$ 转化为 $(x-2m)^2=\dfrac{9}{4}$，再运用直接开平方法求解.

对于 $2(x-1)^2=(x+\sqrt{2})^2$ 这样的方程可以看作上述方程的变式. 由 $a^2=b^2$，可以得到 $a=\pm b$. 转化为两个一次方程求解比较简捷.

解：(1) $3x^2-4=0$，

$x^2=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore\quad x_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$x_2=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) $4(x-2m)^2-9=0$,

$(x-2m)^2=\frac{9}{4}$,

$x-2m=\pm\frac{3}{2}$,

$\therefore\quad x_1=2m+\frac{3}{2},\ x_2=2m-\frac{3}{2}$.

(3) $2(x-1)^2=(x+\sqrt{2})^2$,

$\therefore\quad \sqrt{2}(x-1)=\pm(x+\sqrt{2})$.

$\sqrt{2}(x-1)=x+\sqrt{2}$，解出 $x=4+2\sqrt{2}$，

$\sqrt{2}(x-1)=-(x+\sqrt{2})$，解出 $x=0$.

$\therefore\quad x_1=4+2\sqrt{2},\ x_2=0$.

说明：对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 且 $b=0$ 时，运用开平方法比较简捷. 求解时应注意：当 $b=0$，a、c 异号时方程有两个解，正数的平方根有两个值，不要丢解；当 $b=0$，a、c 同号时方程无实解.

例 7 用适当的方法解下列方程：

(1) $(2x+3)(2x-3)=9$;

(2) $x^2+4x-8=0$;

(3) $3x^2-4x-4=0$;

(4) $2x^2-5x+1=0$.

分析：(1) 方程整理后没有一次项，宜采用开平方法.

(2) 方程宜采用配方法.

(3) 方程宜运用因式分解法.

(4) 方程宜用求根公式求解.

解：(1) $(2x+3)(2x-3)=9$.

原方程变形为 $4x^2=18$.

$2x=\pm 3\sqrt{2}$.

$\therefore \quad x_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$x_2=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(2)　$x^2+4x-8=0$.

原方程变形为 $(x+2)^2=12$.

$x+2=\pm 2\sqrt{3}$.

$\therefore \quad x_1=-2+2\sqrt{3}$，$x_2=-2-2\sqrt{3}$.

(3)　$3x^2-4x-4=0$.

原方程可变形为 $(x-2)(3x+2)=0$.

$x-2=0$，或 $3x+2=0$.

$\therefore \quad x_1=2$，$x_2=-\frac{2}{3}$.

(4)　$2x^2-5x+1=0$.

$\because \quad a=2$，$b=-5$，$c=1$，

$b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times 1=17$，

$\therefore \quad x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$.

$\therefore \quad x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$，$x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$.

说明：选择适当的方法解一元二次方程的关键是要认真观察方程的特征. 在特征不明朗时，要先整理方程. 解题时切忌盲目下手. 如第（2）小题，可以运用公式法求解，但仔细想一下，它的前两项已具备凑完全平方的条件，只需加上 4 即可配方，此时选用配方法更佳.

例 8　解下列方程：

(1) $2x^2-2\sqrt{5}x=\sqrt{15}-\sqrt{3}x$；

(2) $x^2-(1-\sqrt{3})x+\sqrt{3}-6=0$.

分析：含有无理系数的一元二次方程可以运用公式法求解．在某些情况下，选用因式分解法更简捷．

（1）解法 1：原方程变形为

$2x^2-(2\sqrt{5}-\sqrt{3})x-\sqrt{15}=0.$

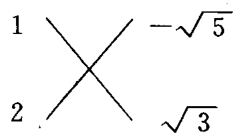
$a=2$，$b=-(2\sqrt{5}-\sqrt{3})$，$c=-\sqrt{15}.$

$$\begin{aligned}b^2-4ac&=[-(2\sqrt{5}-\sqrt{3})]^2-4\times2\times(-\sqrt{15})\\&=23+4\sqrt{15}\\&=(2\sqrt{5}+\sqrt{3})^2,\end{aligned}$$

$$x=\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}\pm(2\sqrt{5}+\sqrt{3})}{4}.$$

$\therefore\ x_1=\sqrt{5}$，$x_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

解法 2：原方程变形为



$2x^2-(2\sqrt{5}-\sqrt{3})x-\sqrt{15}=0.$

$(x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{3})=0.$

$\therefore\ x-\sqrt{5}=0$，或 $2x+\sqrt{3}=0.$

$\therefore\ x_1=\sqrt{5}$，$x_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

（2）解法 1：$x^2-(1-\sqrt{3})x+\sqrt{3}-6=0.$

$a=1$，$b=\sqrt{3}-1$，$c=\sqrt{3}-6$，

$$\begin{aligned}b^2-4ac&=(\sqrt{3}-1)^2-4\times1\times(\sqrt{3}-6)\\&=28-6\sqrt{3}\\&=(3\sqrt{3}-1)^2,\end{aligned}$$

$$\therefore\ x=\frac{-(\sqrt{3}-1)\pm(3\sqrt{3}-1)}{2},$$

$\therefore\ x_1=\sqrt{3}$，$x_2=1-2\sqrt{3}.$

解法 2：$x^2-(1-\sqrt{3})x+\sqrt{3}-6=0$，

变形为 $(x-\sqrt{3})(x+2\sqrt{3}-1)=0$.

$$\begin{matrix}1 & & -\sqrt{3}\\ & \times & \\ 1 & & -(1-2\sqrt{3})\end{matrix}$$

$\therefore\quad x-\sqrt{3}=0$，或 $x+2\sqrt{3}-1=0$.

$\therefore\quad x_1=\sqrt{3}$，$x_2=1-2\sqrt{3}$.

说明：含有无理系数的一元二次方程，用求根公式求解时，常常遇到双重根号的化简问题，也就是要把 b^2-4ac 的值配成完全平方，如上面的解法 1，有一定难度. 如果运用因式分解的方法求解就可以避开这一难点，使求解简单易行.

例 9 解下列关于 x 的一元二次方程：

(1) $x^2-4ax+3a^2+2a-1=0$；

(2) $x^2+5x+k^2=2kx+5k-6$.

分析：与例 8 一样，本题可以采用公式法求解，但比较繁琐，也可以采用因式分解法，比较简练.

解：(1) $x^2-4ax+(3a^2+2a-1)=0$ 变形为

$x^2-4ax+(a+1)(3a-1)=0$.

$[(x-(a+1))][(x-(3a-1))]=0$.

$$\begin{matrix}1 & & -(a+1)\\ & \times & \\ 1 & & -(3a-1)\end{matrix}$$

$\therefore\quad x-(a+1)=0$，或 $x-(3a-1)=0$.

$\therefore\quad x_1=a+1$，$x_2=3a-1$.

(2) 原方程变形为

$(x^2-2kx+k^2)+(5x-5k)+6=0$.

$(x-k)^2+5(x-k)+6=0$.

$(x-k+2)(x-k+3)=0$.

$\therefore\quad x-k+2=0$，或 $x-k+3=0$.

$\therefore\quad x_1=k-2$，$x_2=k-3$.

说明：由例 8、例 9 可以看到，在遇到含有无理系数或字母系数方程时，首先考虑因式分解法是比较适宜的．

例 10 已知 $y=4x^2-x-5$．x 是什么数时，y 的值等于 0？x 是什么数时，y 的值等于 9？

分析：首先根据条件转化为方程，再求出 x 的值．

解：$4x^2-x-5=0$，

$(x+1)(4x-5)=0$．

$x+1=0$，或 $4x-5=0$．

$\therefore\ x_1=-1$，$x_2=\frac{5}{4}$．

$4x^2-x-5=9$．

$4x^2-x-14=0$．

$(x-2)(4x+7)=0$

$x-2=0$，或 $4x+7=0$．

$\therefore\ x_1=2$，$x_2=-\frac{7}{4}$．

当 $x=-1$ 或 $x=\frac{5}{4}$时，$y=4x^2-x-5$ 的值等于零；当 $x=2$ 或 $x=-\frac{7}{4}$时，$y=4x^2-x-5$ 的值等于 9．

例 11 已知 $(x+2y)(2x-3y)=y(y-4x)$，试求$\frac{x}{y}$的值．

分析：原方程可以变形为 $2x^2+5xy-7y^2=0$，通过解这个方程，求出$\frac{x}{y}$的值．另外因为 $y\neq0$，也可以在变形后的方程两边同时除以 y^2，转化为一个关于$\frac{x}{y}$的一元二次方程求解．

解法 1：原方程变形为

$2x^2+5xy-7y^2=0.$

$(x-y)(2x+7y)=0.$

$\therefore\ x-y=0$，或 $2x+7y=0.$

$\therefore\ \frac{x}{y}=1$，或 $\frac{x}{y}=-\frac{7}{2}.$

解法 2：$\because\ y\neq 0$，

$\therefore$ 原方程可以变形为

$2\left(\frac{x}{y}\right)^2+5\left(\frac{x}{y}\right)-7=0.$

$\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(2\cdot\frac{x}{y}+7\right)=0.$

$\therefore\ \frac{x}{y}-1=0$，或 $2\cdot\frac{x}{y}+7=0.$

$\therefore\ \frac{x}{y}=1$，或 $\frac{x}{y}=-\frac{7}{2}.$

例 12 某校办工厂总产值在两年内由 45 万增加到 88.2 万元，每年产值的平均增长率是多少？

分析：设平均每年的增长率为 x，那么在 45 万元的基础上，第一年的产值是 $(45+45x)$ 万元，就是 $45(1+x)$ 万元；第二年的产值是 $[45(1+x)+45(1+x)x]$ 万元，就是 $45(1+x)^2$ 万元．这样就可以根据题意列出方程．

解：设平均每年增长的百分率为 x．根据题意，得

$45(1+x)^2=88.2,$

$(1+x)^2=1.96.$

$1+x=\pm 1.4.$

$\therefore\ x_1=0.4, x_2=-2.4.$

$x_2=-2.4$ 不合题意，所以只取 $x_1=0.4=40\%.$

答：每年产值的平均增长率是 40%.