周庭阳　张红岩　编著

电网络理论

浙江大学出版社

电 网 络 理 论

周庭阳　张红岩　编著

浙江大学出版社

内容简介

本书介绍电网络图论系统、建立网络方程的各种方法、多端和多端口网络、有源、无源网络的拓扑公式、网络状态方程、无源导抗函数综合、无源电压比函数综合、逼近问题和灵敏度分析、单运放反馈型 *RC* 有源滤波器设计、直接法有源滤波器设计等等内容。

本书可供电类专业硕士生"电网络理论"课的教材，也可供电气、电子工程专业的科技人员参考。

电网络理论

周庭阳　张红岩　编著

责任编辑　龚建勋

*

浙江大学出版社出版

（杭州玉古路 20 号　邮政编码 310027）

浙江大学出版社电脑排版中心排版

德清第二印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

*

787×1092　16 开　印张 15　384 千字

1997 年 6 月第 1 版　1997 年 6 月第 1 次印刷

印数 0001—1000

ISBN 7-308-01910-1/TM・022　定价：15.00 元

前　言

“电网络理论”作为部分电类专业硕士生的学位课在我校已开出十多年，在全国同类兄弟院校中均开设类似的课程。

该课在硕士生培养环节中有较重要的作用，使学生理论体系得以充实、巩固。

该课开设的初期，各校均使用英、美的教材。例如巴拉巴尼亚的“电网络理论”等等，但外国教材篇幅较大且和国内本科生教材重复较多。后期阶段均采用记笔记并指定一些参考书的办法。

“电网络理论”内容可以包括图论、无源、有源电路综合、开关电容网络、网络诊断、非线性电路、时变电路、电网络计算机辅助设计等等。在有限的学时数下(我校为 3 个学分)究竟选用哪些作为基本讲座的内容，对此我们曾经有过徘徊，在经过多次实践之后感到应选用电网络图论和有源、无源综合作为基本内容较为合适。我们以这些内容组织教学已经实践了六、七年，学生反映效果较好，但是希望有一本相应的教材，因而着手编写本书。

本书选材丰富，内容紧凑，体系合理，叙理严密和本科生电路课程联系紧密，便于教学，有利于学生思维能力和理论基础的巩固。

本书分两篇，基本上是互为独立的，如果需要也可以先教第二篇。总教学学时数约 50 节课，平均每章 5 节课完成。

本书有些内容在别的书籍和文献中还没有出现过，例如多端口网络的拓扑公式、共点和共圈多端口网络的变换矩阵、含负电容 T 形网络实现的推导方法等等。

由于水平所限，缺点和错误在所难免，望读者批评指正。

编著者

1996 年 7 月

于浙江大学

目　　录

第一篇　网络图论

第二篇　无源和有源网络综合概论

第一篇　网络图论

第一章　电网络概述

§ 1-1　电网络性质

电网络和电路这二术语事实上难以严格区分，它们都是由实际电路抽象出来的物理模型。从电网络性质来看可以分为线性和非线性网络、时变和非时变网络、有源和无源网络、有损和无损网络、互易和非互易网络、分布参数和集中参数网络等等。从电网络研究的任务来看可以分为网络分析、网络综合、网络设计和网络诊断，分析和综合是网络理论的基础，设计和诊断属实际应用问题。以下对网络的性质作一简单叙述。

线性与非线性网络的区分通常有三种方法：

(1) 含有非线性元件的网络称为非线性网络，否则为线性网络；

(2) 所建立的网络电压电流方程是线性微分方程的称为线性网络，否则为非线性网络；

(3) 按输入与输出之间是否满足线性和叠加性来区分。

例如当输入向量为

$$\mathbf{Y}(t) = [Y_1(t)\ Y_2(t)\cdots Y_m(t)]^T \text{时}$$

输出向量为

$$\mathbf{X}(t) = [X_1(t)\ X_2(t)\cdots X_n(t)]^T;$$

当输入向量为

$$\mathbf{F}(t) = [f_1(t)\ f_2(t)\cdots f_m(t)]^T \text{ 时}$$

输出向量为

$$\mathbf{R}(t) = [r_1(t)\ r_2(t)\cdots r_n(t)]^T;$$

若满足线性（也称齐性），当输入为$a\mathbf{Y}(t)$时输出应为$a\mathbf{X}(t)$；若满足叠加性，当输入为$\mathbf{Y}(t) + \mathbf{F}(t)$时输出应为$\mathbf{X}(t) + \mathbf{R}(t)$。若网络输入为$a\mathbf{Y}(t) + b\mathbf{F}(t)$时输出为$a\mathbf{X}(t) + b\mathbf{R}(t)$，则称该网络为线性网络，否则为非线性网络。

以上三种区分方法大体上是等价的。但对某些特殊情况将有差异。例如图 1-1 所示电路中非线性电阻 R_1和 R_2的特性分别为

$$I_1 = aV + bV^3$$

和

$$I_2 = aV - bV^3$$

按区分法 (1) 它们应是非线性网络。但若以 V_1为输入，V_2为输出，显然能满足线性和叠加性，按区分法 (3) 应是线性网络。即使线性和叠加性也不总是能同时满足的。例如带电阻负载由理想二极管构成的全波整流电路，能满足线性关系，但不能满足叠加性。

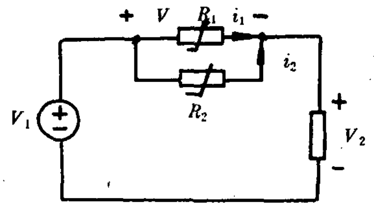


图 1-1

区分时变和非时变(也称定常或称时恒)网络类似地也有三个分法,即:

(1) 含时变元件的网络称为时变网络,否则为定常网络;

(2) 建立的方程为常系数方程者为定常网络,否则为时变网络;

(3) 输入输出间满足延时特性的网络为定常网络,否则为时变网络。对于定常网络当输入为 $f(t)$ 时,输出为 $R(t)$,当输入为 $f(t-t_0)$ 时,输出应为 $R(t-t_0)$。

设端口电压电流方向一致,并设端口电压向量为

$$\mathbf{V}(t) = [v_1(t)\ v_2(t)\qquad v_m(t)]^T$$

端口电流向量为

$$\mathbf{i}(t) = [\ i_1(t)\ i_2(t)\qquad i_m(t)]^T$$

若
$$\int_{-\infty}^{t} \mathbf{V}^T(\tau)\mathbf{i}(\tau)\mathrm{d}\tau \geqslant 0 \tag{1-1}$$

则称该网络为无源网络。也即对于任何瞬间 t,在任何可能的端口电压电流情况下送入网络的总能量(从 $t=-\infty$ 开始记)始终不小于零者为无源网络,否则为有源网络。这是从电网络理论角度出发的严格定义。实际应用提法还可能粗糙一些,例如对含运放或受控源电路即称为有源电路。电力电子电路中含三极管的电路即为有源电路。这种实用提法在某些情况也可能与严格定义有差异,例如理想的回转器,其电压电流的关系为

$$V_1i_1 + V_2i_2 = (-ri_2)(\frac{V_2}{r}) + V_2i_2 = 0$$

满足式(1-1)应为无源网络,但是应用上往往又称其为有源网络。

若网络满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{V}(\tau)^T\mathbf{i}(\tau)d\tau = 0 \tag{1-2}$$

则称其为无损网络。以上认为 $V(-\infty)$、$V(\infty)$ 均为零。

符合互易关系(参照基本电路书籍)的网络称为互易网络,否则为非互易网络。互易网络的回路阻抗、节点导纳矩阵均为对称矩阵。

对于器件尺寸远小于波长的网络称为集中参数网络,否则称为分布参数网络。本书叙述中将以线性集中参数网络为主要对象。

在网络分析中,借助图论是十分有效的。本章以下各节将对图论的基本概念加以叙述。

§1-2　图论的术语和定义

今天图论这个组合和离散数学的分支已渗透到大多数自然学科,电网络是最早应用图论的学科之一,电网络方程的建立、计算参数的拓扑公式、信号流图、故障诊断、集成电路布线、通迅网络、电力系统等等问题均与图论密切相关。

以下简要地叙述一下图论的有关术语和定义。

图 G 是一些点和边的集合，边连于两点，如图 1-2 所示是边 e_1、e_2、e_3、…、e_7 和点 V_a、V_b、…、V_f 的集合。若边所连的两点重合于一点，则称该边为自环，如图 1-2 的边 e_7。点可以没有边相连，如图中点 f，称为孤点。边的长短形状是无所谓的。我们称图 G 为线形图、拓扑图或称线图。

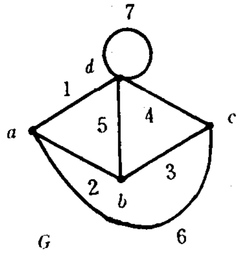


图 1-2

若不画出具体图形，用边集 $e_1(V_a\quad V_d)$、$e_2(V_a\quad V_b)$、$e_3(V_b\quad V_c)$、$e_4(V_c\quad V_d)$、$e_5(V_b\quad V_d)$、$e_6(V_a\quad V_c)$、$e_7(V_d\quad V_d)$ 和点集 V_a、V_b、V_c、V_d、V_f 也可以充分代表图 G。$e_k(V_i\quad V_j)$ 表示边 e_k 连于点 i 和点 j。对于无孤点的图，仅一个边集可充分地表征它。边集 $e_1(V_1\quad V_2)$、$e_2(V_2\quad V_3)$、$e_3(V_3\quad V_4)\cdots e_p(V_p\quad V_{p+1})$ 称为径。若 V_{p+1} 即 V_1，即点 $p+1$ 和点 1 重合，则称为回路。回路中每个点关联两条边。若图 G_1 的点和边是图 G 的子集则称图 G_1 是图 G 的子图。即 $G_1 \subset G$。若 G_1 包含 G 的全部点则称 G_1 为生成子图。集合论中的并（Union）、交（Intersection）、差（Difference）和环和（Ring-Sum）运算同样可用于子图运算。

以符号 $\cup$ 表示并，$G_1 \cup G_2$ 代表在 G_1 中或在 G_2 中或既在 G_1 中又在 G_2 中的所有点和边的集合。以符号 $\cap$ 表示交，$G_1 \cap G_2$ 代表 G_1 和 G_2 公有的点和边的集合。以符号 $-$ 表示差，如 $G_2 \subset G_1$，则 $G_1 - G_2$ 代表从 G_1 中移走全部 G_2 的边及孤点后剩下的部分。图论中边移走后，其两端的点不移走。例如图 1-3(a) 所示 G_1 是图 1-2 所示图 G 的子图，$G - G_1$ 如图 1-3(b) 所示。移走边 e_1、e_2、e_6 后点 a 成为孤点也移走。以符号 $\oplus$ 表示环和，$G_1 \oplus G_2$ 代表 G_1 和 G_2 中非公有部分之和。

显然

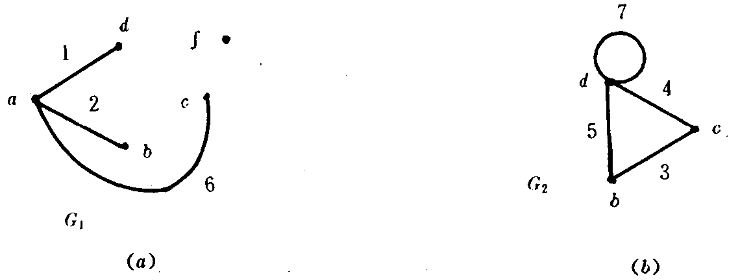
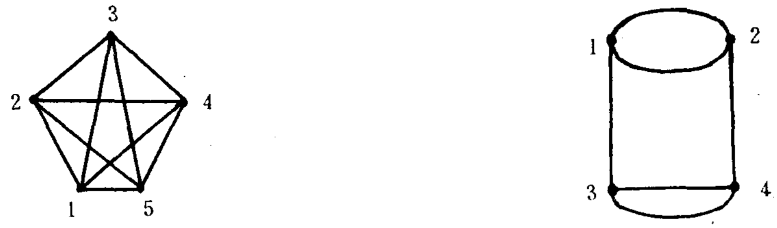


图 1-3

$$G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2) \tag{1-3}$$

若 G_1 是 G 的子图，则称 $G_1' = G - G_1$ 为 G_1 的补图。图 G 顶点关联的边数称为度，用 d_i 表示，若 $d_i = 4$ 表示与点 i 关联的边数为 4，若 $d_i = 0$，表示点 i 是孤点。

若具有 n_t 个点的图 G，所有点间都有一条边而度数均为 $n_t - 1 = n$，则称其为完备图。图 1-4(a) 所示为 $n_t = 5$ 的完备图(K_5)，其中 $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 5 - 1 = 4$。图 1-4($b$) 所示的图虽然各点度数都是 $n_t - 1 = 3$，但点 14、点 23 间没有边所以它不是完备图。若图 G 的任二点间至少有一条通路则称其为连通图，否则为非连通图。



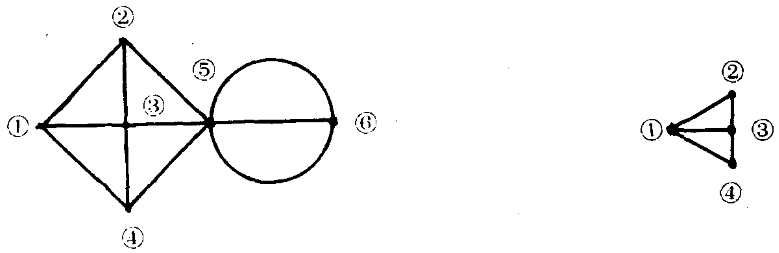
K_5

(a)　　　　　　　　(b)

图 1-4

将图 G 中的一个点移走，是指除此点外与它关联的边也一起移走。若连通图 G 中某点移走后变为非连通图，则称该点为断点。例如图 1-5(a) 中点 ⑤ 为断点。将其移走后（如图(b) 所示）为非连通图。包含断点的连通图称为可分图，否则为不可分图。对于不可分图包含其任两点至少能找出一个回路。设图 G 有 n_t 个点和 b 条边。将 n_t 个顶点分成两个集合，若 b 条边中每条边的两端点分别属于两个集合，则称为二分图。如图 1-6 所示为一二分图。

二分图的非零子图也是二分图。



(b)

(a)

图 1-5

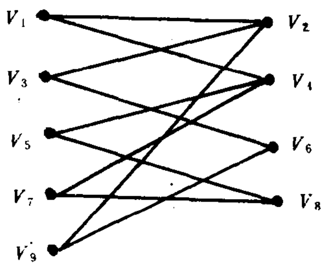


图 1-6

若图 G 任意两边能均不相交地画在平面上，则称为平面图，否则为非平面图。平面图圈内不含别的边的回路称为网孔，平面图的网孔数

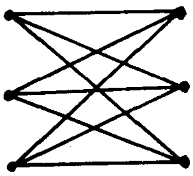
$$m = b - n_t + 1 \tag{1-4}$$

其中 b 为边数、n_t 为点数。将平面图任一网孔贴在水平面上，然后使其余的边任意伸缩，其余网孔经上移即成为凸多面体。由欧拉公式知凸多面体的

面 ＝ 棱 － 顶 ＋ 2

其中有一个面是外围回路移上来的，其余面即网孔，故式 (1-4) 得证。

平面图、对分图等在集成电路布线问题中广为应用，有时需判别一个复杂的图是否是平面图。图 1-4(a) 所示的五点完备图（K_5）和图 1-7 所示的对分图（K_{33}）是最基本的非平面图。C. Kuratowski 给出图 G 是平面图的充要条件是它不包含 K_5和 K_{33}，此即 Kuratowski 定理（证明从略）。在证明一个图是否是平面图时同构（Isomorphism）和同胚（Homeomorphic）的概念可能用到。当两个图点数边数均相等，且点边关联状况也相同称为同构。两同构图的样子可以很不一样。例如图 1-7 所示的 K_{33} 和图 1-8 所示的图是同构的图。同胚是指将图 G 两条串联（或并联）的边简化为一条，成为 G_1(或逆运算将一条边插入一点变为两条边)，则图 G 与 G_1 是同胚图。



K_{33}

图 1-7

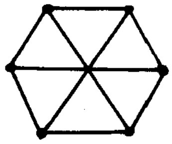


图 1-8

若图 G 的边标有箭头方向称为有向图，否则为无向图。讨论电网络的图时，边习惯称为支路，点则称为节点。以后，这些名称将兼用。

§ 1-3　树

树在图论中很重要。连通图 G 的子图具备下述三条件者称为树：

(1) 包含全部节点

(2) 不包含回路

(3) 连通

树 T 的补图称为补树。树的支路称为树支，补树的支路称为连支。

对于有 n_t 个点的连通图任一树的树支数为

$$n = n_t - 1 \tag{1-5}$$

用归纳法不难证明式 (1-5)。(请读者自行证明)

若图 G 支路数为 b，则连支数

$$l = b - (n_t - 1) \tag{1-6}$$

在图论中称 n 为图 G 的秩，称 l 为图 G 的环秩。

树 T 的任二点间必有且仅有一条通路。因为树是连通的，所以必有通路；因为不存在回路，所以不可能有第二条通路。这是树的一个重要定理。任二点间若加上连支，必存在一个唯一的单连支回路。如图 1-9a、b 点，加上虚线所示的连支，则必有且仅有一个只包含这条连支和 a、b 间唯一树路径构成的回路。l 条连支，可以有 l 个单连支回路。这些单连支回路也称为基本回路。

§ 1-4　割集

割集(cut set) 是连通图 G 的部分支路集合，且满足条件：

(1) 移走这些支路后图 G 分为两个部分；

(2) 少移走其中任一条支路图仍连通。

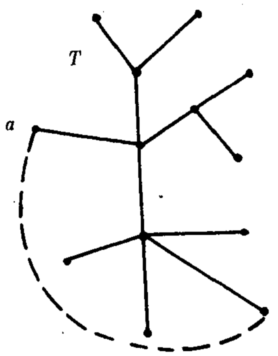


图 1-9

图 1-10 所示支路集合 (1、2、3、4、5) 是一个割集，显然满足上述两个条件。图 1-11 支路集合 (3、4、5、6)，(1、3、6)，(2、3、5)，(2、4、6)，(1、5、4)，(1、2、3、4)，(1、2、5、6) 等都是一个割集。移走割集支路剩下的两个独立部分之一可以是一个孤点。若将割集支路画成图 1-10 的形式，可作一封闭面包围 G_2(或 G_1)，则两个独立部分之一在闭面内，另一个在闭面外，割集支路即穿过闭面的全体支路集合。

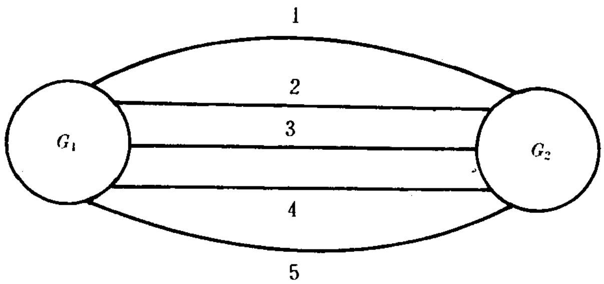


图 1-10

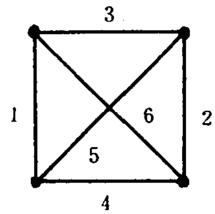


图 1-11

若对图 1-9 所示的树作割集，则每一割集都仅有一条树支路。移走树支后树 T 变为两个分离的部分 T_1、T_2，跨接在 T_1 和 T_2 之间的那些连支将和该树支构成一个单树支割集. 每一树支均有且仅有一个单树支割集，单树支割集也称为基本割集。

§1-5 图的矩阵表示

不管有向图或无向图，其边与点、回路、割集分别都有确定的关系，这些关系均可用不同的矩阵表征，以下将采用有向图来叙述。

表明边与点的关系的称为关联矩阵，用 $\mathbf{A}_a$表示。以 $\mathbf{A}_a$的行代表点，列代表边，即 $\mathbf{A}_a$的阶数为 $n_t \times b$。$\mathbf{A}_a$的元素

$$a_{jk}=\begin{cases}+1 & \text{当边 } k \text{ 与点 } j \text{ 关联且离开 } j \\ -1 & \text{当边 } k \text{ 与点 } j \text{ 关联且指向 } j \\ 0 & \text{当边 } k \text{ 不与点 } j \text{ 关联}\end{cases} \tag{1-7}$$

例如图 1-12 所示的子图关联矩阵

$$\mathbf{A}_a=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

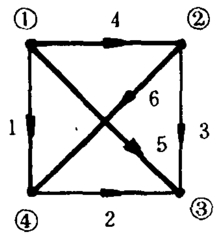


图 1-12

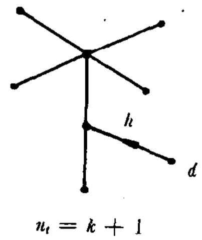


图 1-13

因为每一边连于两点一进一出，所以 $\mathbf{A}_a$ 的每一列仅有两个非零元素且一个为 1 另一为 (− 1)，所以将 $\mathbf{A}_a$ 的全部行相加将为零，也即 $\mathbf{A}_a$ 的行不是线性独立的，可以任意划去一行，划去行（例如划去第四行）后的称为降阶关联矩阵，并用 **A** 表示。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

在不致混淆的情况下，仍简称 **A** 为关联矩阵。由图 G 可唯一地列写出 **A**，同样给出 **A** 也可唯一地画出图 G（或其同构图）。

若列写关联矩阵时树支号和连支号分开编先连支后树支（或反之），并用 $\mathbf{A}_t$ 表示树支列 A_l 表示连支列即

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_t \vdots \mathbf{A}_l] \tag{1-8}$$

因为树支数为 $n = n_t - 1$，连支数为 $l = b - n_t + 1$，所以 $\mathbf{A}_t$ 为 n 阶方阵，$\mathbf{A}_l$ 为 $n \times l$ 阶矩阵。用归纳法可以证明 A_t 的行列式

$$\det\mathbf{A}_t = \pm 1 \tag{1-9}$$

$n_t = 2$ 时式 (1-9) 成立。设 $n_t = k$ 时式 (1-9) 成立。树至少有一悬挂点，$\mathbf{A}_t$ 中与悬挂点对应的行只有一个非零元且为 1 或 (− 1)，如图 1-13 所示的 d 点，联有边 h，故 d 点对应的行中与边 h 对应的列为 1，其余边对应的列均为零。即 $a_{dh} = 1$ ，$a_{dj} = 0$，$h \neq j$ 根据 d 行展开行列式为

$$\det\mathbf{A}_t = a_{dh}\det\mathbf{A}_t' = \pm 1\det\mathbf{A}_t'$$

而 $\det A_t'$ 即 $n_t = k$ 情况下的树支列构成的矩阵，设 $\det\mathbf{A}_t' = \pm 1$，从而得证 $n_t = k + 1$ 情况下式(1-9) 成立。

式 (1-9) 说明 A_t 是非奇异的，其秩为 n 而 $\mathbf{A}_t \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{A}_a$，且 $\mathbf{A}_a$的秩 $< n_t = n + 1$，可见 **A** 和 $\mathbf{A}_a$ 的秩也为 n，说明图 G 的秩也就是关联矩阵的秩。

以上证明从 **A** 中抽出 n 列构成方阵，若这 n 列对应一个树，则该方阵为非奇异，且其行列式为 ± 1。反之若 n 列不是对应一个树，则必含回路，不难证明该矩阵为奇异。由以上结论顺便还可推出一个图 G 总的树数目。这将需要引用代数中的比纳 − 柯西定理。设 **P**、**Q** 分别为 $n \times m$ 和 $m \times n$ 阶矩阵，且 $m \geqslant n$，则

$$\det(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}) = \sum(\mathbf{P}\text{ 的大子式乘以对应的 }\mathbf{Q}\text{ 的大子式}) \tag{1-10}$$

式(1-10) 即比纳 − 柯西定理。大子式即 $n \times n$ 阶矩阵的行列式，所谓对应即 **P** 的列号和 **Q** 的行

号相同。

上已证明 A 和树对应的大子式为 ± 1,其余为零,故有

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)=\sum_{\text{所有树}}(\pm 1)(\pm 1)=\text{树数目} \tag{1-11}$$

表明边和全部回路关系的矩阵称为全回路矩阵,用 $\mathbf{B}_a$表示。$\mathbf{B}_a$的行代表回路,列代表边,其元

$$b_{jk}=\begin{cases}1 & \text{当边 } k \text{ 在回路 } j \text{ 中,且方向和回路一致}\\ -1 & \text{当边 } k \text{ 在回路 } j \text{ 中,且方向和回路相反}\\ 0 & \text{当边 } k \text{ 不在回路 } j \text{ 中}\end{cases} \tag{1-12}$$

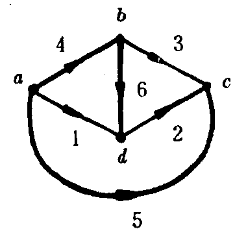


图 1-14

例如图 1-14 所示图 G 中

$$\mathbf{B}_a=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix} & \begin{array}{c}164\\ 2546\\ 354\\ 1234\\ 125\\ 236\\ 1635\end{array}\end{array}$$

$\mathbf{B}_a$ 的行间不是线性独立的,例如上式后四行均可由前三行经初等运算推出。

若在图 G 中选树如图 1-14 中 4、5、6 支路所示(加浓画)并从中 $\mathbf{B}_a$抽出单连支回路行构成 $l\times b$ 阶矩阵 $\mathbf{B}_f$

$$\mathbf{B}_f=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

则称为 $\mathbf{B}_f$ 基本回路矩阵。

其中连支部分刚好构成一个单位矩阵,因为回路绕向与连支方向一致。第一行第一条连支为(+1)、第二行第二条连支为(+1),顺此类推,每一行只含一条连支,于是形成一 l 阶单位矩阵。剩下的树支部分用 B_t表示,则基本回路矩阵

$$\mathbf{B}_f=[\mathbf{1}_l \vdots \mathbf{B}_t] \tag{1-13}$$

$\mathbf{1}_l$ 即连支部分构成的单位矩阵,可见 $\mathbf{B}_f$以及 $\mathbf{B}_a$的秩均为 l。

显然要求 $\mathbf{B}_f$ 表为式(1-13)形式,在列写 $\mathbf{B}_f$ 时必需:

(1) 树支、连支分开编号;

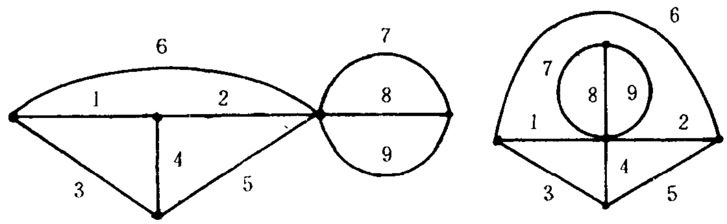
(2) 回路绕向和连支方向一致;

(3) 回路的序号和连支序号一致且顺次列写。

对于平面图，在全回路矩阵中抽出网孔回路行构成 $l \times b$ 阶的矩阵 $\mathbf{B}_m$，称 $\mathbf{B}_m$ 为网孔回路矩阵，简称为网孔矩阵。不难证明 $\mathbf{B}_m$ 的行间是线性独立的，也即 $\mathbf{B}_m$ 的秩也为 l。

若在 $\mathbf{B}_a$ 中任意抽出 l 行构成矩阵 $\mathbf{B}$，且 $\mathbf{B}$ 的行间是线性独立的，则称为 $\mathbf{B}$ 为回路矩阵。

和关联矩阵 $\mathbf{A}$ 不同，已知回路矩阵（即使是全回路矩阵），不一定能唯一地画出图。比较图 1-15(a)、(b) 不难发现它们具有相同的回路矩阵，可见不同的图可能具有相同的回路矩阵。



(a)　　　　(b)

图 1-15

表明边和全部割集关系的矩阵称为全割集矩阵，用 $\mathbf{Q}_a$ 表示。$\mathbf{Q}_a$ 的行代表割集、列代表边，其元为

$$q_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{当边 } k \text{ 在割集 } j \text{ 中，且方向和 } csj \text{ 一致} \\ -1 & \text{当边 } k \text{ 在割集 } j \text{ 中，且方向和 } csj \text{ 相反} \\ 0 & \text{当边 } k \text{ 不在割集 } j \text{ 中} \end{cases} \tag{1-14}$$

例如图 1-14 所示图 G 中

$$\mathbf{Q}_a = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1234 \\ 235 \\ 126 \\ 145 \\ 346 \\ 1356 \\ 2456 \end{array}$$

$\mathbf{Q}_a$ 的行之间不是线性独立的，例如上式后四行均可由前三行经初等运算推出。

若在 $\mathbf{Q}_a$ 中抽出单树支（树如图 1-14 粗线所示）割集行构成 $n \times b$ 阶矩阵 $\mathbf{Q}_f$

$$\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则称 $\mathbf{Q}_f$ 为基本割集矩阵。当列写基本割集矩阵时，割集方向和树支方向一致，树支和连支分开编号且顺次列写，则树支部分刚好构成阶单位矩阵 $\mathbf{1}_t$ 即

$$\mathbf{Q}_f = [\mathbf{Q}_l \vdots \mathbf{1}_t] \tag{1-15}$$

可见 $\mathbf{Q}_f$ 和 $\mathbf{Q}_a$ 的秩均等于 n。

若列写 $\mathbf{Q}_a$ 时每个节点方向均向外，并抽出 (n_t-1) 个这些节点对应的行，刚好就是降阶关联矩阵 $\mathbf{A}$。例如从上述 $\mathbf{Q}_a$ 中抽出 2、3、4 行，即为关联矩阵（以 d 点为参考），若在 $\mathbf{Q}_a$ 中任抽 n 行构成矩阵 $\mathbf{Q}$，且 $\mathbf{Q}$ 的行间是线性独立的，则称 $\mathbf{Q}$ 为割集矩阵。

§1-6 矩阵 $\mathbf{B}_a$和 $\mathbf{Q}_a$、$\mathbf{A}$ 的关系

全回路矩阵和全割集矩阵存在恒等式

$$\mathbf{B}_a \mathbf{Q}_a^T = \mathbf{0} \tag{1-16}$$

为证明式(1-16),令 $\mathbf{D} = \mathbf{B}_a \mathbf{Q}_a^T$,根据矩阵乘法规则可知 $\mathbf{D}$ 的任一元素

$d_{jk} = \sum_{i=1}^{b} b_{ji} q_{ik}'$ 其中 b_{ji} 是 $\mathbf{B}_a$的元,q_{ik}' 是 $\mathbf{Q}_a$ 的转置 $\mathbf{Q}_a^T$ 的元,b 为支路数。显然 $q'_{ik} = q_{ki}$,q_{ki} 是 $\mathbf{Q}_a$ 的元,故又有

$$d_{jk} = \sum_{j=i}^{b} b_{ji} q_{ki} \tag{1-17}$$

式 (1-17) 对每一支路求总和。但显然只需要考虑同时包含在回路 j 和割集 k 中的那些支路。由图 1-16 不难明白,同时包含在回路 j 和割集 k 中的那些支路必为偶数条,即成对出现,否则回路 j 闭合不起来。

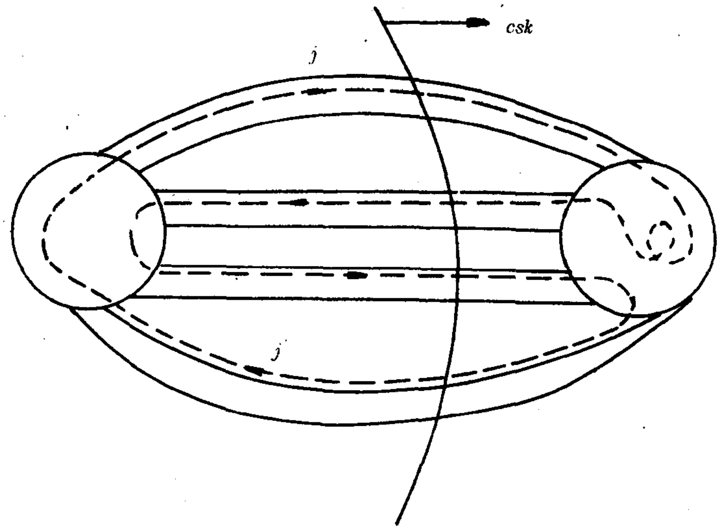


图 1-16

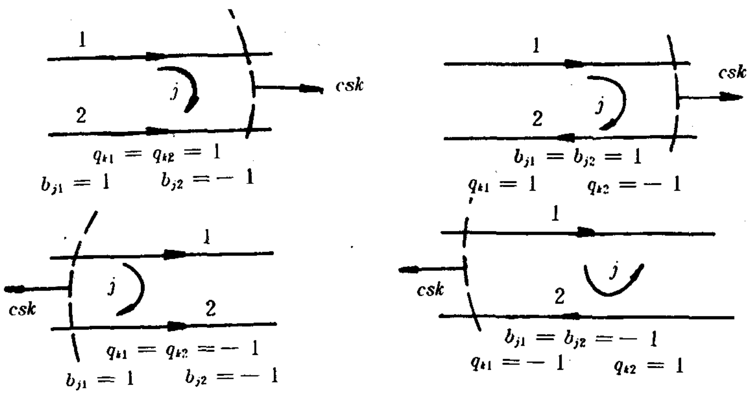


图 1-17

由图 1-17 又可以看出,每一对这些支路对应元相乘刚好相抵消,故式 (1-17) 中 $d_{jk} = 0$,即 $\mathbf{D} = \mathbf{0}$,也即证明了式 (1-16) 成立。由式 (1-16) 可得