目　录

第一章　线性弹性有限元法

在固体力学中，非线性有限元法一般归结为一系列线性弹性问题。因此，线性弹性有限元法是非线性有限元法的基础。二者不但在分析方法和研究步骤上有类似之处，而且后者常常要直接引用前者的某些结果。为此，本章针对本书主要论述的三维等参数有限元位移法，简明扼要地回顾一下线性弹性有限元法。

线性弹性有限元位移法是一种利用位能变分和分割近似原理求解线性弹性力学问题的数值方法。它首先把连续弹性体分割为在节点上相联的单元组合体，然后以节点位移为基本未知量，分别在各单元内选取位移函数，并按线性弹性力学的几何方程、本构方程和虚功方程或位能变分方程，建立并求解关于节点位移的线性代数方程组，把无限个自由度的问题化为有限个自由度的问题。

§1-1　连续弹性体离散化

如前所述，在线性弹性有限元法中，首先是把连续弹性体分割为在有限个节点上相联的若干有限大小的单元。这种把连续体分割为离散体的工作，称为连续体离散化。对于一个受有分布载荷且具有面约束的连续弹性体，它的离散化应包括以下三个方面。

1． **划分单元** 对连续弹性体本身，应从几何上把它划分为若干有限大小的单元。单元之间仅在节点上联接；单元之间的力仅靠节点传递。这种仅在节点上联接、仅靠节点传力的离散体，称为单元组合体。

在划分单元时，可采用各种单元型式。对于空间连续弹性体，可采用四面体、五面体和六面体等单元型式。当连续弹性体为直线边界时，在这些单元中，棱边取直线；节点取在顶点上，分别为4个、6个和8个节点，如图1-1所示。当连续弹性体有曲线边界时，在这些单元中，棱边取曲线；除顶点外，各边中点（或更多的点）也取为节点，分别为10个、15个和20个（或更多）节点，如图1-2所示。

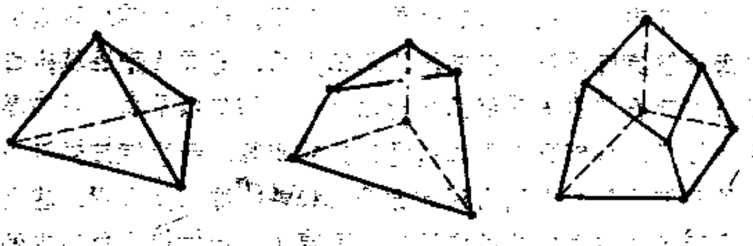
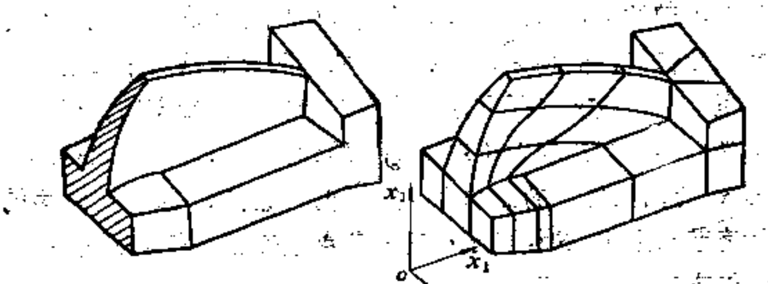

(a) (b) (c)

图 1-1


(a) (b) (c)

图 1-2

在这些单元中，我们将主要讨论20节点曲边六面体单元，因为这种单元计算精度高，在空间问题中被广泛采用。例如图1-3(a)所示半双曲拱水坝，划分后的单元组合体如图1-3(b)所示。其中坝体部分有曲线边界，因此应采用20节点曲边六面体单元；基础部分虽为直线边界，但为了使两部分交界面上的节点一致，仍应采用20节点六面体单元，这些直边单元只不过是曲边单元的特殊情况。



(a)　　(b)

图 1-3

划分好单元以后，还应建立一个适合所有单元的总体坐标系 $x_i(i=1,2,3)$（例如图 1-3b 中所示），并对单元和节点进行编号。若单元组合体共有m个单元，n 个节点，并用$\{u\}$、$\{u\}^e$ 和 $\{U\}$ 分别表示任一点的位移向量、单元节点位移向量和总体节点位移向量，则有

$$\{u\}=[u_1u_2u_3]^T \tag{1.1}$$

$$\{u\}^e=[u_1^{(1)}u_2^{(1)}u_3^{(1)}u_1^{(2)}u_2^{(2)}u_3^{(2)}\cdots u_1^{(20)}u_2^{(20)}u_3^{(20)}]^T \tag{1.2}$$

$$(e=1,2,\cdots,m)$$

$$\{U\}=[u_1^1u_2^1u_3^1u_1^2u_2^2u_3^2\cdots u_1^nu_2^nu_3^n]^T \tag{1.3}$$

线性弹性有限元位移法主要就是建立并求解以总体节点

位移向量$\{U\}$为未知量的总体刚度方程，把求任一点$\{u\}$的无限个自由度问题，化为求$\{U\}$的有限个自由度问题。

2. **简化约束** 在划分单元时，若连续弹性体只在有限个点上被约束，则应把约束点也取为节点；若连续弹性体具有面约束，则应把面约束简化到节点上去，以便对单元组合体施加位移边界条件，进行约束处理。

在图1-3(a)所示拱坝中，若假定河谷是刚性的，则河谷对拱坝的约束作用，可看成是基础的底面和靠山侧面三个方向均无位移的面约束。所以应把它们简化到这两个面的所有节点上去，这相当于在这些节点上安置固定铰支座。根据对称性，另一半拱坝对所取半拱坝的约束作用，可看成是对称面 x_1 方向无位移的面约束。所以也应把它简化到对称面的所有节点上去，这相当于在这些节点上安置平行于 x_1 轴的活动铰支座。两种情况的简化结果如图1-4所示。

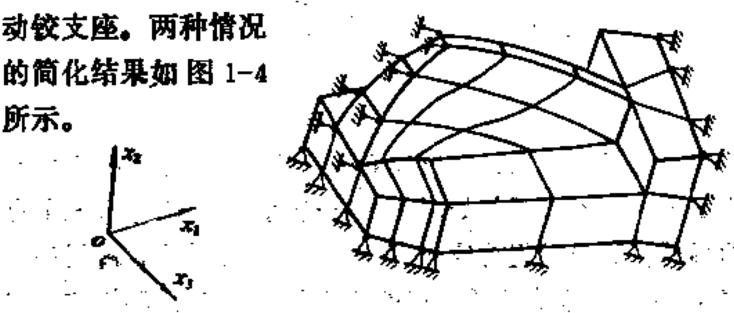


图 1-4

在弹性力学中，约束就是位移边界条件。在线性弹性有限元法中，简化约束就是把连续位移边界条件离散为节点位移边界条件。对上述具有面约束的拱坝，若基础的底面和靠山侧面共有 p 个节点，拱坝对称面共有 q 个节点，则约束简

化结果（图 1-4）相当于下述位移边界条件

$$\{u\}_i=[\,0\;\;0\;\;0\,]^T\quad(i=1,2,\cdots,p)$$

$$\{U\}_i=[\,0\;u_2^i\;u_3^i\,]^T\quad(i=1,2,\cdots,q)$$

3. **移置载荷** 若连续弹性体受有集中力和分布载荷，而在划分单元时，除把集中力作用点取为节点外，应把分布载荷等效地移置到有关节点上去，以便建立离散的线性代数方程组。

在图1-3(a)所示拱坝中，若只考虑拱坝自重和河水的静压，则应把每个单元的重力移置到单元的所有节点上去；把上游的静水压力移置到河水、拱坝间接触表面的所有节点上去。静水压力的移置结果示意如图1-5中。

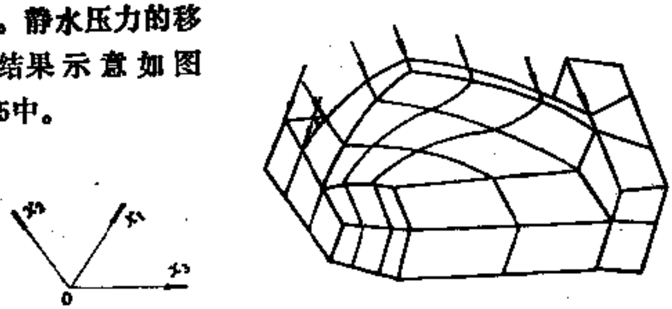


图 1-5

在弹性力学中，分布载荷就是单位体积的体力（例如拱坝的自重）和单位面积的面力(例如河水的静压)。在线性弹性有限元法中，移置载荷就是把分布载荷离散为等效节点载荷。一般是先按单元进行移置(见§1-4)，再按节点进行叠加(见§1-5)。

§1-2 单元位移函数

本章一开始曾提到，在线性弹性有限元位移法中，连续弹性体离散化以后，就是选取单元位移函数。对于20个节点曲边六面体单元，由于单元形状非常复杂，很难直接选取其位移函数。为此，我们可以先选取立方体单元的位移函数，再把立方体"映射"成曲边六面体，最后把立方体单元位移函数"移植"到曲边六面体单元。被"映射"的单元称为母单元；"映射"后的单元称为子单元。

1. 母单元位移函数 取边长为 2 的立方体为母单元，以立方体中心为原点，以分别平行立方体三个正交平面的直线为轴，取无量纲局部坐标$\xi_i(i=1,2,3)$，并对20个节点进行编号，如图 1-6 所示。

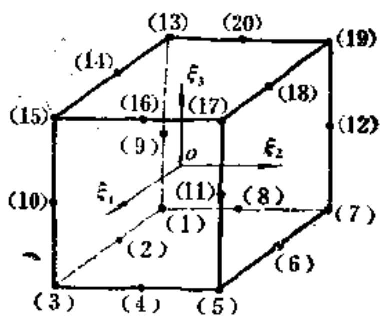


图 1-6

选取上述母单元位移函数，就是用20个节点的位移值，对单元内任一点位移进行二次插值，即

$$u_i=\sum_{k=1}^{20} N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)u_i^{(k)}\quad(i=1,2,3)\qquad(1.4)$$

可见，它归结为确定位移形状函数 $N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)(k=1,2,\cdots,20)$ 的具体形式。

位移形状函数$N^{(k)}$的具体形式可由它应满足的以下两个

条件唯一地确定：

1° $N^{(k)}$是三重二次函数；

2° $$N^{(k)}(\xi_1^{(l)},\xi_2^{(l)},\xi_3^{(l)})=\begin{cases}0 & (k\neq l)\\ 1 & (k=l)\end{cases}\quad (k,l=1,2,\cdots,20) \tag{1.5}$$

下面就根据以上两个条件来确定位移形状函数的具体形式。

(1)角节点位移形状函数　例如$N^{(1)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$。因为方程为$1-\xi_1=0$的(4,11,16)平面、方程为$1-\xi_2=0$的(6,12,18)平面、方程为$1-\xi_3=0$的(14,16,18)平面和方程为$\xi_1+\xi_2+\xi_3+2=0$的(2,8,9)平面分别通过节点2,3,…,20，所以函数$(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)(\xi_1+\xi_2+\xi_3+2)$在节点2,3,…,20处为零，且为三重二次函数。于是可取

$$N^{(1)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=a_1(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)(\xi_1+\xi_2+\xi_3+2)$$

其中常数a_1可由$N^{(1)}(\xi_1^{(1)},\xi_2^{(1)},\xi_3^{(1)})=1$来确定。把$\xi_1^{(1)}=\xi_2^{(1)}=\xi_3^{(1)}=-1$代入上式便得$a_1=-1/8$，所以

$$N^{(1)}=\frac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)(-\xi_1-\xi_2-\xi_3-2) \tag{1.6}$$

对于$N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ $(k=3,5,7,13,15,17,19)$有类似的形式。

(2)边中节点位移形状函数　例如$N^{(2)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$。因为方程为$1+\xi_1=0$的(8,12,20)平面、方程为$1-\xi_1=0$的(4,11,16)平面、方程为$1-\xi_2=0$的(6,12,18)平面和方程为$1-\xi_3=0$的(14,16,18)平面分别通过节点1,3,4,…,20，所以函数$(1-\xi_1^2)(1-\xi_2)(1-\xi_3)$在节点1,3,4,…,20处为零，且为三重二次函数。于是可取

$$N^{(2)}=a_2(1-\xi_1^2)(1-\xi_2)(1-\xi_3)$$

其中常数 a_2 可由 $N^{(2)}(\xi_1^{(2)},\xi_2^{(2)},\xi_3^{(2)})=1$ 来确定。把 $\xi_1^{(2)}=0$ 和 $\xi_2^{(2)}=\xi_3^{(2)}=-1$ 代入上式便得 $a_2=1/4$，所以

$$N^{(2)}=\frac{1}{4}(1-\xi_1^2)(1-\xi_2)(1-\xi_3) \tag{1.7}$$

对于 $N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ $(k=4,6,8,\cdots,12,14,16,18,20)$ 有类似的形式。

（3）位移形状函数的统一形式　综上所得，位移形状函数可以统一写为

$$N^{(k)}=\begin{cases}\frac{1}{8}(1+\xi_1^{(k)}\xi_1)(1+\xi_2^{(k)}\xi_2)(1+\xi_3^{(k)}\xi_3)(\xi_1^{(k)}\xi_1+\xi_2^{(k)}\xi_2\\ \quad+\xi_3^{(k)}\xi_3-2) \quad (k=1,3,5,7,13,15,17,19)\\ \frac{1}{4}(1-\xi_1^2)(1+\xi_2^{(k)}\xi_2)(1+\xi_3^{(k)}\xi_3) \quad (k=2,6,14,18)\\ \frac{1}{4}(1-\xi_2^2)(1+\xi_1^{(k)}\xi_1)(1+\xi_3^{(k)}\xi_3) \quad (k=4,8,16,20)\\ \frac{1}{4}(1-\xi_3^2)(1+\xi_1^{(k)}\xi_1)(1+\xi_2^{(k)}\xi_2) \quad (k=9,10,11,12)\end{cases} \tag{1.8}$$

由(1.4)式可知，有了位移形状函数(1.8)就已选出母单元位移函数。

2. 单元"映射"　为了得到我们所需要的20节点曲边六面体单元，我们可以设想一种特殊的坐标变换——用其20个节点的总体坐标值，对单元内任一点坐标进行二次插值，即

$$x_i=\sum_{k=1}^{20}N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)x_i^{(k)} \tag{1.9}$$

$$(i=1,2,3)$$

其中 $N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ $(k=1,2,\cdots,20)$ 取位移形状函数 (1.8)

式，但这里它被用来对几何坐标进行插值，故可另外称为几何形状函数。

由 (1.9) 式可知，就任一点的坐标来说，它是从局部坐标系 ξ_i 到总体坐标系 x_i 的变换。那么，从整个单元来看，在局部坐标系中的立方体母单元变换到总体坐标系以后，其子单元将是什么形状，相邻子单元之间是否相容？为了讨论这个问题，我们可以对母单元的形状改变，先线后面地进行分析。对于棱边，例如(5,17)直线(见图1-6)，它在局部坐标系中的方程为 $\xi_1=1, \xi_2=1$，把它们代入(1.9)式，便得其在总体坐标系中的方程，即

$$x_i=a_{1i}\xi_3^2+a_{2i}\xi_3+a_{3i} \quad (i=1,2,3)$$

消去参数 ξ_3，可看出它表示两个抛物线柱面的交线，且可由交线上的三个节点 (5,11,17) 的坐标值唯一地确定。可见，在局部坐标系的直线，变换到总体坐标 系 以 后 成了二次曲线。对于侧面，例如 (3,5,17) 平面(见图1-6)，它在局部坐标系中的方程为 $\xi_1=1$，代入(1.9)式，便得其在总体坐标系中的方程，即

$$x_i=a_{1i}\xi_2^2\xi_3+a_{2i}\xi_2\xi_3^2+a_{3i}\xi_2^2+a_{4i}\xi_3^2+a_{5i}\xi_2\xi_3+a_{6i}\xi_2 \\ +a_{7i}\xi_3+a_{8i} \qquad (i=1,2,3)$$

消去参数 ξ_2 和 ξ_3，可看出它表示一个曲面，且可由曲面上的八个节点 (3,4,5,11,17,16,15,10) 的坐标值唯一确定。可见，在局部坐标系中的平面，变换到总体坐标系以后成了二次曲面。在局部坐标系中的立方体(母单元)，变换到总体坐标系以后是曲边六面体(子单元)，如图 1-7 所示。由于子单元各曲面均由其上八个节点的坐标值唯一地确定，而在相邻单元之间，对应节点又具有相同的坐标，因而所对应点都具

有相同的坐标，所以原来重合的两平面，坐标变换以后仍然重合，满足几何相容条件。

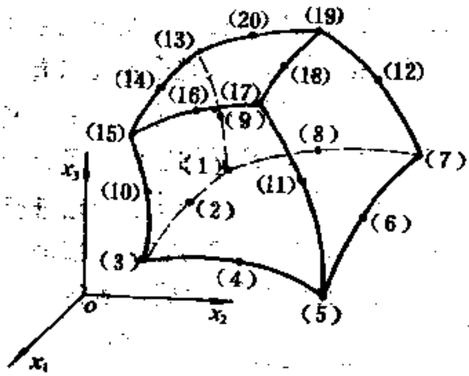


图 1-7

母、子单元之间的关系还可以作更直观的解释。由(1.5)和(1.9)式可知

$$x_i(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\xi_3^{(k)})=x_i^{(k)}$$

$$(k=1,2,\cdots,20)$$

可见子单元中的节点与母单元中的节点一一对应。于是，我们可以假想用三组互相垂直的平行平面，把母单元等分分割。(2,4,6) 平面上的分割情况如图1-8(c)所示。可以再假想用三组曲面把子单元也等分分割，让曲边的等分点数与母单元相应直边的等分点数相等。(2,4,6,8) 曲面上的分割情况如图1-8(d)所示。这样，我们可以把母单元中的直线局部坐标系(见图1-8(a))，看成是子单元中的曲线局部坐标系 (见图 1-8 (b))；把对母单元的坐标变换看成是在子单元中从曲线局部坐标到直线总体坐标的变换；把子单元看成是母单元"映射"而成的"影像"，一个发生了畸变的"影像"。

需要指出的是，虽然由立方体母单元"映射"而成的子单元，正是我们所需要的20节点曲边六面体单元，但是单元的实际形状仅仅取决于节点的总体坐标，所以边界单元不一定与连续弹性体表面完全密合。

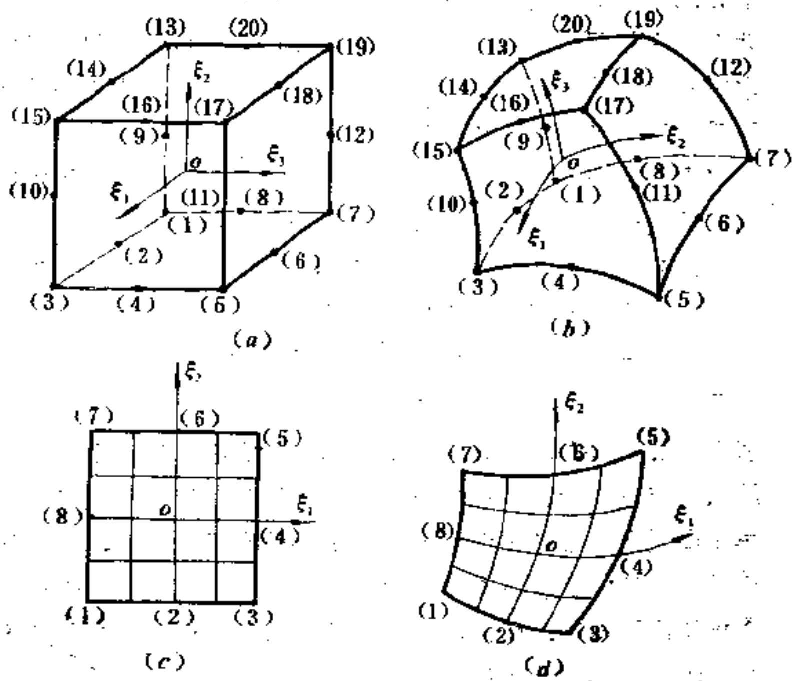


图 1-8

3. 子单元位移函数 由于母单元的直线局部坐标，可看成是子单元的曲线局部坐标，所以在子单元中把曲线局部坐标变换成直线总体坐标以后，可把子单元位移函数选取为

$$U_i=\sum_{k=1}^{20}N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)u_i^{(k)}\quad(i=1,2,3)\qquad(1.10)$$

其中 $N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ $(k=1,2,\cdots,20)$ 是用曲线局部坐标表示的子单元位移形状函数，也是用直线局部坐标表示的母单元位移形状函数。

由(1.9)和(1.10)式可知，位移插值和坐标变换具有完

全相同的构造，它们用同样数目的相应的节点值作为参数，并有完全相同的形状函数。这种位移形状函数与几何形状函数完全等同的单元称为等参数单元，而20节点曲边六面体单元是三维等参数单元的一种。

由(1.8)和(1.10)式可知，上面选取的单元位移函数表明，单元变形以后每个侧面都变成新的二次曲面。例如(3，5,17,15)侧面，它在局部坐标系中的方程为 $\xi_1=1$，代入(1.10)式，便得该侧面任一点的位移，即

$$
\begin{aligned}
u_i=&b_{1i}\xi_2^2\xi_3+b_{2i}\xi_2\xi_3^2+b_{3i}\xi_2^2+b_{4i}\xi_3^2+b_{5i}\xi_2\xi_3\\
&+b_{6i}\xi_2+b_{7i}\xi_3+b_{8i}
\end{aligned}
$$

消去参数 ξ_2 和 ξ_3，它表示一个新的二次曲面，且可由曲面上的八个节点(3,4,5,11,17,16,15,10)的位移值唯一地确定。再考虑到在以节点位移为基本未知量的有限元位移法中，相邻单元之间的对应节点产生相同的位移，因而所有对应点都产生相同的位移，所以原来重合的两曲面，变形以后仍然重合，满足位移连续条件。

由(1.8)和(1.9)式可知

$$
\sum_{k=1}^{20}N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=1
$$

$$
\sum_{k=1}^{20}N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)x_i^{(k)}=x_i\quad(i=1,2,3)
$$

因此，若把符合常量应变状态的节点位移

$$
u_i^{(k)}=c_{0i}+c_{1i}x_1^{(k)}+c_{2i}x_2^{(k)}+c_{3i}x_3^{(k)}
$$

$$
(i=1,2,3;\ k=1,2,\cdots,20)
$$

代入(1.10)式，则得

$$u_i = c_{0i}\sum_{k=1}^{20} N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + c_{1i}\sum_{k=1}^{20} N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\, x_1^{(k)}$$
$$+ c_{2i}\sum_{k=1}^{20} N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\, x_2^{(k)}$$
$$+ c_{3i}\sum_{k=1}^{20} N^{(k)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\, x_3^{(k)}$$
$$= c_{0i} + c_{1i}x_1 + c_{2i}x_2 + c_{3i}x_3$$

可见上面选取的单元位移函数，包含常数项和线性项，满足常量应变条件。

综上所述，我们选取的单元位移函数，既满足位移连续条件，又满足常量应变条件，所以它可以保证当单元尺寸逐步取小时，有限元位移法的解答收敛到正确解答。

4. 二维等参数单元位移函数 上述三维等参数单元可以直接退化为二维等参数单元。

若只取图 1-8(a) 所示立方体单元中方程为 $1+\xi_3=0$ 的 (2,4,6) 平面，则得二维正方形母单元，如图1-8(c) 所示；若把 $\xi_3=-1$ 代入(1.8)式，便得二维等参数单元形状函数，即

$$N^{(k)}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(1+\xi_1^{(k)}\xi_1)(1+\xi_2^{(k)}\xi_2)(\xi_1^{(k)}\xi_1+\xi_2^{(k)}\xi_2-1) \\ \qquad\qquad (k=1,3,5,7) \\ \dfrac{1}{2}(1-\xi_1^2)(1+\xi_2^{(k)}\xi_2) \qquad (k=2,6) \\ \dfrac{1}{2}(1-\xi_2^2)(1+\xi_1^{(k)}\xi_1) \qquad (k=4,8)\end{cases} \tag{1.11}$$

若对正方形母单元作如下坐标变换

$$x_i=\sum_{k=1}^{8} N^{(k)}(\xi_1,\xi_2)\, x_i^{(k)} \qquad (i=1,2) \tag{1.12}$$

则“映射”后的二维曲边四边形子单元如图1-8(d)所示(但这里单元上各点和曲线局部坐标ξ_1,ξ_2仍在平面内)。子单元位移函数为

$$u_i=\sum_{k=1}^{8}N^{(k)}(\xi_1,\xi_2)u_i^{(k)}\quad(i=1,2)\tag{1.13}$$

在具体应用时，对平面问题，应把x_1、x_2和u_1、u_2分别理解为两个方向的坐标和位移；对轴对称问题，应把x_1、x_2和u_1、u_2分别理解为径向、轴向的坐标和位移。

§1-3 单元特性分析

连续弹性体离散化并选取单元位移函数后，应按线性弹性基本方程(几何方程、本构方程和虚功方程或位能变分方程)建立反映节点力与节点位移关系的单元刚度方程。建立单元刚度方程的工作，称为单元特性分析。

1. 线性弹性基本方程

几何方程：

$$\{\varepsilon\}=[L]\{u\}\tag{1.14}$$

其中

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{31}]^T\tag{1.15}$$

$$[L]=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1}\end{pmatrix}^T\tag{1.16}$$

本构方程(各向同性)：