变分法与最优控制

林 畛 主编

哈尔滨工业大学出版社

变分法与最优控制

孙振绮　邢继祥　编

林　黔　主编

哈尔滨工业大学出版社

变分法与最优控制

孙振绮　邢继祥　编

林　晔　主编

*

哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印张9.25　字数235 000
1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷
印数 1－3 000
书号13341·28　定价2.05元
ISBN 7-5603-0027-8/O·7

序　言

本书主要介绍古典变分学原理，庞特里亚金的最大值原理与贝尔曼的动态规划原理，以及它们的应用。此书为高等工科院校硕士研究生教材及应用数学、工程力学专业本科生的教材。

本书是在哈尔滨工业大学校内教材《变分法与最优控制》的基础上改写而成的。在编写中尽量做到：从实际问题中抽象出数学模型，较为系统地叙述基本理论，论证力求严格。同时书中举有大量的例题，并作出详尽的解答。

阅读本书，要求读者具备数学分析、线性代数、常微分方程及普通物理的知识。

完成全书的教学内容需80学时；如果不讲带（*）的部分，可用60学时；若仅讲授“变分法”（(*)部分除外），则只需用40学时。

本书第一篇由孙振绮编写，第二篇由邢继祥编写，林畛对全书作了修改并最后定稿。

限于我们的知识水平，书中难免有错误及不妥之处，请读者批评指正。

编　者

1987年1月于哈尔滨

目　　录

第一篇　变分法

第二篇 最优控制

绪　论

变分法产生于 17 世纪末期，它是研究积分型泛函极值的方法。

为了具体地说明变分法所研究的内容，从下面三个实际问题谈起：

1． 最快滑行曲线问题

这是在历史上首先遇到的一个变分法问题。1696年，约翰·伯努利写了一封公开信，向他的哥哥雅可比·伯努利挑战。自称他已解决了捷线问题，即要找一条曲线，把任意给定的两点 A和 B 连结起来，使质点在不考虑摩擦的情况下，从点A无初速滑动至 B 点时所需的时间最短。雅可比·伯努利利用逐次逼近法解决了这个问题，结果知道最快滑行曲线就是旋轮线。

下面我们用数学形式来表述这一问题：

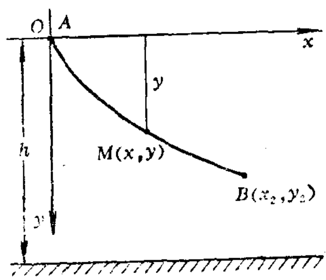

图 1

过点A作一铅直线为 y 轴，再过 y 轴及 y 轴外一点 B作一竖直平面。显然，最快滑行曲线应该在这个平面内。设 $y=f(x)$是 $[0,x_2]$ 上的连续可微函数，且满足 $f(0)=0$，$f(x_2)=y_2$，即表示曲线 $y=f(x)$ 经过 $A(0,0)$ 与 $B(x_2,y_2)$两点（图 1）。

今在 $y=f(x)$ 上任取点$M(x,y)$，由能量守恒定律知：

$$mgh+\frac{1}{2}mv_0{}^2=mg(h-y)+\frac{1}{2}mv^2$$

其中 $v_0=0$，所以，有

$$v=\sqrt{2gy}$$

设质点通过曲线的弧长元素 ds 所需要的时间为

$dT=\dfrac{ds}{v}$，则有

$$T=\int_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}dx \qquad (1)$$

因而，求最快滑行曲线问题与解下列极小值问题等价。即求一函数 $y=f(x)$，使积分（1）达到极小值。

2． 表面积最小的旋转曲面

这个问题可以这样叙述：在联结平面上的两个固定点的所有光滑曲线中求一条曲线，使它绕 Ox 轴旋转，且所得旋转曲面面积为最小。

如果假定两个固定点为 $A(x_0,y_0)$ ，$B(x_1,y_1)$，而$y=f(x)$为联结 A、B 两点的任一连续可微曲线，那么上述问题可表述为，求使积分

$$S=2\pi\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx \qquad (2)$$

为最小的那条曲线。

3． 变形薄膜的平衡

所谓薄膜就是有弹性的曲面，它在静止时是平的，而且只在张力作用下，才自由弯曲和做功。由力学知，变形了的薄膜的位能与其表面面积的增量成正比。

设在静止状态下，薄膜占有平面 xOy 的区域为D（图2），把薄膜的边界 L 在垂直于 xOy 平面的方向做变形，求薄膜边界具有给定的变形时，薄膜的平衡位置。

可以认为：在上述变形中，所有薄膜上的点都只在垂直于 xOy 平面的方向做变动。

设 $u=u(x,y)$ 表示对应于点 (x,y) 的位移，在变形状态下，薄膜面积为

$$S=\iint_D(1+u_x{}^2+u_y{}^2)^{1/2}dxdy$$

如果薄膜元素的变形很小，则可忽略 u_x 与 u_y 的高次幂。这样，薄膜面积 S 可表为

$$\iint_D\left[1+\frac{1}{2}(u_x{}^2+u_y{}^2)\right]dxdy$$

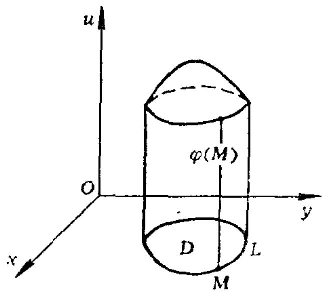

图 2

从而，薄膜面积的增量

$$\Delta S=\frac{1}{2}\iint_D(u_x{}^2+u_y{}^2)dxdy$$

变形薄膜的位能

$$E=\frac{M}{2}\iint_D(u_x{}^2+u_y{}^2)dxdy \qquad (3)$$

其中 μ 是依赖于薄膜的弹性性质的常数。

由于薄膜边界上点的位移是给定的，函数 $u=u(x,y)$ 在区域 D 的边界 L 上要满足

$$u(x,y)\Big|_L=\varphi(M) \quad (M\in L) \qquad (4)$$

且在平衡位置时，变形的薄膜位能又具有最小值，因而确定薄膜上的点的偏差函数应从下述极小问题来求解：在所有于区域 D上连续可微且满足条件（4）的函数$u=u(x,y)$ 中，求一函数使积分（3）的值为最小。

从以上三个实例看到，这里需要求这样一类“函数”的极值，即它的自变量是函数，而不同于在高等数学中所熟悉的函数，我们把它称为泛函。一般地有如下定义：

设M是一个集合，如果对于M的每一个元素 y，都对应有一

个数 J，我们就说在集合M上确定了一个泛函，记为 $J=J[y]$。集合M称为泛函 J 的定义域。

在前二个实例中，泛函的定义域均为有一阶连续微商的函数类，相应地记为 $C^1[0,x_2]$与 $C^1[x_0,x_1]$。

下面再举二个泛函的例子：

例 1　设泛函 $J[y(x)]=\int_0^1(1+\dot{y}^2)^{1/2}dx$，

令 $y(x)=x$，有

$$J[x]=\int_0^1\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}$$

再令　$y(x)=\frac{1}{2}\ (e^x+e^{-x})$ ，则有

$$J\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]=\frac{1}{2}(e-e^{-1})$$

……………………………

如此等等。只要预先给定一个连续可微函数，就能算出泛函的值J，因而定义域为 $C^1[0,1]$。

例 2　设泛函 $J[y(x)]=\int_0^1 y(x)dx$，显然有

$$J[x]=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

$$J[x^2]=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

$$J\left[\frac{1}{x+1}\right]=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\ln 2$$

$$J\left[\frac{1}{1+x^2}\right]=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

…………………

泛函 J 的定义域为 $C^0[0,1]$或$C[0,1]$。

一般地，我们称形式如

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,\dot{y})dx \tag{5}$$

的泛函为最简单的积分型泛函。对于

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\vec{y},\dot{\vec{y}})dx \tag{6}$$

通常称为空间曲线泛函，其中 $\vec{y}$ 为 n 元向量函数。

在变分法产生的初期，变分法的相当一部分知识和许多其它作法都与可微（向量）函数的极值理论有同样的形式，并且不依赖于积分型泛函的特性。臂如提出泛函J的驻点概念，称使泛函 J 的微分等于零的（作为自变元的）函数为 J 的驻点等等。但是这些做法没有构成变分法的基本内容。后来发现变分法的基本内容本质上依赖于积分型泛函的特性。它表现在可把积分型泛函（5）（或(6)）的驻点解释成欧拉方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{\dot{y}}=0$$

（或欧拉方程组）的某个边值问题的解。需指出欧拉方程组远非一般的微分方程组，它的理论在形式与几何方面非常丰富。

十八世纪中叶，变分法已成为一个独立的数学分支。这方面的工作首先应当属于欧拉与拉格朗日。此外在古典变分法的创立中，勒让得及十九世纪的许多数学家：泊松、维尔斯特拉斯、奥斯特洛格拉特斯基、哈密顿、雅可比等也都参与了。

变分法是按照这样的方向发展起来的，即阐明泛函极值点与欧拉方程解之间的联系。这种思想导致得出最简单泛函的极值的充分条件。

哈密顿最先研究了欧拉方程解的某些集合，即所谓的极值曲线场。建立了哈密顿-雅可比偏微分方程。他在光学的研究中发现，由点光源发出的射线集合产生极值曲线场，而描述相应的波的前阵面运动的函数满足哈密顿-雅可比方程。在很大程度上，由于与量子力学的联系，使得极值曲线场理论在后来得到了极大

的发展。特别是在本世纪廿年代创立量子力学的过程中，它起过光辉的作用。直到目前，极值曲线场理论还在不断的发展中。

哈密顿还同雅可比同时阐述了力学变分原理。利用这些变分原理可把力学系统运动的微分方程解释成某个系统的积分型泛函的欧拉方程。应当指出，变分法为力学提供了通用的语言，可用同样的结论来描述不同性质的物理动力系统，其中包括具有无数个自由度的系统（场）。

在十九世纪中叶，利用变分法来证明微分方程（无论是常微分方程，还是偏微分方程）边值问题的可解性的可能性，引起了数学家高斯、狄里赫莱、黎曼和维尔斯特拉斯等人的注意．然而，直到1900年，希尔伯特才采用了令人满意的并适应于拉普拉斯方程的狄里赫莱问题的形式，实现了这些思想。从而为变分法的直接方法打下基础。在现代数值分析中变分方法起着重要的作用。

目前，随着现代控制论的产生与发展，作为其基本理论之一的变分法，日益显示出它的重要作用，它已成为现代科学技术领域中必不可少的应用数学分支。

第一章　最简单泛函的极值

§1.　绝对极值与相对极值

在这一章里，我们主要研究最简泛函

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y(x),\dot{y}(x))dx \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

的极值问题。其中 F 关于$x,y,\dot{y}$ 均有二阶连续偏导数，$y(x)\in C^1[x_0,x_1]$，且$y(x_0)=y_0$，$y(x_1)=y_1$，即两端固定。

为了严格地提出问题，介绍几个概念。

1. 可取曲线

为了求出一条曲线，使泛函（1-1-1）达到极值，必须首先指明属于泛函定义域内的曲线族的性质，以便在这族曲线中，把它确定出来。我们称这个曲线族为可取曲线族。称族中的曲线为可取曲线。

对于泛函（1-1-1）的可取曲线族$\{\Gamma\}$，通常规定：对任一曲线 $y=y(x)\in\{\Gamma\}$，满足

(1) $y(x_0)=y_0$，$y(x_1)=y_1$，即两端点固定；

(2) $y(x)\in C^2[x_0,x_1]$；*

(3) $y=y(x)$在 $[x_0,x_1]$ 上为单值函数，即它与平行于Oy轴的直线只相交于一点。

2. 泛函 $J[y(x)]$的连续性

在研究函数的极值问题中，微分与导数起着重要的作用，其前提条件要求函数必须是连续的。同样，在研究泛函的极值问题时，也需要泛函 $J[y(x)]$ 具有连续性，那么什么是泛函的连续性呢？粗略点说，若对于泛函 $J[y(x)]$ 的自变元 $y=y(x)$ 的微小变化，泛函 $J[y(x)]$ 变化也微小，则称泛函 $J[y(x)]$ 在函数 $y=y(x)$ 处是连续的。在这里，我们有必要说清楚，所谓“微小变化”或者“变化微小”的含义。

对于两个函数 $y=y(x)$与 $y=y_0(x)$，若绝对值 $|y(x)-y_0(x)|$ 对于它们的定义域中的一切 x 值都很小，则称函数 $y=y(x)$ 与函数 $y=y_0(x)$ 是相差微小或相近的，且称二曲线具有零阶接近度。为了定量地刻画零阶接近度，下面给出二曲线间的距离的概念。

定义 设 $y=y(x)$与 $y=y_0(x)$ $(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$ 为两条已知曲线的方程，称

---

*事实上，可设$y(x)\in C^1[x_0,x_1]$。对以后各章均有类似情况。

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y(x) - y_0(x)|$$

为二曲线间的距离。记为 $r_0[y,y_0]$，又称 $r_0[y,y_0]$ 为二曲线的零级距离。

因此，只要 $r_0[y,y_0]$ 充分小，就称二曲线 $y=y(x)$ 与 $y=y_0(x)$ 具有零阶接近度。显然，两条曲线重合的充分必要条件是两条曲线间的零级距离等于零。若一曲线序列

$$y=y_1(x),\ y=y_2(x),\cdots,y=y_n(x),\cdots$$

一致收敛于 $y=y(x)$，则称这个曲线序列与曲线 $y=y(x)$ 的零极距离趋近于零。

现在可以精确地定义泛函 $J[y(x)]$ 的零阶连续性：如果对于任给的一个正数 ε，总可以找到这样的一个 $\delta>0$，只要 $r_0[y,y_0]<\delta$，就恒有

$$|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \varepsilon$$

那么，我们就说泛函 $J[y(x)]$ 在 $y=y_0(x)$ 处是连续的，并称这种连续为零阶连续。

需要着重指出，对于有些泛函，如 (1-1-1) 式，由于积分号下的式子 $F=F(x,y,\dot{y})$ 不仅依赖于 $y(x)$，而且还依赖于 $\dot{y}(x)$。因此对于具有零阶接近度的两条曲线，泛函 $J[y(x)]$ 的值还会相差很大，即 $J[y(x)]$ 出现间断，如

例 1 考虑泛函 $J[y(x)]=\int_0^\pi \dot{y}^2 dx$，

当 $y=\dfrac{1}{n}\sin nx$ 时，有 $J[y(x)]=\int_0^\pi \cos^2 nx dx=\dfrac{\pi}{2}$

当 $y=0$ 时，有 $J[y(x)]=\int_0^\pi 0dx=0$

由于当 $n\to\infty$ 时，有

$\max\left|\dfrac{1}{n}\sin nx - 0\right|\to 0$ 而 $J[y(x)]-J[0]=\dfrac{\pi}{2}$，所以泛

函 $J[y(x)]$ 在 $y=0$ 处间断。

为避免出现上述情况，我们提出两条曲线的一阶接近度的概念：对于二个函数 $y=y(x)$ 与 $y=y_0(x)$，若下列两个绝对值

$$|y(x)-y_0(x)| \text{与} |\dot{y}(x)-\dot{y}_0(x)|$$

对于它们的定义域中的一切x值都很小，则称函数 $y=y(x)$与函数 $y=y_0(x)$具有一阶接近度。

同样，为了定量地刻画这种接近度，我们给出一级距离的定义。

定义 设 $y=y(x)$ 与 $y=y_0(x)$ $(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$ 为两个已给曲线方程，称

$$\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}\{|y(x)-y_0(x)|,\ |\dot{y}(x)-\dot{y}_0(x)|\}$$

为二曲线的一级距离，记为 $r_1[y(x),y_0(x)]$。

这样，当 $r_1[y(x),y_0(x)]$ 充分小时，我们说曲线 $y=y(x)$ 与$y=y_0(x)$具有一阶接近度。类似于泛函的零阶连续性，我们定义一阶连续性：

如果对于任给的一个正数 $\varepsilon>0$，总存在这样一个 $\delta>0$，只要 $r_1[y,y_0]<\delta$，就恒有

$$|J[y(x)]-J[y_0(x)]|<\varepsilon$$

那么，称泛函 $J[y(x)]$在 $y=y_0(x)$处一阶连续。

3． 曲线的邻域

我们称所有与 $y=y_0(x)$ $(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$ 的零级（或一级）距离小于 ε 的曲线的全体，为曲线 $y=y_0(x)$ 的零级（或一级）ε-邻域。

曲线 $y=y_0(x)$ 的零级 ε-邻域，由所有位于 $y=y_0(x)$上，下宽为 2ε 的带形区域内的曲线组成。（图 3）。

有了上述准备，下面可以给出绝对极值与相对极值的定义。

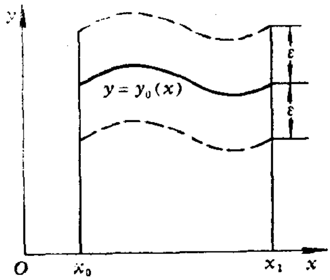

图 3

定义 （绝对极值） 设泛函(1-1-1)的定义域为D。若泛函 $J[y(x)]$在 $y=y(x)\in D$上的值不大于它在D内其它一切曲线上的值，则称泛函 $J[y(x)]$ 在 $y=y(x)$处的值为泛函 J 的绝对极小值。若泛函 $J[y(x)]$ 在 $y=y(x)\in D$上的值不小于它在D内函数曲线中其它一切曲线上的值，则称泛函 $J[y(x)]$ 在 $y=y(x)$处的值为它的绝对极大值。

定义 （相对极值） 设 $G_0\subset D$ 是 $y=y_0(x)$的零级 ε- 邻域，$y=y(x)$ 为 G_0 内任一条曲线。若有 $J[y(x)]\leqslant J[y_0(x)]$，则称泛函 $J[y(x)]$在 $y=y_0(x)$ 处达到了强的相对极大值；若有 $J[y(x)]\geqslant J[y_0(x)]$，则称泛函 $J[y(x)]$在 $y=y_0(x)$ 处达到了强的相对极小值。设 G_1 是 $y=y_0(x)$的一级 ε- 邻域，$y=y(x)$ 是 G_1 内任一曲线，$G_1\subset D$，则由 $J[y(x)]\leqslant J[y_0(x)]$定义出的 $y=y_0(x)$使泛函 $J[y(x)]$达到弱的相对极大值，而由 $J[y(x)]\geqslant J[y_0(x)]$定义出的 $y=y_0(x)$ 使泛函 $J[y(x)]$达到弱的相对极小值。

例 2 设泛函

$$J[y(x)]=\int_0^{\pi} y^2(1-\dot{y}^2)\,dx,\quad y(0)=y(\pi)=0$$

试证明 Ox 轴上的线段 $y=0$ （$0\leqslant x\leqslant\pi$） 给出泛函 $J[y(x)]$ 的弱的相对极小值，但 $J[y(x)]$在此线段上没有达到强的相对极小值。

证明 显然 $J(0)=0$。

今设 ε 为任一小于 1 的正数，G_1 为 $y=0$ （$0\leqslant x\leqslant\pi$） 的一级 ε-邻域，$y=y(x)$为 G_1 中任一不同于 $y=0$ （$0\leqslant x\leqslant\pi$） 的曲线，则 $y\neq0$ 时，有 $y^2(1-\dot{y}^2)>0$，从而