

目 錄

一、柱壳和稜柱壳型的薄壁桿件和空間系統	1
1. 基本假設。扇面積定律。截面的扭曲	1
2. 主坐標。彎曲中心。截面的扇形幾何性質	4
3. 廣義內力。雙力矩。微分平衡方程	7
4. 與直梁彎曲理論的數學相似性。在結構力學問題上的應用	10
5. 薄壁桿件和壳體約束扭轉的一般計算方法	16
6. 桿型壳體受縱向外力作用所產生的雙力矩和應力。橫繫板的影響	20
7. 薄壁的桿件、柱和梁的空間穩定性	26
8. 薄壁桿型結構的空間彎扭振動	34
9. 閉合截面的薄壁的桿件和壳體	37
10. 由柱形壳體和接於其上的薄壁桿件所組成的空間系統	42
二、扁壳與微彎平板	47
1. 在微小及有限形變時扁壳體理論的基本方程	47
2. 用混合法求扁壳理論方程的積分	51
3. 用一個無向函數的求積法	53
4. 理論在建築業中的應用	56
5. 理論用於水力渦輪翼的計算	65

6. 理論在製氫技術中的應用.....	67
7. 扁壳的穩定與振動.....	70
8. 初形變與初應力對於薄壳與薄板的平衡與動力問題 的影響.....	72
9. 扁壳與微彎平板的線性理論中方程的通解.....	75
10. 扁壳的熱應力.....	80
結束語.....	85
文獻.....	88
附錄：關於 B. 3. 符拉索夫所作報告的討論.....	89

一、柱壳和稜柱壳型的薄壁桿件 和空間系統

1. 基本假設。扇面積定律。截面的扭曲

依照我們在著作^[1]中首先說明的、之後並在專論^[2]中發展其應用的一般理論，薄壁桿件係指這樣一類柱形或稜柱形壳體，它的橫截面有剛硬不可變形的周線，同時它的中曲面無剪應變。本文採用專論^[2]的符號來介紹這個理論的主要結果。

桿型壳體中曲面上任意一點 M 的位置，可用兩個坐標規

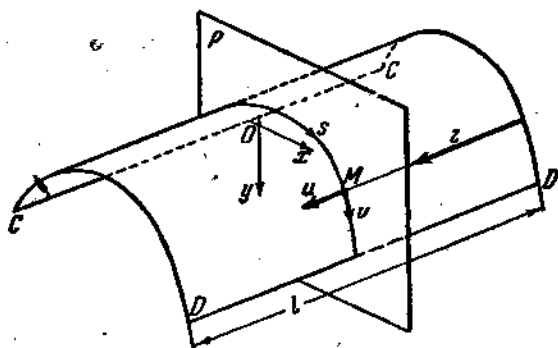


圖 1

定：一個縱坐標 z ，係從某一橫截面算起；另一個橫坐算 s ，為沿截面周線至 M 點的距離；見圖 1。作一截面 P ，並在其上

* 原載於 Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук
№ 9, 1950, Стр. 1267—1325.

作坐標系 (x, y) ，使 Ox, Oy 兩軸和縱軸 Oz 組成左轉坐標系。於是 $x(s)$ 和 $y(s)$ 為截面 $s = \text{const.}$ 上某點 M 的直角坐標。

命 $u(z, s), v(z, s)$ 為 M 點因壳體變形所引起的切向位移。其中 u 為沿 z 軸的縱位移， v 為沿曲線 $s = \text{const.}$ 的切線方向（以 s 增加的方向為正）的橫位移。

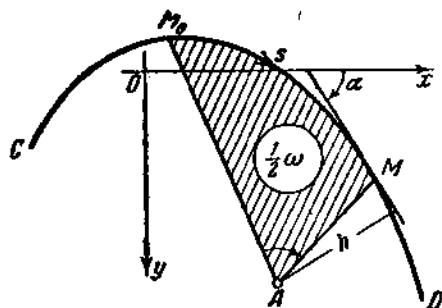


圖 2

橫位移 v 的公式是（參照圖 2）：

$$v(z, s) = \xi(z) \cos \alpha(s) + \eta(z) \sin \alpha(s) + \theta(z) h(s). \quad (1.1)$$

式中 $\alpha(s)$ 為曲線 $s = \text{const.}$ 在 M 點的切線跟 Ox 軸的交角； $h(s)$ 為某點 A 至 M 點的切線的垂直距離； $\xi(z)$ 和 $\eta(z)$ 為經過 A 點的縱向直線沿 Ox, Oy 兩方向的變位； $\theta(z)$ 為扭轉角，以使截面 $s = \text{const.}$ 逆時針向轉動者為正（朝 z 軸的正向，即朝 z 增加的方向觀看）。公式 (1.1) 係根據微小位移和桿型壳體的側面不能變形的假設求得。

利用第二個關於中曲面無剪應變的假設，即從方程

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

出發，我們得縱位移 u 的公式如下：

$$u(z, s) = \zeta(z) - \xi'(z) x(s) - \eta'(z) y(s) - \theta'(z) \omega(s). \quad (1.2)$$

其中 $\zeta(z)$ 為截面 $s = \text{const.}$ 的縱向（或稱軸向）位移； $\xi'(z)$ ，

$\eta'(s)$, $\theta'(s)$ 爲變位 $\xi(s)$, $\eta(s)$ 和扭轉角 $\theta(s)$ 對 s 的導數。

函數 $\omega(s)$ 爲由周線弧 M_0M 和二直線段 M_0A , MA 所圍成的扇形的面積的兩倍。由上述方式決定的面積，作者稱它爲扇面積*。這塊面積係從 P 平面上的極點 A 至周線上某起點 M_0 的不動向徑 AM_0 算起。本文和專論^[2]中的扇面積 $\omega(s)$ 均以流動向徑 AM 在 P 平面上逆時針向轉動者爲正（朝 z 軸的正向觀看）。

將 (1.2) 式對 z 微分一次，便得桿型壳體的中曲面沿其母線方向的伸縮應變 $\varepsilon = \varepsilon(z, s)$ 的一般公式：

$$\varepsilon(z, s) = \zeta'(z) - \xi''(z) x(s) - \eta''(z) y(s) - \theta''(z) \omega(s). \quad (1.3)$$

在這等式的兩端乘以彈性係數 E ，我們便得縱向法應力（參照圖 3）的公式如下

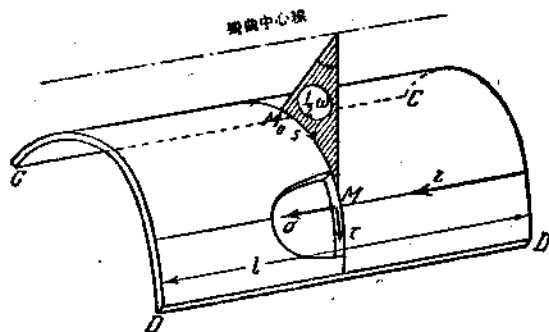


圖 3

$$\sigma(z, s) = E[\zeta'(z) - \xi''(z) x(s) - \eta''(z) y(s) - \theta''(z) \omega(s)]. \quad (1.4)$$

桿型壳體的公式 (1.2), (1.3), (1.4) 在所設的假定下具有

* 讀者注意，“扇面積”（Секториальная площадь）是薄壁桿件理論中的術語，係等於扇形的面積的兩倍。它的算式是

$$\omega(s) = \int_{M_0}^M h(s) ds$$

——譯者

一般的性質。這些公式表明，在薄壁桿件中除去由於伸縮和彎曲所產生的應變和應力外，（這些係由公式 (1.2), (1.3), (1.4) 中的前三項規定，並且顯然地它們的分佈係按照平截面定律），還有由於桿件的扭轉所產生的增補應變和應力。後者在截面 $s = \text{const.}$ 上的分佈係按照扇面積 $\omega(s)$ 定律，跟平截面定律本質上不同。僅僅是由公式 (1.2), (1.3), (1.4) 的最後一項（即第四項）所決定的、並且在截面 $s = \text{const.}$ 上被扇面積定律所描寫的縱位移 $u(x, s)$ 、縱向應變 $\varepsilon(x, s)$ 以及縱向應力 $\sigma(x, s)$ 使得具有剛硬開口側面的桿型壳體的截面在扭轉後不仍為一平面。截面發生了歪曲。我們稱這種歪曲為扭曲（депланация）。

從公式 (1.2), (1.3), (1.4) 可見平截面定律是扇面積定律的一個特殊情形。由此還可見甚至連構成材料力學主要部份的初等直梁彎曲理論，亦為我們的基於扇面積定律的薄壁桿件和壳體的一般理論的特殊情形。

2. 主坐標。彎曲中心。截面的扇形幾何性質

對於截面 $s = \text{const.}$ 有任意指定的開口截面的桿型壳體，四項公式 (1.2), (1.3), (1.4) 中的 $1, x(s), y(s), \omega(s)$ 等四量是坐標 s 的四個線性無關的函數。在此四量中，除第一個為常數一外，其他各量都跟 P 平面上 x, y 坐標的原點、 x 或 y 軸的方向、計算扇面積的極點 A 和周線上的起點 M_0 等六個參數有關。正如在專論^[2]中早經指出的，上述六個參數總可能這樣選擇，以使函數 $1, x(s), y(s), \omega(s)$ 在自變數 s 變化的區域內（即桿

$$\begin{aligned}
C \int_F x dF + (a_y - b_y) \int_F x^2 dF - (a_x - b_x) \int_F xy dF + \int_F \omega_B x dF &= 0, \\
C \int_F y dF + (a_y - b_y) \int_F xy dF - (a_x - b_x) \int_F y^2 dF + \int_F \omega_B y dF &= 0, \quad (1.7) \\
C \int_F dF + (a_y - b_y) \int_F x dF - (a_x - b_x) \int_F y dF + \int_F \omega_B dF &= 0.
\end{aligned}$$

選定 b_x, b_y 後，從這些方程便可求得在任意坐標 Ox, Oy 下彎曲中心 A 的坐標 a_x, a_y ，和用以規定周線上作為計算扇面積起點 M_0 的常數 C 。

若 Ox, Oy 為截面的主形心軸，則條件 (1.5) 的前三式成立，於是從方程 (1.7) 的前兩式我們得彎曲中心的坐標（見專論^[2]第 41 頁）：

$$\begin{aligned}
a_x &= b_x + \frac{1}{J_x} \int_F \omega_B y dF, \\
a_y &= b_y - \frac{1}{J_y} \int_F \omega_B x dF.
\end{aligned} \quad (1.8)$$

式中 J_x, J_y 各為關於 Ox, Oy 軸的截面的主慣性矩； b_x, b_y 為平面 P 上任意選擇的一點 B 的坐標； $\omega_B = \omega_B(s)$ 為以 B 為極點的扇坐標。為計算彎曲中心的坐標， ω_B 的計算得以周線上任意一點 N_0 為起點。

今將扇面積的極點置於彎曲中心 A ，則由條件 (1.5) 的最後一式我們便可決定計算扇面積的起點 M_0

$$\omega(M_0, N_0) = \frac{1}{F} \int_F \omega(N_0, M) dF. \quad (1.9)$$

式中 $\omega(M_0, N_0)$ 為對應於弧 $M_0 N_0$ 的扇面積， $\omega(N_0, M)$ 為對應於變弧 $N_0 M$ 的扇面積（參考圖 4）， F 為截面的總面積。

由 (1.9) 式決定的點 M_0 ，稱為周線的主扇點。

此後都假定 Ox, Oy 兩軸為桿件截面的主形心軸，扇面積的極點 A 位於彎曲中心，並且以主扇點 M_0 為計算扇面積的起點。

適合正交條件的函數 $1, x(s), y(s), \omega(s)$ ，稱為薄壁桿件的主廣義坐標。

3. 廣義內力、雙力矩。微分平衡方程

現在我們來規定薄壁桿件中的廣義縱向內力。從虛功概念出發，我們可將這些廣義內力規定為在截面 $s = \text{const.}$ 上所有縱向內力微分 σdF 在四個縱向虛位移 $1, x(s), y(s), \omega(s)$ (根據 (1.2) 式) 上所作的功。

注意到正交條件 (1.5)，便有

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma 1 dF = EF\zeta, \\ M_x &= \int_F \sigma y dF = -EJ_x \eta'', \\ M_y &= -\int_F \sigma x dF = EJ_y \xi'', \\ B &= \int_F \sigma \omega dF = -EJ_\omega \theta''. \end{aligned} \quad (1.10)$$

在這些公式中，

$$\begin{aligned} F &= \int_F 1^2 dF, \quad J_x = \int_F y^2 dF, \\ J_y &= \int_F x^2 dF, \quad J_\omega = \int_F \omega^2 dF. \end{aligned} \quad (1.11)$$

它們為桿型壳體的主要幾何特性。在這些特性中， F 為截面的面積； J_z, J_y 各為主慣性矩； J_ω 為一新的特性，稱為薄壁桿件的扇慣性矩 (секториальной момент инерции)，它的維為 cm^6 。

在由公式 (1.10) 規定的諸廣義縱向力中， N 為縱向力； M_z, M_y 為彎矩； B 為一個新的廣義內力，稱為雙力矩 (Бимомент)，它的維為 $\text{kg} \cdot \text{cm}^2$ 。此內力係由截面的扭曲所產生，在主廣義坐標 $1, x(s), y(s), \omega(s)$ 中為一靜合力等於零的廣義縱向力。

從公式 (1.10) 和 (1.4) 消去 ζ, ξ, η, θ 的導數，我們得

$$\sigma(x, s) = \frac{N(s)}{F} - \frac{M_y(s)}{J_y} x(s) + \frac{M_z(s)}{J_z} y(s) + \frac{B(s)}{J_\omega} \omega(s). \quad (1.12)$$

在此公式中，廣義縱向力視為坐標 s 的函數。

公式 (1.12) 會同壳體元素的微分平衡方程

$$\frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial s} + \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} = 0,$$

可導得由於桿件的彎曲和扭轉所引起的平均剪應力的通式如下：

$$\tau(x, s) = E \left\{ \xi'''(s) \frac{S_y(s)}{\delta(s)} + \eta'''(s) \frac{S_z(s)}{\delta(s)} + \theta'''(s) \frac{S_\omega(s)}{\delta(s)} \right\}. \quad (1.13)$$

式中 $\delta(s)$ 為壳體的厚度； $S_y(s), S_z(s), S_\omega(s)$ 各為裁去部份 (指壳體的周線在欲求剪應力的 M 點的任何一邊的一部份) 的靜力矩和扇矩 (секториальный момент)；即：

$$\begin{aligned}
 S_x(s) &= \int_{s_C}^s y dF = \int_s^{s_D} y dF, \\
 S_y(s) &= \int_{s_C}^s x dF = \int_s^{s_D} x dF, \\
 S_\omega(s) &= \int_{s_C}^s \omega dF = \int_s^{s_D} \omega dF.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

式中 s 為 M 點的流動坐標; s_C, s_D 各為周線端點的坐標。

公式 (1.13) 亦可寫成爲

$$\tau(x, s) = -\frac{Q_x(x) S_y(s)}{\int_y \delta(s)} - \frac{Q_y(x) S_x(s)}{\int_x \delta(s)} - \frac{K(x) S_\omega(s)}{\int_\omega \delta(s)}. \tag{1.15}$$

式中 $Q_x(x), Q_y(x)$ 各為由於彎曲而產生的沿 Ox, Oy 兩主軸方向的橫力 (поперечная сила); $K(x)$ 為由於沿壳壁均勻分佈的剪應力所產生的扭力矩;

$$\begin{aligned}
 Q_x &= \int_F \tau \delta dx = -EJ_y \xi''', \\
 Q_y &= \int_F \tau \delta dy = -EJ_x \eta''', \\
 K &= \int_F \tau \delta d\omega = -EJ_\omega \theta'''.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

從 (1.15) 和 (1.16) 兩式, 得

$$\begin{aligned}
 Q_x &= -M_y', \\
 Q_y &= M_x', \\
 K &= B',
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

式中的最後一式乃是我們對於著名的儒拉符斯基 (Журавский) 定理 (即前兩式) 的推廣。

列出桿型壳體的橫向微小薄片的平衡條件, 並注意到正交條件 (1.5), 我們可得計算基本函數 $\xi(x), \eta(x), \theta(x)$ 的

四個獨立的方程：

$$\begin{aligned} EF\zeta'' + q_z &= 0, \\ EJ_y \xi^{IV} - q_x &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} - q_y &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' + m &= 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

這些方程中的第一式屬於桿件由線佈（即單位桿長的）縱向力 $q_z(z)$ 所產生的伸長或壓縮。第二第三兩方程屬於由橫向線佈荷載 $q_x(z), q_y(z)$ （力的方向平行於 Ox, Oy 兩軸）所產生的彎曲。方程 (1.18) 的最後一式會同在桿件端面的邊界條件則決定扭轉角 $\theta(z)$ 。在此方程中， EJ_ω 稱為扇抗扭剛度（секториальная жесткость）； GJ_d 為桿件自由扭轉時的抗扭剛度； m 為關於彎曲中心線的外界線佈扭力矩。此力矩以逆時針向作用者為正（朝 z 軸的正向觀看）。

4. 與直梁彎曲理論的數學相似性。

在結構力學問題上的應用

此處說明的藉助於新的廣義力和幾何特性（雙力矩，截面的扇慣性矩，截面的扇靜力矩），並基於扇面積定律的薄壁桿件的一般理論，和材料力學教科書中所說明的、基於平截面定律的直梁彎曲理論，建立在同一概念上。而後者為可由我們的一般理論導出的一個特例。

試單獨考慮在上述公式和方程中僅由扭轉角 $\theta(z)$ 描寫的薄壁桿件的約束扭轉理論，可見這理論的數學表述和直梁彎曲的初等理論完全相似。下列關於直梁理論和薄壁桿件約束扭轉

理論的基本公式的摘要，便表明了這個相似性（見專論[2]第111頁）：

在 Oys 平面內的彎曲
(平截面定律)

$$J_x = \int_F y^2 dF,$$

$$S_x = \int_F y dF,$$

$$\eta = \eta(x),$$

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx},$$

$$M_x = -EJ_x \eta'',$$

$$Q_x = M'_x = -EJ_x \eta''',$$

$$\sigma_x = \frac{M_x(x)}{J_x} y(x),$$

$$\tau_x = -\frac{Q_x(x) S_x(x)}{J_x \delta(x)},$$

$$q_y = q_y(x),$$

約束扭轉
(扇面積定律)

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF,$$

$$S_\omega = \int_F \omega dF,$$

$$\theta = \theta(x),$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx},$$

$$B = -EJ_\omega \theta'',$$

$$K = B' = -EJ_\omega \theta''',$$

$$\sigma_\omega = \frac{B(x)}{J_\omega} \omega(x),$$

$$\tau_\omega = -\frac{K(x) S_\omega(x)}{J_\omega \delta(x)},$$

$$m = m(x).$$

從這個相似性可引出下列重要的結論：所有在材料力學和結構力學中熟知的計算直梁和桿系的解析方法（基於平截面定律），全部可以推廣到薄壁桿件和由這些桿件組成的系統的約束扭轉理論。

扭轉角 $\theta = \theta(x)$ 的決定，藉助於求解微分方程

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' = m. \quad (1.19)$$

這個方程的形式和直梁預受縱向拉力 P 時橫向彎曲理論的方程

$$EJ_x \eta^{IV} - P\eta'' = q_y, \quad (1.20)$$

相同。特別是三彎矩方程在我們的理論中相當於多跨連續薄壁桿件的三彎力矩方程（見專論[2]第8頁）。這個方程可在多跨連續梁（受拉力和彎曲）的三彎矩方程中以 GJ_d 代替拉力 P ，以支座雙力矩 B_{n-1} , B_n , B_{n+1} 代替支座彎矩 M_{n-1} , M_n , M_{n+1} ，以扇慣性矩 $J_{\omega,n}$, $J_{\omega,n+1}$ 代替慣性矩 $J_{x,n}$, $J_{x,n+1}$ ，以扭力矩 m_n , m_{n+1} 代替橫向載荷 q_n , q_{n+1} 而得。

對於柱形和稜柱形開口截面的壳體（例如鋼筋混凝土壳體），方程(1.19)中顧及剪應力沿壳體厚度非均勻分佈的數量 GJ_d ，正如作者的研究所指出的，在許多場合下可以略去不計。於是這個方程取一更簡單的形式

$$EJ_{\omega} \theta^{IV} = m, \quad (1.21)$$

這跟直梁的彎曲方程

$$EJ_x \eta^{IV} = q_y, \quad (1.22)$$

絲毫不差地有同一形式。由此還可見壳體約束扭轉時的四個基本數量（對應直梁變位 η 的扭轉角 θ ，對應於傾度 η' 的導數 θ' ——根據(1.2)式， θ' 規定截面的絕對扭曲——對應於彎矩 M_x ，的雙力矩 B ，對應於橫力 Q_y ，的扭力矩 K ）可由熟知的直梁彎曲理論中的解析或圖解法求定。例如一長度為 l 的壳體承受均佈荷載 $q_y = q$ ，荷載的方向係沿 Oy 向，而它的作用線對於彎曲中心的偏心矩為 e ，設壳體在兩端 $x=0$, $x=l$ 是鉸支的（即在這類支座上變位 η 和彎矩 M_x 以及約束扭轉時扭轉角 θ 和雙力矩 B 等於零）於是彎矩 $M_x(x)$ 和變位 $\eta(x)$ 以及和它們對應的雙力矩 $B(x)$ 和扭轉角 $\theta(x)$ 有完全相同的公式：

$$\begin{aligned}
 M_x(z) &= \frac{qz(l-z)}{2}, \\
 \eta(z) &= \frac{qz}{24 E J_x} (l^3 - 2lz^2 + z^3), \\
 B(z) &= \frac{mz(l-z)}{2}, \\
 \theta(z) &= \frac{mz}{24 E J_\omega} (l^3 - 2lz^2 + z^3).
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

公式中的後兩式係根據我們的相似理論在前兩式以 $m=qe$ 代替 q ，以 J_ω 代替 J_x ，以 θ 代替 η ，以 B 代替 M_x 而得。

變矩 M_x 和變位 η 在跨度的中點達最大值：

$$\max. M_x = \frac{ql^2}{8}, \quad \max. \eta = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{E J_x}.$$

相似地，雙力矩 B 和扭轉角 θ 亦在跨度的中點達最大值：

$$\max. B = \frac{ml^2}{8}, \quad \max. \theta = \frac{5}{384} \frac{ml^4}{E J_\omega}.$$

在荷載 q 係平行 Oy 軸並且它的作用線對於彎曲中心線的偏心距為 e 的場合，任一點 (z, s) 的縱向法應力 $\sigma(z, s)$ 可按下列二項公式計算：

$$\sigma(z, s) = \frac{M_x(z)}{J_x} y(s) + \frac{B(z)}{J_\omega} \omega(s). \tag{1.24}$$

假如壳體還有一縱向邊緣是鉸支的（例如在結構工程中所採用的柱型薄壳水壩或工業建築物中的屋蓋等（圖 5）便有這種情形），則由作用在壳體上的橫向荷載 q 所產生的法應力 $\sigma(z, s)$ 可由下列單項公式計算：

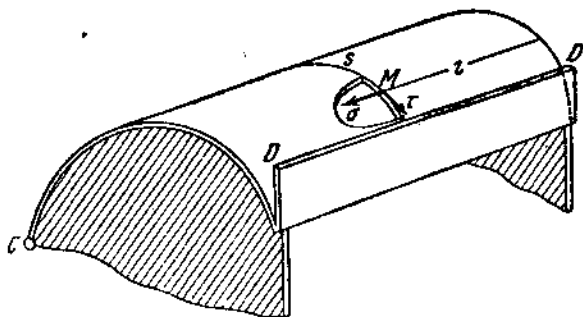


圖 5

$$\sigma(s, s) = \frac{B(s)}{\int_{\omega}} \omega(s). \quad (1.25)$$

當壳體的縱向支承邊上所有各點都固定，使它亦不得有縱向位移時，扇面積 $\omega(s)$ 圖如圖 6a 所示。在這種場合，邊緣上不動（縱向亦不動）的支點 C 便成為計算扇面積的起點，假如壳體在縱向邊緣上只受鉸支，使它僅無截面平面內的位移，因而在這邊上得有縱向移動（這樣在縱向鉸支邊 $C-C$ 上，將和在另一縱向懸空邊 $D-D$ 上一樣，剪應力都等於零），則扇面積圖如圖 6b 所示。在這種場合，由於在二縱向邊上都

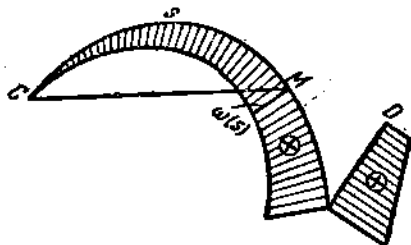


圖 6a

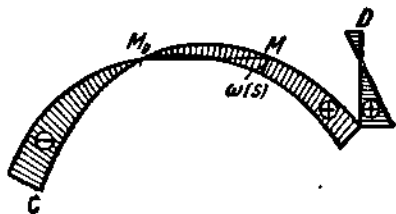


圖 6b

無剪應力，計算扇面積的起點 M_0 的位置由條件扇靜力矩等於零決定：

$$\int_F \omega dF = 0.$$

扇慣性矩在兩種場合都由下式決定：

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF.$$

已知 $\omega(s)$ 圖後計算 J_ω ，可有效地應用結構力學中熟知的圖解解析法，特別是維立夏根 (Верещагин) 法*。

公式 (1.26) 中的雙力矩 B ，可把它當作與它對應的直梁彎曲理論中的彎矩來計算，只要用外界扭力矩 $m = qe$ 代替梁的橫向荷載 q 。其中 e 是外力作用線關於縱向支承邊（這在上述情形便是彎曲中心線）的偏心距。

任意一點 M 的剪應力 $\tau(z, s)$ ，亦可由單項公式決定

$$\tau(z, s) = -\frac{K(z)}{J_\omega \delta(s)} S_\omega(s). \quad (1.27)$$

式中 $K(z) = B'(z)$ 是內扭力矩，而 $S_\omega(s)$ 是截面裁去部份的扇矩：

$$S_\omega(s) = \int_{s_M}^D \omega dF. \quad (1.28)$$

假如壳體是一多跨連續建築，在它的橫截面內受剛硬橫隔板的支承，則從 (1.17) 式計算雙力矩，可將連續梁的彎矩乘以與各跨對應的橫向荷載關於彎曲中心線的偏心距 e 而得。各支承上的雙力矩自然亦可以由三雙力矩方程求得。

* 這是基於圖形互乘原理的方法