TSINGHUA UNIVERSITY

固体本构关系

黄克智 黄永刚 编著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

固体本构关系

黄克智　黄永刚　编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书是作者参加国家自然科学基金重大项目“材料的宏微观力学与强韧化设计”的研究成果；也是作者多年来在为清华大学研究生开设“固体本构关系”课程及有关讲座的基础上，经逐年积累更新后编写而成。书中全面系统地阐述了固体本构关系，涉及国内外各种前沿理论和作者的研究成果。全书共分 6 章，分别为小变形弹塑性本构关系、细观力学基础、连续介质力学概述、大变形弹性本构关系、大变形弹塑性本构关系以及应变梯度塑性理论。书末附有张量分析简介，各章末附有习题、提示及解答。

本书可作为力学、材料等专业研究生教材，也可供这些专业的教师与科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

固体本构关系/黄克智，黄永刚编著. 一北京：清华大学出版社，1999
ISBN 7-302-03663-2

Ⅰ. 固… Ⅱ. ①黄…② 黄… Ⅲ. 固体-本构关系 Ⅳ. O481

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 34575 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：清华园胶印厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：787×960 1/16　**印张**：27.75　**字数**：640 千字
版　次：1999 年 9 月第 1 版　1999 年 9 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-03663-2/O · 218
印　数：0001~2000
定　价：34.00 元

序

本书为第一作者黄克智在清华大学自 1987 年为研究生（以博士生为主）开设“固体本构关系与强度”（以后改为“固体本构关系”）课程，并逐年更新补充积累的基础上编写而成，其中也包括 1986 年 11 月在浙江大学力学系与 1987 年 8 月国家教委工程力学教材委员会在江西庐山举办的“固体本构理论”讲座的内容。第二作者黄永刚于 1995 年参加本书的编写，对全书的内容与结构作了许多修改，尤其以包括其本人成果在内的较多的科研成果充实了第 2 章细观力学基础与第 6 章应变梯度塑性理论的内容。

本书第 1 章小变形弹塑性本构关系，系统地阐述了这一问题现有的几个主要理论。这是一个力学工作者必须具备的最起码的基础知识。但是就作者多年在清华大学对研究生（尤其是博士生）入学考试的经验证明，能掌握这些基本内容（例如 J_2 流动理论与 J_2 形变理论及其对比）的为数不多。因此第 1 章的部分目的是为了给在力学专业本科和硕士生阶段没有学好这些基础知识者提供一个补救的机会。第 1 章的节 1.5：Tresca 流动理论（混合硬化）是本书首次发表的内容。这是因为在工程上为了简单起见常常采用 Tresca 屈服准则（即最大剪应力塑性准则），但是往往有人同时采用与之不关联的、基于 Mises 屈服准则的流动法则。本书作者认为有必要建立一个与 Tresca 屈服准则相关联的塑性理论（混合硬化），其重要性是与 J_2 流动理论（混合硬化）对等的。但为了简单起见，该节中假设了材料的主应力（或主应变）方向是不变的。

本书第 2 章细观力学基础，系统介绍了 Eshelby，Hill，Mura 等人发展的夹杂理论。实际材料就其细观说来都不是均匀连续，而是具有其内部结构的。例如，多晶体是由许多单晶颗粒组成；材料内部含有许多夹杂；复合材料包含许多相。由材料的细观组成与结构推算总体的力学行为，是近年来固体力学界许多学者关注的课题。本书第一作者及其研究组在研究相变材料（例如形状记忆合金、铁电材料）与第二作者及其研究组在研究复合材料的力学行为时，均充分利用了这种细观力学的研究方法。

大变形固体本构理论是目前固体力学的前沿领域。目前系统阐述这一领域的书很少，无论是专著，还是研究生或本科生教材。研究大变形塑性本构理论需要以下两方面的基础：

(1) 张量分析：目前多数教材中的张量分析还仅限于将张量当作带指标的符号。实际上，张量分析的理论与用途远比指标符号深刻得多。它不仅可以使推导变得异常简洁，而且还可以清楚地显示问题本身的物理意义，有时会得到一些意想不到的结果。我们可以毫不夸张地说，不懂得张量分析，要阅读和消化现代力学文献是不可能的。在清华大学工程

力学系每年都为硕士生开设“张量分析”学位课[1]。但为了还未系统掌握张量分析读者的方便，本书最后附有一个附录：张量分析（介绍），当然只能包含一些最少量的必要知识。

(2) 连续介质力学：这里指的是现代连续介质力学，包括应力理论、应变理论和本构理论。它已远远超出某些已有教科书的范围。

塑性本构理论课程若不与张量分析和连续介质力学相结合就只能是入门性质的，而不可能是比较深入的。为此，本书第3章连续介质力学概述，也提供了为研究本构理论所必需的连续介质理论基础知识。

第4章大变形弹性本构关系，是必要的基础内容。第5章大变形弹塑性本构关系，系统地介绍了许多基本概念和几种主要的理论。对于大变形问题，本构关系可以在物体变形前的构形（参考构形）中写出，也可以在物体变形后的构形（即时构形）中写出，甚至还可以在卸载后的构形（中间构形）中写出。这几种写法涉及到不同的坐标，不同的应力（率）与应变（率）。骤然看来，它们之间的关系非常复杂。考虑到这一难点，本书着重说明这几种写法之间的相互“转移”关系，希望读者做到举一就能反三。

近年来的一些试验表明，当非均匀塑性变形特征长度在微米量级时，材料具有很强的尺度效应。其原因在于，一点的应力不仅与该点的应变有关，而且也与该点的应变梯度有关。由于传统的塑性理论中本构模型不包含任何尺度，所以它不能预测尺度效应。然而，在工程实际中迫切需要处理微米量级的设计和制造问题，例如，微电力系统（MEMS）、微电子封装、先进复合材料及微加工。因此这一领域成为近五年来固体力学的热点。本书第6章应变梯度塑性理论，其目的在于扩大读者的眼界，为进一步的研究准备基础。

本书受到国家自然科学基金委员会长期支持，同时也是本书两作者参加国家自然科学基金重大项目“材料的宏微观力学与强韧化设计”（项目批准号19891180）的研究成果，作者对国家自然科学基金委员会的支持表示感谢。此外，作者对为本书出版过程提供过帮助（包括建议、题解、打字、校对等）的许多同事与学生（张晓堤、江冰、姜汉卿、邱信明等），尤其是对清华大学出版社长期的出版支持表示感谢。

第一作者　黄克智

1999年3月

1) 教材为黄克智，薛明德，陆明万编著，张量分析，北京：清华大学出版社，1986

目　　录

第 1 章　小变形弹塑性本构关系 1
1.1　经典弹塑性本构关系 1
1.2　J_2 流动理论 14
1.2.1　各向同性硬化 14
1.2.2　混合硬化 17
1.3　J_2 形变理论及其与 J_2 流动理论（各向同性硬化）的比较 27
1.3.1　J_2 形变理论 27
1.3.2　J_2 形变理论与 J_2 流动理论的比较 34
1.4　奇异屈服面塑性理论 36
1.4.1　Sanders 理论 36
1.4.2　Koiter 理论 41
1.5　Tresca 流动理论（混合硬化） 49
1.6　塑性基本假设 65
1.6.1　Drucker 假设 65
1.6.2　Ilyushin 假设 69
1.6.3　对 J_2 形变理论的重新评价 72
1.7　J_2 角点理论 75
1.7.1　塑性应变率势 75
1.7.2　$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 为凸函数的条件 82
1.7.3　逆塑性本构关系 90
1.7.4　J_2 角点理论 95
1.7.5　应变率势理论 101
1.8　压力敏感及塑性膨胀模型 105
习题 1 110

第 2 章　细观力学基础 120
2.1　Eshelby 相变应变问题 120
2.1.1　对称张量的矩阵表示 122
2.1.2　弹性约束张量 128
2.1.3　与 Eshelby 张量 $\boldsymbol{S}$ 相对偶的张量 $\boldsymbol{T}$ 131
2.2　夹杂问题 132
2.3　复合体的平均弹性模量 135

2.3.1 Voigt 近似......135
2.3.2 Reuss 近似......139
2.3.3 Hill 理论......140
2.3.4 自洽方法......143
2.4 能量方法......156
2.4.1 稀疏解法（不考虑夹杂相互作用）......161
2.4.2 自洽方法......163
2.4.3 广义自洽方法......165
2.4.4 Mori-Tanaka 方法......166
2.4.5 各种方法的比较......170
2.4.6 注记......171
习题 2......172

第 3 章 连续介质力学概述......174
3.1 变形几何......174
3.1.1 $\boldsymbol{F}$ 的极分解......177
3.1.2 线元、面元与体元的变换......182
3.1.3 Hill 应变度量与 Seth 应变度量......183
3.2 变形运动学......185
3.2.1 速度梯度、变形率、旋率......185
3.2.2 各种旋率......189
3.2.3 Hill 应变度量、Seth 应变度量的率......190
3.3 应力理论......194
3.3.1 Cauchy 应力，第一类与第二类 P-K 应力......194
3.3.2 动量方程......198
3.3.3 变形功率......199
3.3.4 与 $\mathscr{E}, \boldsymbol{E}^{(n)}$功共轭的应力度量......201
3.4 质量与能量的守恒或平衡律......202
3.4.1 质量守恒律......202
3.4.2 机械能平衡律......204
3.4.3 能量平衡律......205
3.4.4 熵不等式，熵平衡律......206
3.5 本构理论的客观性原理......208
3.5.1 客观量......208
3.5.2 张量的客观率（或客观导数）......216
3.5.3 本构理论的客观性原理......219

3.6 Lagrange 嵌入（或随体）曲线坐标，张量的转移......223
3.6.1 Lagrange 嵌入曲线坐标系......223
3.6.2 张量的转移......226
3.6.3 张量的四个客观导数......229
3.7 小变形弹塑性本构关系形式上的推广......231
3.7.1 弹性本构关系（率形式）......232
3.7.2 各向同性硬化 Prandtl-Reuss 弹塑性本构方程......233
3.7.3 混合硬化......235
3.7.4 J_2形变理论......236
3.8 局限性......237
习题 3......242

第 4 章 大变形弹性本构关系......243
4.1 弹性本构关系与热传导......243
4.1.1 弹性本构关系......243
4.1.2 一个特例......246
4.1.3 热传导......251
4.1.4 率形式弹性本构关系......253
4.2 弹性张量必须满足的条件......256
4.3 各向同性材料大变形弹性本构关系......260
习题 4......266

第 5 章 大变形弹塑性本构关系......268
5.1 弹性变形与塑性变形......268
5.2 弹性变形率 $\boldsymbol{d}^{e}$ 与塑性变形率 $\boldsymbol{d}^{p}$......273
5.2.1 Moran-Ortiz-Shih 定义......274
5.2.2 Green-Naghdi 与 Simo-Ortiz 的定义......280
5.2.3 Rice 与 Hill 的定义......281
5.2.4 三种定义的比较及卸载构形刚性转动$\boldsymbol{\beta}$的影响......286
5.3 Rice-Hill 大变形弹塑性理论......288
5.3.1 率形式本构关系......290
5.3.2 内变量的演化，正交法则......294
5.3.2.1 弹性增量与塑性增量......297
5.3.2.2 在参考构形 $\mathscr{R}$ 中提屈服条件......299
5.3.2.3 在即时构形 τ 中提屈服条件......308
5.4 度量相关性......316

5.4.1 应变度量 $\mathscr{E}$及率$\dot{\mathscr{E}}$，应力度量$\mathscr{T}$及率$\dot{\mathscr{T}}$ 317
5.4.2 度量不变量 320
5.4.3 对应于不同度量函数的本构关系 321
5.4.4 应变率与应力率的弹塑性分解 322
5.4.5 正交法则的对偶性与度量不变性 324
5.5 Simo-Ortiz 大变形弹塑性本构理论 325
5.5.1 一般关系 325
5.5.2 各向同性硬化（等向硬化）情况 327
5.6 中间构形弹塑性本构理论之一——Moran-Ortiz-Shih 大变形弹塑性本构理论 336
5.6.1 弹性响应 338
5.6.2 塑性响应，率形式本构关系 340
5.6.2.1 在中间构形$\overline{\mathscr{R}}$中提屈服条件 341
5.6.2.2 在即时构形$\mathfrak{r}$中提屈服条件 344
5.6.3 虚位移原理 350
5.7 中间构形弹塑性本构理论之二——Van der Giessen 大变形弹塑性本构理论 352
5.7.1 热力学讨论 355
5.7.2 热传导 358
5.7.3 塑性变形率 $\boldsymbol{d}^{p}$ 与塑性旋率 $\boldsymbol{w}^{p}$ 360
5.7.4 内变量理论 363
5.7.5 持续各向同性介质 367
5.7.6 机动与混合硬化 371
5.7.7 各向异性硬化 376
习题 5 378

第 6 章 应变梯度塑性理论 383
6.1 引言 383
6.2 CS 应变梯度塑性理论——偶应力理论 385
6.2.1 偶应力与转角梯度 385
6.2.2 虚功原理 388
6.2.3 CS 应变梯度塑性理论本构关系 389
6.2.4 最小位能原理与最小余能原理 390
6.2.5 等效应力与等效应变 391
6.3 应变梯度塑性 SG 理论——伸长和旋转梯度理论 394
6.3.1 应变梯度张量$\boldsymbol{\eta}$ 394

6.3.2 应变梯度偏量$\boldsymbol{\eta}'$的分解与总等效应变$\mathscr{E}_{SG}$ 395
6.3.3 SG 应变梯度塑性理论的本构关系......400
6.4 基于细观机制的应变梯度塑性理论(MSG)......402
6.4.1 应变梯度塑性的试验规律......402
6.4.2 提出基于细观机制的应变梯度塑性理论的动机......403
6.4.3 基本假设......404
6.4.4 位错模型......406
6.4.5 MSG 应变梯度塑性理论本构方程......406
6.4.6 在 MSG 塑性理论中不存在应变能密度函数......408
6.4.7 微尺度胞元尺寸......408
习题 6......409

附录 张量分析（介绍）......414
I. 矢量与张量的概念......414
1. 矢量......414
2. 张量......416
II. 张量代数......418
1. 数乘......418
2. 加法......418
3. 点积......418
4. 并乘......419
5. 叉乘......420
6. 转置......420
7. 几种常用的二阶张量......421
8. 加法分解......422
9. 乘法分解（极分解）......422
10. 商法则......423
III. 张量的微积分......423
1. 梯度......423
2. 散度和旋度......424
3. Green 公式和 Stokes 公式......425

参考文献......427

第 1 章　小变形弹塑性本构关系

本章研究率无关材料小变形情况。

1.1　经典弹塑性本构关系

小变形情况下，变形（或应变）张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 可分解为弹性变形张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 与塑性变形张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 之和：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{1.1}$$

1.　预备知识

以 $\boldsymbol{I}$ 表示四阶"等同张量"(identity tensor)，它的分量为

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) \tag{1.2}$$

式中 δ_{ik} 等为 Kronecker delta，它是二阶单位张量 $\boldsymbol{\delta}$（或记作 $\mathbf{1}$）的分量。易证 I_{ijkl} 具有下列三重对称性，又称 Voigt 对称性：

$$I_{ijkl} = I_{jikl},\quad I_{ijkl} = I_{ijlk},\quad I_{ijkl} = I_{klij}$$

可证 $\boldsymbol{I}$ 具有以下性质。

性质 1　设 $\boldsymbol{a}$ 为任意二阶张量，则

$$\boldsymbol{I}:\boldsymbol{a} = \mathrm{sym}\,\boldsymbol{a} \tag{1.3}$$

即

$$I_{ijkl}a_{kl} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

因此，如 $\boldsymbol{a}$ 为任意二阶对称张量，则

$$\boldsymbol{I}:\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

$$I_{ijkl}\,a_{kl} = a_{ij} \tag{1.3$'$}$$

性质 2

$$\boldsymbol{I}:\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$$

$$I_{ijrs}I_{rskl}=I_{ijkl}$$

以 $\bar{\boldsymbol{I}}$ 表示“特殊等同张量” (special identity tensor)，其定义为

$$\bar{\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{I}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta\delta}$$

$$\bar{I}_{ijkl}=I_{ijkl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{1.4}$$

它具有以下性质。

性质 1　设 $\boldsymbol{a}$ 为任意二阶对称张量，则

$$\bar{\boldsymbol{I}}:\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$$

$$\bar{I}_{ijkl}a_{kl}=a'_{ij} \tag{1.5}$$

式中 $\boldsymbol{a}'$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的偏斜张量[1)]：

$$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}J_1(\boldsymbol{a})\boldsymbol{\delta}$$

$$a'_{ij}=a_{ij}-\frac{1}{3}a_{kk}\delta_{ij} \tag{1.6}$$

性质 2

$$\bar{\boldsymbol{I}}:\bar{\boldsymbol{I}}=\bar{\boldsymbol{I}}$$

$$\bar{I}_{ijrs}\bar{I}_{rskl}=\bar{I}_{ijkl}$$

2. 弹性变形

弹性变形张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 与应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 之间满足弹性关系：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\mathscr{M}:\boldsymbol{\sigma}$$

$$\varepsilon^{\mathrm{e}}_{ij}=\mathscr{M}_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{1.7}$$

式中 $\mathscr{M}$ 为弹性柔度张量。如果弹性与塑性之间不存在耦合，则 $\mathscr{M}$ 为常张量。

下面来推导各向同性材料的弹性柔度张量 $\mathscr{M}$。各向同性材料的弹性常数 G，K，E，ν 之间满足以下关系：

1) 二阶张量加撇表示该二阶张量的偏斜张量（简称偏量）。以后仍沿用此记号。

$$\frac{1}{2G}=\frac{1+\nu}{E},\quad \frac{1}{9K}=\frac{1-2\nu}{3E}$$

其中 E 为杨氏模量，ν为泊松比，G 为剪切模量，K 为体积模量。

在弹性变形与应力之间，它们的偏斜张量的比例常数为 $2G$，球形张量之间的比例常数为 $3K$。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2G}\boldsymbol{\sigma}'+\frac{1}{3K}\frac{1}{3}J_1(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\delta}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}}&=\frac{1}{2G}\sigma_{ij}'+\frac{1}{9K}\sigma_{kk}\delta_{ij}\\&=\left(\frac{1}{2G}\bar{I}_{ijkl}+\frac{1}{9K}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\sigma_{kl}\end{aligned}$$

式中 $J_1(\boldsymbol{\sigma})$表示应力张量$\boldsymbol{\sigma}$的第一不变量。因此，与(1.7)对比可看出

$$\boldsymbol{\mathscr{M}}=\frac{1}{2G}\bar{\boldsymbol{I}}+\frac{1}{9K}\boldsymbol{\delta\delta}$$

$$\mathscr{M}_{ijkl}=\frac{1}{2G}\bar{I}_{ijkl}+\frac{1}{9K}\delta_{ij}\delta_{kl}\tag{1.8}$$

将(1.4)的$\bar{\boldsymbol{I}}$ 代入(1.8),可得

$$\boldsymbol{\mathscr{M}}=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\boldsymbol{I}-\nu\boldsymbol{\delta\delta}\right]$$

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{ijkl}&=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)I_{ijkl}-\nu\delta_{ij}\delta_{kl}\right]\\&=\frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}(1+\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})-\nu\delta_{ij}\delta_{kl}\right]\end{aligned}\tag{1.8$'$}$$

若用 Lamé 参数λ与μ表示，则(1.8)可写作

$$\boldsymbol{\mathscr{M}}=\frac{1}{2\mu}\bar{\boldsymbol{I}}+\frac{1}{3(2\mu+3\lambda)}\boldsymbol{\delta\delta}=\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{I}-\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\boldsymbol{\delta\delta}$$

$$\mathscr{M}_{ijkl}=\frac{1}{2\mu}\bar{I}_{ijkl}+\frac{1}{3(2\mu+3\lambda)}\delta_{ij}\delta_{kl}=\frac{1}{2\mu}I_{ijkl}-\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\delta_{ij}\delta_{kl}\tag{1.8$''$}$$

式中

$$\mu=G=\frac{E}{2(1+\nu)},\qquad \lambda=\frac{2\nu G}{1-2\nu}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

3. 塑性变形

屈服条件

$$f(\boldsymbol{\sigma},Y_1,\cdots,Y_n)=0 \tag{1.9}$$

式中$Y_1,\cdots,Y_n$为硬化参量，它们依赖于材料的当前状态，可以是标量，也可以是张量。作为硬化参量的例子，有累积塑性变形、累积塑性功、背应力等。

屈服条件(1.9)决定应力空间中的一曲面，称为后继屈服面（或当前屈服面）。在材料初始状态，$Y_1=\cdots=Y_n=0$，(1.9) 相当于应力空间中的初始屈服面，见图 1-1。屈服面之内为弹性区。当应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$指向屈服面外时，属于加载情况，伴随有塑性变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$。当应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$指向屈服面之内，属于卸载情况，塑性变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$为零。

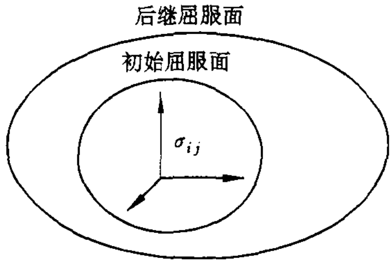

图 1-1　初始与后继屈服面

在经典塑性理论中，假定为“正交法则”，即塑性变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$沿着屈服面的外向法线方向。由 Drucker 假设，或 Ilyushin 假设，或最大塑性功率原理（见 1.6）均可论证这一正交法则。按正交法则$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} /\!/ \partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$。不失广泛性，可设$\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$沿屈服面的外向法线[1)]。故可记[2)]

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\lambda\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}，\ 即\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}=\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\qquad \lambda\geqslant 0 \tag{1.10}$$

式中 λ 称为塑性流动因子。由于塑性变形保持体积不变，

$$\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\dot{\varepsilon}_{ii}^{\mathrm{p}}=0 \tag{1.11}$$

---

1) 在 1.1 至 1.3 节中假设$\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$存在，即在应力空间中屈服面为光滑曲面。

2) 在有的文献中把此处的λ记为$\dot{\lambda}$，因此（1.10）乘以 dt 后，可以写成 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\lambda\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$，　$\mathrm{d}\lambda\geqslant 0$

因此$\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$为一偏斜张量。定义沿屈服面外法线的单位张量

$$\boldsymbol{n}=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\bigg/\left|\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right| \tag{1.12}$$

式中

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right|=\sqrt{\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}}=\sqrt{\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}} \tag{1.13}$$

故$\boldsymbol{n}$为一单位偏斜张量

$$\boldsymbol{n}:\boldsymbol{n}=1 \tag{1.14}$$

而(1.10)可写作

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\lambda\left|\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right|\boldsymbol{n} \tag{1.10$'$}$$

因为塑性变形保持体积不变，故$\boldsymbol{n}$为偏量。

作为塑性变形的度量，引进“累积塑性变形”$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，首先定义等效塑性变形率。设材料为各向同性,定义等效塑性变形率为

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}\text{，即 }\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{1.15}$$

$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$恒为正。在沿$x_1$方向的单向拉伸或单向压缩情况下，$\dot{\varepsilon}_{22}^{\mathrm{p}}=\dot{\varepsilon}_{33}^{\mathrm{p}}=-\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}}$，$\dot{\varepsilon}_{12}^{\mathrm{p}}=\dot{\varepsilon}_{23}^{\mathrm{p}}=\dot{\varepsilon}_{31}^{\mathrm{p}}=0$，由(1.15)

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\left|\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}}\right|$$

利用(1.15)，可将$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$写为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{n} \tag{1.16}$$

比较 (1.10)′ 与(1.16)，可知

$$\lambda=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}{\left|\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}\right|} \tag{1.17}$$

(1.17)表示塑性流动因子 λ 与等效塑性变形率 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的关系。(1.15) 对时间 t 积分定义为累积塑性变形，

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\int_{t_0}^{t}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}\,\mathrm{d}t=\int_{\text{history}}\sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{1.18}$$

式中 t_0 表示开始出现塑性变形的时刻。在单向拉伸或压缩时

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\int_{t_0}^{t}\left|\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}}\right|\mathrm{d}t$$

附带指出，在率无关的塑性本构关系中，t 不一定取牛顿时间，它可以是任意的随时间递增的函数(有时称为"类时间参数"，time-like parameter)，例如也可以取 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 为 "时间" 。率无关材料的塑性变形过程就好像一部电影胶片，无论快速或慢速放映，这个过程是不变的。

设给定应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ （或应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}t$ ），需求塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 。为此必须确定(1.10)或(1.10)′式中的 λ，或者(1.16)中的 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ (λ 与 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 之间存在关系(1.17))。可以区分两种情形：

(1) 理想弹塑性材料。屈服面在应力空间中为固定不变曲面，此时屈服条件(1.9)成为

$$f(\boldsymbol{\sigma})=0 \tag*{(1.9)′}$$

设 $\boldsymbol{\sigma}$ 在屈服面上，应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 必须服从条件

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\leqslant 0$$

当给定的 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 使上式的 $\mathrm{d}f<0$ 时，属于弹性卸载，$\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=0$，因此 $\lambda=0$ 。但当给定的 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 使 $\mathrm{d}f = 0$ 时，应力 $\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 仍保持在屈服面上，有塑性变形增量 $\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t$ 产生。但当给定应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ （或应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}t$ ）时，由(1.10)式决定 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 所需要的塑性流动因子 λ 不可能由塑性本构关系确定 [1)]。但是在具体的物理问题（例如在内压作用下的厚壁筒）中，将本构关系与平衡方程及几何方程联立在一起，可以确定应力与应变场。这时除平衡方程之外，对应力增加了一个约束方程(1.9)′，但同时也增加了一个未知场函数 λ。

(2) 硬化材料。λ 可由"一致性条件"(consistency condition)定出。

4. 一致性条件

为了确定塑性流动因子 λ，必须利用"一致性条件"。设在时刻 t 应力空间中表示材料应

---

1) 理想弹塑性材料，当给定变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (或变形增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathrm{d}t$)时，可以由逆本构关系(见本节(1.31)式)求应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ (或应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}t$)。

力$\boldsymbol{\sigma}$的点 P 处于后继屈服面(1.9)上(图 1-2)。在时刻 $t+\mathrm{d}t$，应力为$\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，在应力空间中的应力点为 P'，后继屈服面成为

$$f(\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, Y_1+\mathrm{d}Y_1, \cdots, Y_n+\mathrm{d}Y_n)=0 \tag{1.19}$$

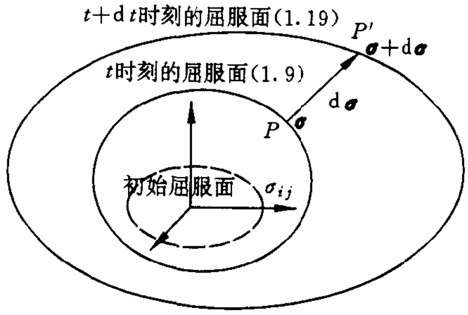

图 1-2　后继屈服面的变化

式中 $\mathrm{d}Y_1, \cdots, \mathrm{d}Y_n$ 为硬化参量 $Y_1, \cdots, Y_n$ 在时间 $\mathrm{d}t$ 内的增量。取(1.19)与(1.9)式之差，得

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}+\sum_i \frac{\partial f}{\partial Y_i}\mathrm{d}Y_i=0 \tag{1.20}$$

如 Y_i 为张量，则 $\partial f/\partial Y_i$ 与 $\mathrm{d}Y_i$ 应为张量的缩并乘。(1.20)式称为“一致性条件”。它的物理意义表示：在加载（非卸载）过程中，材料的应力点始终处于屈服面上。(1.20)中第一项 $(\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma}):\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 表示 f 由于$\boldsymbol{\sigma}$的变化 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 所引起的增量，可记为

$$\mathrm{d}f\big|_Y=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}，\ 即\ \frac{\mathrm{d}f\big|_Y}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

以区别于(1.20)的 $\mathrm{d}f$，下标 Y 表示假设保持 $Y_1, \cdots, Y_n$ 不变。

设 $Y_i\ (i=1, \cdots, n)$ 以下列微分方程（称为演化方程）的形式依赖于累积塑性变形 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$：

$$\mathrm{d}Y_i=Z_i(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, \cdots)\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.21}$$

式中 Z_i 除了依赖于 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 之外，还可能依赖于其他状态变量，如应力张量（或变形张量）、硬化参量 $Y_1, \cdots, Y_n$ 等。(1.21)式规定屈服曲面 $f(\boldsymbol{\sigma}, Y_1, \cdots, Y_n)$ 如何随着塑性变形过程而变化。将(1.21)代入(1.20)后，除以 $\mathrm{d}t$，可得

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=-\frac{1}{\displaystyle\sum_i \frac{\partial f}{\partial Y_i}Z_i}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.20$'$}$$