《自修数学》小丛书

勾股定理

〔英〕 W. H. 格伦
D. A. 约翰逊 著

白纪云 译

内 容 简 介

这本小册子是《自修数学》小丛书中的一本．勾股定理或商高定理在西方称为毕达哥拉斯定理．书中以通俗易懂的语言和生动有趣的实例，介绍了勾股定理的发现、各种证明及其广泛应用．书中还穿插了不少富有趣味性的练习题，书末附有答案．

由于本书内容浅显，可供具有初中文化程度的广大读者阅读．

William H. Glenn

Donovan A. Johnson

THE THEOREM OF PYTHAGORAS

John Murray London, 1976

勾 股 定 理

〔英〕W. H. 格伦　D. A. 约翰逊 著

白纪云 译

秦元勋 校

责任编辑 徐一帆

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984年 3月第 一 版　开本：787×1092 1/32

1984年 3月第一次印刷　印张：2 1/2

印数：0001—36,600　字数：46,000

统一书号：13031・2532

本社书号：3473・13—1

定价： 0.35 元

目　　录

一、直角三角形的奇迹

1. 拉绳者和直角

在古埃及，尼罗河水每到春天总要泛滥，淹没周围数英里的地方. 但埃及人却欢迎这一年一度的泛滥，因为埃及是干燥的陆地，庄稼只有通过这种方式才能得到灌溉. 但洪水对埃及人来说也是有弊的，因为每次洪水总要冲掉他们的土地的界线. 于是，每次洪水退后，为了判定哪块土地属于谁，埃及人就得重新标定地界.

古埃及人生活的那些时候，测量土地所用的方法今天看来似乎是粗糙的. 这并不是说埃及人不聪明. 相反，他们是非常聪明的——否则他们就不能建造巨大的金字塔，创造其它表现其伟大文明的奇迹了. 但测量方法是个数学问题，而古埃及那个时期数学还不发达.

埃及人测量土地必须用到直角，他们用这样的方法做直角："拉绳者"拿着长度已知的绳子，并在绳上等间距地打上十三个结. 然后，他们把绳子用桩钉在地面上，如下页图所示，把桩 2 和桩 3 钉在第四、第八结上，而桩 1 钉在第一和第十三结的相接处. 当然，绳子必须拉紧. 这时，桩 2 那个角就是直角.

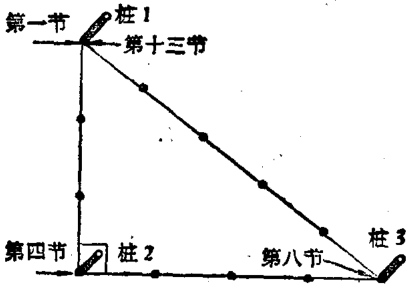


图 1

我们可以从埃及"拉绳者"的三角形中看到，直角所对的那个边是 5 单位，另外两边分别是 3 单位和 4 单位. 埃及人满足于他们的办法. 从来没有问问自己，为什么边长为 3、4、5 的比例关系会形成我们现在说的直角三角形. 对他们来说，知道用这一关系可得出一个直角就足够了.

大约在同一时期，印度人也需要作一些直角，但他们比埃及人前进了一步. 他们发现，直角三角形的边的关系除了 3、4、5 外，还有另外一些比例. 这些数组如下

12，16，20	15，20，25
5，12，13	15，36，39
8，15，17	12，35，37

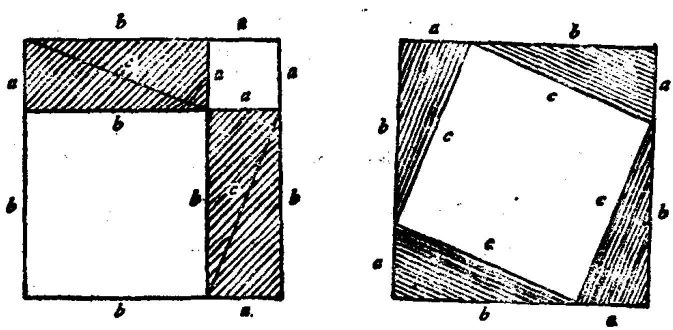
但象埃及人一样，古印度人也从来没有花时间去考虑这个关系为什么成立. 即使他们提出了这个问题，并且得出了该问题的答案，我们迄今也从未看到过这一方面的文字记载.

2. 直角三角形的问题得到解决

对于“为什么?”这个问题的答案终于在公元前六世纪中大约为希腊的黄金时代被找到了，解答这问题的可能是一个名叫毕达哥拉斯的数学家和哲学家。至于是不是真的由毕达哥拉斯找出了答案，还是由大约同时代的另外一些希腊人找出的，现在还不清楚。但这个荣誉毕竟给了毕达哥拉斯。由于这个重要关系而被命名为毕达哥拉斯定理（我国习惯上称为“勾股定理”——译注），他的名字无疑将永垂不朽。

在每个直角三角形中，对应于直角的那个边叫斜边。因此勾股定理可用下面的话来叙述：

“一个直角三角形的斜边的平方等于另外两个边的平方和。”

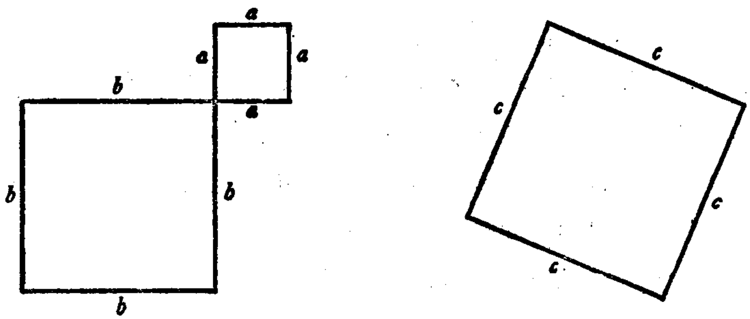


(a) (b)

图 2

据说这个命题的最早的几何证明是由下面的方块图形给出的．拿 4 个同样大小的直角三角形组成两个图样．

在图 2(a) 中，你可以延长边长使之成为一个大的边长为$(a+b)$的正方形，它与图 2(b) 中的大正方形同样大．从每一个大正方形中拿去 4 个小三角形之后（看图 3），剩下的两个图形的面积必定相等．



(a)　　(b)

图 3

这就意味着图 3(a) 的面积应该等于图 3(b) 的面积，或

$$a^2+b^2=c^2$$

这就是勾股定理的代数形式的表达式．这本书将会给你提供许多如何利用这个关系式来帮你解决一系列问题的有趣实例．实际上，勾股定理说：“如果你知道一个直角三角形任何两个边的长，就能求出第三边的长．”只要设想一下，在测量中，产生直角图形的方法有多种多样，你就可以明白勾股定理是多么有用．

3. 一种著名的检验直角三角形的方法

只要把三角形各边长的数值代入公式

$a^2+b^2=c^2$ 中，就很容易检验出它是不是一个直角三角形，这里 c 是三个边中最长的一个边。

证明边长为 3、4、5 的三角形满足这个公式。

代入公式

$$3^2+4^2=5^2$$

$$9+16=25$$

$$25=25$$

因此，边长为 3、4、5 的三角形是一个直角三角形，并且边长为 5 的边对着直角。用圆规作刻度的办法可以证实它。

用 7、8、11 三个边可作同样的检验。

$$7^2+8^2=$$

$$49+64=113$$

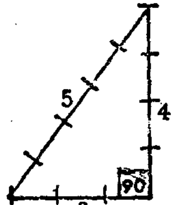


图 4

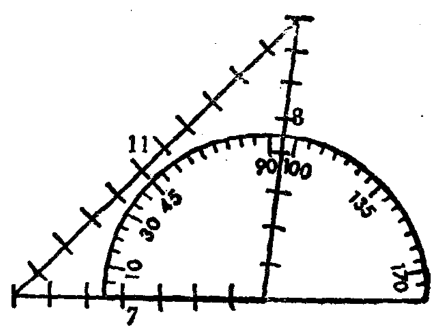


图 5

如欲满足勾股定理，则 7^2+8^2 的值应等于 11^2 或 121. 但它并非如此. 因此，这个三角形不是直角三角形. 一个有刻度的绘图帮助证实了这一点，即使它与直角三角形差别不大. 从量角器的读数可看出这个所谓“直角”的角度近似于 96°.

练习 1　检验直角三角形

下列的哪些数组满足勾股定理？　用同一个比例尺作出各三角形，并检验你的答案.

(1) 1，2，3	(6) 5，12，13
(2) 2，3，4	(7) 7，9，12
(3) 3，5，8	(8) 8，15，17
(4) 4，5，6	(9) 9，12，15
(5) 6，8，10	(10) 15，20，25

二、关于数和几何学的研究

1. 毕达哥拉斯和他的秘密协会

我们已经研究了毕达哥拉斯定理(即勾股定理——译注)的一些方面,但我们尚未谈到毕达哥拉斯本人. 那么,与如此重要的定理联系在一起的这个毕达哥拉斯是谁呢?

关于毕达哥拉斯的事,我们知道得不多. 据说他是泰勒斯(公元前 640—公元前 550 年)的学生,泰勒斯是一个著名的古希腊哲学家,是"七智者"中的一位.泰勒斯和毕达哥拉斯都没有留下任何著作. 这并不是说他们没有写过任何著作,就是有,这些著作也散失了. 有一件事在历史上是肯定的,如果没有泰勒斯就不会有毕达哥拉斯,而没有毕达哥拉斯也就不会有柏拉图(公元前 427 年—公元前 347 年),而没有柏拉图,世界上就不会有许多奇妙的思想.

毕达哥拉斯是希腊的数学家、哲学家. 他大约生活在公元前 569 年—公元前 500 年. 他在青少年时期,生活在文化和艺术的环境中,那个时候正是希腊黄金时代的开始.

在他的早年,毕达哥拉斯周游了地中海沿岸的许多国家. 公元前 509 年,他定居在意大利南部的一个希腊城市克罗托拿.在这里他组织了一个秘密协会,或叫兄弟会. 这个协会的

成员称为毕达哥拉斯派．他们主要感兴趣的是有关道德改革问题，同时也进行了一些科学上的讨论．这些讨论导致了数学和天文学上的许多重要概念的产生．

毕达哥拉斯派的另外一个兴趣是乐理的科学．例如，他们证明过：如果两根弦在同样的张力下长度比是 2:1，则当拨动这两根弦时，它们发出的音相差一个八度音．也是他们首先指出：地球是一个球状物，它与另外一些行星一道围绕着太阳旋转．

毕达哥拉斯学派似乎感觉到数字有某种神秘性——数字是生命的基础．他们甚至给一些特定的数字赋以意义如下

1 代表理性，因为它是不可改变的．

2 代表男性．

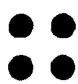
3 代表女性．

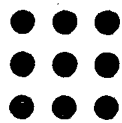
4 代表公正，因为它是第一个相等数的乘积（$2\times2=4$）．

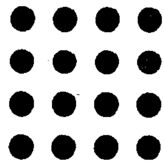
5 代表结婚——第一个男性数和第一个女性数的结合（$2+3=5$）．

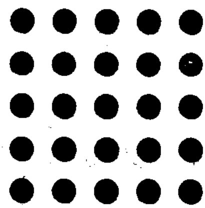
毕达哥拉斯派把数与几何图形联系起来．连续奇数的和就是这种联系的一个例子．它的几何图形在这里是用打点的形式表示的．

$1 \qquad = 1$  $1 = 1^2$

$1+3 \qquad = 4$  $4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9$  $9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$  $16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$  $25 = 5^2$

每组连续的奇数相加产生一个新的和，它可以由打点的正方形表示出来.

这种关系使毕达哥拉斯派去寻找另外一些关系. 例如，从是否可以找到一个平方是另外二个平方的和？从上面的系列中可以找出一个解，即

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

他们发现了其它类似的关系，将连续的奇数相加，一直加到所加奇数恰好是一个整数的平方为止.

如果一个数是另一个整数的平方，则该数叫做完全平方.

下面的练习可以使你发现曾经使毕达哥拉斯派着迷的一些关系.

练习 2　数组和勾股定理

(1) 从 1 到 23 连续奇数的和是多少？

注意，答案是一个整数的平方.

(2) 从 1 到25连续奇数的和是多少？

这个答案也是一个完全平方.

(3) 你是否能从上面两个习题的答案中得出勾股定理关系式

$$a^2 + b^2 = c^2$$

这里 a, b 和 c 是奇数. 注意排列

$$(1+3+5+\cdots+23)+(25)=(1+3+5+\cdots+25)$$

每个括号表示一个数的完全平方. 括号中的删节号表示连续奇数相加，因为把它们全部写出来要占很大篇幅.

(4) 仿照(1)，(2)和(3)中的方法，把 1 到 47 和 1 到 49 的连续奇数相加.

(5) 仿照(1)，(2)和(3)中的方法，把 1 到 79 和 1 到 81 的连续奇数相加.

2. 加法的简便算法

在上述问题的求和过程中，你可能是费劲地把一个个数加起来的，这种加法题的简便算法如下.

假定有　$1+3+5+7+9$.　由于这五个数间隔相等，那么下面的求和法或许不无道理：求出第一个数与最后一个数的平均值，再用相加的项数乘这个平均值. 这种方法的证明非常容易.

在上面的例子中，第一个和最后一个数的平均值是$\frac{1+9}{2}$，这个平均值再乘以 5（相加的项数），就得到所求的和

$$1+3+5+7+9=\frac{1+9}{2}\times 5=\left(\frac{10}{2}\right)(5)$$

$$=(5)(5)=25$$

注意：这个和是一个完全平方。

求这列数的和的另一方法，是把这列数的各项倒过来，以下列形式相加：

$$\begin{array}{r}1+\ 3+\ 5+\ 7+\ \ 9\\ \underline{9+\ 7+\ 5+\ 3+\ \ 1}\\ 10+10+10+10+10\end{array}$$

这里是 5 个 10 相加，但因为这列数自身加了一次，所以，得到的结果是我们所求答案的二倍。

因而有

$$1+3+5+7+9=\frac{5(10)}{2}=(5)(5)=25$$

注意：这个和是一个完全平方，它与以上所求的答案一致。

练习 3　简便算法的练习

用上述方法中的任何一种方法求下列连续奇数的和：

(1)　$1+3+5+\cdots+23=$

(2)　$1+3+5+\cdots+23+25=$

(3)　$1+3+5+\cdots+47=$

(4)　$1+3+5+\cdots+47+49=$

(5) $1+3+5+\cdots+79=$

(6) $1+3+5+\cdots+79+81=$

(7) $1+3+5+\cdots+119=$

(8) $1+3+5+\cdots+119+121=$

(9) $1+3+5+\cdots+167=$

(10) $1+3+5+\cdots+167+169=$

(11) $1+3+5+\cdots+223=$

(12) $1+3+5+\cdots+223+225=$

3. 看下面这些有趣的数组

当三个整数 a，b，c 满足表达式 $a^2+b^2=c^2$ 时，那么这三个数叫做毕达哥拉斯数组． 从这里可以想到一个问题，凡是满足毕达哥拉斯表达式的整数都能用练习 2 中的方法求出吗？不能，8，15，17 这三个数就不能用这个方法求出．但它们满足表达式

$$8^2+15^2=17^2$$

$$64+225=289$$

$$289=289$$

为了求出满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个数，毕达哥拉斯导出了下面的规律，他把这三个数表示成

$$m,\ \frac{1}{2}(m^2-1) \text{ 和 } \frac{1}{2}(m^2+1)$$

这里 m 可以是大于 1 的任意指定的一个奇数，这样得到的三个数就是毕达哥拉斯数组，它们满足 $a^2+b^2=c^2$，也就

是说下面的关系式对所有的m是奇数的值都成立

$$m^2+\left\{\frac{1}{2}(m^2-1)\right\}^2=\left\{\frac{1}{2}(m^2+1)\right\}^2$$

例如，令 $m=3$，那么毕达哥拉斯数组是

$$3,\ \frac{1}{2}(3^2-1)\text{和}\frac{1}{2}(3^2+1),$$

简化成

$$3,\ \frac{1}{2}(9-1),\ \frac{1}{2}(9+1),$$

$$3,\ \frac{1}{2}(8),\ \frac{1}{2}(10),$$

最后得

$$3,\ 4,\ 5.$$

练习 4　毕达哥拉斯数组

(1) 证明下面这个公式对所有的m值都成立

$$m^2+\left\{\frac{1}{2}(m^2-1)\right\}^2=\left\{\frac{1}{2}(m^2+1)\right\}^2$$

(2) 对于 $m=5$; $m=7$; $m=9$; $m=11$ 求毕达哥拉斯数组.

(3) 当m是一个偶数时在公式中会出现什么情况？ 当你把这个偶数代入公式后，得到的结果不是整数，而是一个分数，分数仍然满足勾股定理.

(4) 证明对 a, b, c, d 的所有的值，下面的表达式都是正确的

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

(5) 在第 4 题中，用m代替 a 和 c，用 n 代替 b 和 d 证明表达式

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

成立. 如果 m、n 是任意给定的正整数时，上式仍然是一个比较通用

的求毕达哥拉斯数组的方法

(6) 用第 5 题中的表达式和下面给出的数求毕达哥拉斯数组

(a) $m=2$, $n=1$　　(d) $m=4$, $n=1$

(b) $m=3$, $n=1$　　(e) $m=4$, $n=2$

(c) $m=3$, $n=2$　　(f) $m=4$, $n=3$

(7) 证明当 $n=1$ 时，第 5 题中的表达式可化成毕达哥拉斯表达式

$$m^2+\left\{\frac{1}{2}(m^2-1)\right\}^2=\left\{\frac{1}{2}(m^2+1)\right\}^2$$

4. 毕达哥拉斯数的较广阔的领域

数学家们共同的特点是：他们总在寻求扩充概念的方法。毕达哥拉斯派探求了 $a^2+b^2=c^2$ 的整数解。又进一步很自然地求出符合三个整数的平方和等于一个整数的平方关系的解

$$a^2+b^2+c^2=r^2$$

有关数论方面的书详细地论述了这类问题。当你看到下面表中的 r 为确定值时，会觉得很有趣。你也许愿意证明这个表是正确的。

$$r=3$$

$$a=1,\ b=2,\ c=2$$

$$r=5$$

时，a，b，c 的值不存在。

$$r=7$$