内 容 提 要

本书是根据高等师范院校高等几何教学大纲(供数学专业用)编写的，全书共有八章．第一章至第三章兼用综合法和解析法介绍射影几何学的基本知识，第四章介绍变换群的概念，说明用变换群的观点研究相应的几何学的思想，第五章和第六章讨论二次曲线的射影性质、仿射性质和度量性质，第七章以射影几何公理体系为例介绍公理体系的三个基本问题，第八章介绍射影测度，利用射影测度在射影平面上建立非欧几何的模型．附录部分简要介绍了一般体(域)上的射影几何和仿射几何．

本书可供高等师范院校数学系作试用教材．

本书由杨春田教授审阅，经理科数学、力学教材编委会委托白正国编委复审，同意作为高等学校试用教材出版．

高等学校试用教材

高 等 几 何

梅向明　刘增贤　林向岩　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印张 9.125　字数 219,000

1983 年 11 月第 1 版　1984 年 4 月第 1 次印刷

印数 00,001—24,000

书号 13010·0941　　定价 1.05 元

前　言

这本教材是我们多年来讲授《高等几何》课所用的讲义，根据高等师范院校《高等几何》教学大纲的要求整理而成的.

《高等几何》与《数学分析》、《高等代数》一样，是高等学校数学专业三门主要基础课之一. 在“文化大革命”前，这门课的内容包括“射影几何”和“几何基础与非欧几何”两大部分；但目前由于教学计划中课时数的限制，我们不得不在内容上作某些删节. 我们将主要讲授射影几何部分，至于几何基础部分，将只介绍射影几何的公理体系，并且通过这个内容扼要介绍希尔伯特公理体系的基本思想；对于非欧几何部分，我们将只介绍它的射影几何模型.

关于射影几何，教材里主要介绍二维情形的经典射影几何内容以及 F. 克莱因的“爱尔朗”纲领，而且主要用的是解析法；不过为了使读者能了解近代的成果，我们将在附录中扼要地介绍一般域上的高维射影几何，使一部分对几何有兴趣的学生通过自学来掌握这部分内容.

北京师范大学的朱鼎勋教授很关心这本教材的编写工作，并且对有些部分提出不少宝贵意见，我们谨在此表示衷心感谢. 我们希望使用这本教材的兄弟院校的同志对其中的错误缺点和不足之处给予批评指正.

梅向明　刘增贤　林向岩

1983 年 1 月于北京师范学院数学系

目　录

第一章　正交变换与仿射变换……1

§1　点变换……1

1.1　点变换的定义……1

1.2　变换的乘积……2

1.3　恒等变换与逆变换……3

§2　正交变换……4

2.1　实例……4

2.2　正交变换……8

2.3　正交变换与坐标变换的关系……15

§3　仿射变换……17

3.1　二平面间的透视仿射对应……17

3.2　仿射对应与仿射变换……19

3.3　仿射坐标系……20

3.4　仿射变换的代数表示式……22

3.5　图形的仿射性质……26

3.6　仿射变换的特例……31

第二章　射影平面……36

§4　中心射影与无穷远元素……36

4.1　中心射影……36

4.2　无穷远元素……38

4.3　一维与二维射影空间的概念与模型……39

4.4　图形的射影性质……41

4.5　利用投影到无穷远证明几何题……43

§5　笛沙格(Desargues)透视定理……45

§6　齐次点坐标……50

6.1　齐次点坐标……50

6.2　直线的齐次坐标方程……52

6.3　齐次点坐标的应用……53

§7　线坐标……63

7.1 齐次线坐标……63
7.2 非齐次线坐标……64
§8 对偶原则……68
8.1 对偶图形……68
8.2 对偶命题与对偶原则……72
8.3 代数对偶……75
§9 复元素……79
9.1 二维空间的复元素……79
9.2 二维共轭复元素……81
第三章 射影变换……84
§10 交比与调和比……84
10.1 点列的四点的交比与调和比……84
10.2 交比的代数表示……87
10.3 共线四点的调和比……92
10.4 线束的四直线的交比与调和比……94
§11 完全四点形与完全四线形的调和性……100
§12 一维基本形的射影对应……105
12.1 透视对应与射影对应……105
12.2 点列间射影对应的代数表示……110
§13 一维射影变换……115
§14 一维基本形的对合……118
§15 二维射影变换……124
15.1 非奇线性对应与射影对应……125
15.2 射影变换及其不变元素……129
§16 射影坐标……133
16.1 一维射影坐标……133
16.2 二维射影坐标……136
第四章 变换群与几何学……144
§17 变换群的概念……144
§18 平面上的几个变换群……147
§19 变换群与相应的几何学……153
§20 射影、仿射、欧氏三种几何学的比较……156
第五章 二次曲线的射影理论……162

§21 二次曲线的射影定义……162
21.1 二阶曲线与二级曲线……162
21.2 二阶曲线与直线的相关位置……166
21.3 二阶曲线与二级曲线的关系……168
§22 巴斯加定理和布利安桑定理……172
§23 极点与极线、配极变换……178
23.1 极点、极线的定义及求法……178
23.2 配极原则……180
23.3 配极变换……183
§24 二阶曲线的射影分类……185
24.1 二阶曲线的奇异点……186
24.2 二阶曲线的射影分类……187
*§25 二阶曲线上的射影变换与对合……193
25.1 二阶曲线上的射影变换……193
25.2 二阶曲线上的对合……196
第六章 二次曲线的仿射理论与度量理论……199
§26 二阶曲线的中心、直径、渐近线……199
26.1 中心……200
26.2 直径与共轭直径……201
26.3 渐近线……205
§27 二次曲线的仿射分类……210
§28 圆环点与迷向直线……216
§29 二阶曲线的主轴、焦点与准线……220
29.1 主轴……220
29.2 焦点与准线……222
§30 共焦二次曲线束……226
第七章 射影几何基础……231
§31 几何公理法简介……231
§32 实射影几何的公理体系……233
§33 公理体系的三个基本问题……237
33.1 公理体系的和谐性……237
33.2 公理体系的独立性……240
33.3 公理体系的完备性……241

§34　射影几何公理体系的和谐性……244
第八章　非欧几何学概要……247
§35　射影测度……247
§36　双曲运动群和椭圆运动群……250
36.1　自同构群……250
36.2　双曲运动群和椭圆运动群……251
§37　罗氏几何的克莱因模型……252
§38　黎曼几何的模型……257
附录　一般体(域)上的射影几何简介……260
§1　预备知识……260
1.1　群……260
1.2　体……261
1.3　向量空间……261
§2　一般体(域)上的射影几何……265
2.1　射影几何与射影空间……265
2.2　射影变换与射影坐标……271
2.3　对偶原理……276
§3　一般体(域)上的仿射几何……279
3.1　仿射空间与仿射几何……279
3.2　仿射坐标……280
3.3　仿射变换……281

第一章　正交变换与仿射变换

本章首先阐明正交变换的概念，然后在欧氏几何的基础上，建立仿射变换的概念，并研究在仿射变换下图形的不变性质，最后介绍几种特殊形式的仿射变换及其性质.

§1　点　变　换

在讨论具体的变换之前，在这一节里，先说明一些一般变换的概念.

1.1　点变换的定义

定义 1.1　设 m 与 m' 是两个集合，如果有一个法则 φ，通过它对于 m 中的任何元素 M，能得到 m' 的一个唯一元素 M'．则 φ 叫做 m 到 m' 中的对应，记为 $\varphi: M\to M'$，或 $M'=\varphi(M)$.

这时 M' 叫做 M 在对应 φ 之下的象，并且反过来 M 叫做 M' 在对应 φ 之下的原象.

定义 1.2　设有集合 m 到集合 m' 中的对应 φ，如果在 φ 之下，m' 的每个元素 M' 都有原象，即在 m 内必存在某个元素 M，使得 $M'=\varphi(M)$．则对应 φ 叫做 m 到 m' 上的对应.

定义 1.3　设有集合 m 到集合 m' 上的对应 φ，如果在 φ 之下，m 的任何两个不同的元素 M_1 与 M_2 的象也必是不同的，即当 $M_1\neq M_2$ 时，必有 $\varphi(M_1)\neq\varphi(M_2)$，则对应 φ 叫做 m 与 m' 之间的一一对应.

例 1　m: 1, 2, 3, …

m'　2, 4, 6, …

$\varphi: a\to 2$，其中 a 是 m 的任何元素，φ 是一个集合 m 到集合 m'

中的对应.

例 2 m 与 m' 分别与例 1 同.

φ: $1\to 2$

$a\to 2a-2$, 其中 $a=2,3,4,\cdots$

φ 是一个集合 m 到集合 m' 上的对应.

例 3 m 与 m' 分别与例 1 同.

φ: $a\to 2a$, 其中 a 是 m 的任何元素, φ 是一个集合 m 与集合 m' 之间的一一对应.

在以上定义里,如果集合 m 与集合 m' 等同,则所定义的对应叫做变换,即有以下定义.

定义 1.4 一个集合 m 到 m 中(上)的对应叫做 m 中(上)的变换. 一个集合 m 与 m 间的一一对应叫做 m 的一一变换.

以上提出了一般变换的定义. 如果 m 是点集合(当然 m 也可以包含平面内的所有点),则定义 1.4 里的变换叫做点变换. 以后除特别声明外,本书中所说的变换皆指点变换.

1.2 变换的乘积

设有(点)集合 S, 它含有元素 $x, y, z, \cdots, x', y', z', \cdots$, φ 是 S 的一一变换: $x'=\varphi(x)$, 以后所说的变换皆指一一变换, 并且将 $x'=\varphi(x)$ 也写作 $x'=x\varphi$, 并简称为变换 φ.

又设有两个变换 φ_1, φ_2, 如果对于 S 中的任何元素 x, 有 $x\varphi_1=x\varphi_2$, 则称 φ_1 与 φ_2 相等, 记为 $\varphi_1=\varphi_2$.

有些变换可以分几步通过其他变换而得到, 这就需要变换乘积的概念.

定义 1.5 设 φ_1, φ_2 是集合 S 的两个变换, 如果对于 S 中的任何元素 x, 先通过 φ_1, 再通过 φ_2 而得到 x', 即 $\bar{x}=x\varphi_1, x'=\bar{x}\varphi_2$. 则所得到的 S 的新变换 φ: $x'=x\varphi$ 叫做已知变换 φ_1 与 φ_2 的乘积,

记为

$$\varphi=\varphi_1\varphi_2 \tag{1.1}$$

由定义 1.5 可见，对于 S 里的任何元素 x 有

$$x(\varphi_1\varphi_2)=(x\varphi_1)\varphi_2$$

又我们把 $\varphi\varphi$ 记为 φ^2，把 $\overbrace{\varphi\varphi\cdots\varphi}^{n\text{个}}$ 记为 φ^n.

注：设 φ_1 是 S_1 到 S_2 的对应，φ_2 是 S_2 到 S_3 的对应，则与定义 1.5 类似，可以一般地规定 φ_1 与 φ_2 的乘积 $\varphi_1\varphi_2$，它是一个 S_1 到 S_3 的对应.

不难验证，两个变换的乘积与它们的顺序有关，即一般地，$\varphi_1\varphi_2\neq\varphi_2\varphi_1$，这就是说，变换的乘法不满足交换律，但有以下定理.

定理 变换的乘法满足结合律.

证明 设 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 是集合 S 的三个变换，需要证明

$$\varphi_1(\varphi_2\varphi_3)=(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3$$

对于 S 中的任何元素 x，由(1.1)有

$$x[\varphi_1(\varphi_2\varphi_3)]=(x\varphi_1)(\varphi_2\varphi_3)=[(x\varphi_1)\varphi_2]\varphi_3$$

$$x[(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3]=[x(\varphi_1\varphi_2)]\varphi_3=[(x\varphi_1)\varphi_2]\varphi_3$$

所以 $\qquad \varphi_1(\varphi_2\varphi_3)=(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3$

1.3 恒等变换与逆变换

定义 1.6 设有集合 S，则使得 S 的任何元素都不变的变换叫做 S 的恒等变换，恒等变换记为 ε.

由定义 1.6 可见，对于 S 中的任何元素 x 有

$$x\varepsilon=x \tag{1.2}$$

又对于任何变换 φ 有

$$\varphi\varepsilon=\varepsilon\varphi=\varphi \tag{1.3}$$

因为

$$x(\varphi\varepsilon)=(x\varphi)\varepsilon=x\varphi$$
$$x(\varepsilon\varphi)=(x\varepsilon)\varphi=x\varphi$$

所以

$$\varphi\varepsilon=\varepsilon\varphi=\varphi$$

设有集合S的一个一一变换$\varphi: x\to x'$，则S的另一个变换$\varphi^{-1}: x'\to x$，叫做φ的逆变换．由这个定义可知，φ也是φ^{-1}的逆变换．

下面的等式成立：

$$\varphi\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\varphi=\varepsilon \tag{1.4}$$

因为由上面的定义可知

$$x(\varphi\varphi^{-1})=(x\varphi)\varphi^{-1}=x'\varphi^{-1}=x=x\varepsilon$$
$$x'(\varphi^{-1}\varphi)=(x'\varphi^{-1})\varphi=x\varphi=x'=x'\varepsilon$$

所以 $\varphi\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\varphi=\varepsilon$

注：也可以取(1.4)式作为逆变换的定义．

习　　题

1．设$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$是集合$S$的任何$n$个变换，求证：不论如何乘，只要不改变$\varphi_i$的次序，$\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n$的结果是唯一的．

提示：用数学归纳法．

2．设φ_1, φ_2是集合S的两个变换，求证：$(\varphi_1\varphi_2)^{-1}=\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}$．

3．设φ是集合m与集合m'之间的一一对应，x是m的一个元素，问$x(\varphi\varphi^{-1})=?$，$x(\varphi^{-1}\varphi)=?$．如果φ是m的变换，这两问题的答案如何？

§2　正交变换

2.1　实例

1．平移变换

在欧氏平面上把每一点P按照已知向量$\overrightarrow{AA'}$的方向移到P'使$\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{AA'}$，如此产生的变换叫做沿向量$\overrightarrow{AA'}$的平移变换，简称平移.

如果$\overrightarrow{AA'}$的坐标为(a,b)，且此平移把$P(x,y)$变成$P'(x',y')$，则有

$$x'=x+a,\quad y'=y+b$$

因此得到以下定理

定理 2.1 把平面上的点$P(x,y)$沿坐标为(a,b)的向量平行地移到点$P'(x',y')$，这样，平移变换的代数表示式为

$$\begin{cases}x'=x+a\\ y'=y+b\end{cases}\tag{2.1}$$

其中a,b是两个独立参数.

2. 旋转变换

在欧氏平面上把每一点P绕一定点旋转一定角变到另一点P'，如此产生的变换叫做旋转变换，简称旋转. 此定点叫做旋转中心，定角叫做旋转角.

(1) 首先取原点为旋转中心，按照定角θ把点$P(x,y)$旋转到点$P'(x',y')$. 如果点P的极坐标为$(r,\ \phi)$，则点P'的极坐标为

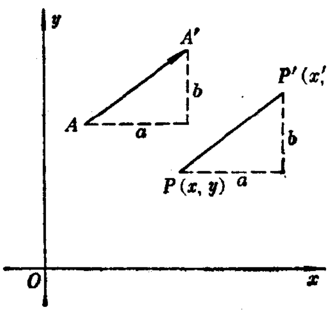

图 2-1

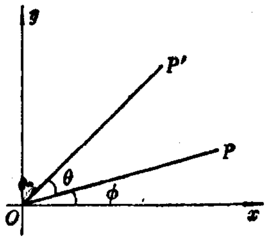

图 2-2

$(r, \phi+\theta)$. 故有

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi$$

$$x' = r\cos(\phi+\theta), y' = r(\sin\phi+\theta)$$

因此

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

(2) 其次，取点(x_0, y_0)为旋转中心，则有

$$x' - x_0 = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta$$

$$y' - y_0 = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta$$

归纳以上(1)、(2)，得到以下定理.

定理 2.2 把平面上点 $P(x, y)$ 绕原点旋转一个定角 θ 变到点 $P'(x', y')$，这样旋转变换的代数表示式为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 θ 是参数.

如果以点(x_0, y_0)为旋转中心，则旋转变换的代数表示式为

$$\begin{cases} x' - x_0 = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta \\ y' - y_0 = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 x_0、y_0、θ 是三个独立参数

3. 轴反射变换

如果变换的每对对应点 A、A' 连结线段都垂直于一条定直线 s 且被 s 平分，则这种变换叫做关于直线 s 的轴反射变换，简称反射，直线 s 叫做反射轴.

不难看出，反射轴 s 上的点都是不动点.

定理 2.3 如果取 x 轴为反射轴，则点 $P(x, y)$变到点 $P'(x', y')$的反射变换的代数表示式为

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \tag{2.4}$$

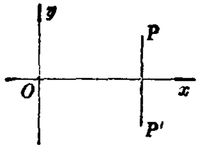

图 2-3

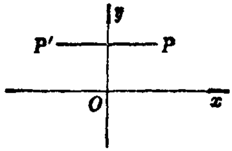

图 2-4

如果取 y 轴为反射轴，则点 $P(x, y)$ 变到点 $P'(x', y')$ 的反射变换的代数表示式为

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \tag{2.5}$$

例 1 求顶点在原点，正焦弦长为 2，主轴斜角为 30° 的抛物线 c' 的方程.（图 2-5）

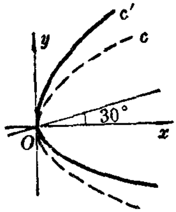

图 2-5

解 顶点在原点，正焦弦长为 2，主轴为 x 轴的抛物线 c 的方程为

$$y^2 = 2x$$

以原点为旋转中心，旋转角为 30° 的旋转变换，由(2.2)知，表示式为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}\,x - y}{2} \\ y' = \dfrac{x + \sqrt{3}\,y}{2} \end{cases}$$

由此得

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}\,x' + y'}{2} \\ y = \dfrac{-x' + \sqrt{3}\,y'}{2} \end{cases}$$

将上式代入抛物线 c 的方程 $y^2 = 2x$ 得所求抛物线 c' 的方程

为

$$\left(\frac{-x'+\sqrt{3}y'}{2}\right)^2-2\left(\frac{\sqrt{3}x'+y'}{2}\right)=0$$

即 $$x'^2-2\sqrt{3}x'y'+3y'^2-4\sqrt{3}x'-4y'=0$$

2.2 正交变换

定义 2.1 平面上的变换，如果保持任何两点的距离不变，即当 $A\to A'$, $B\to B'$ 时必然有 $|AB|=|A'B'|$，这样的变换叫做平面上的正交变换.

由前面的定义不难证明，平移、旋转、反射都是正交变换，其中平移或旋转把一个三角形变为定向相同的三角形，而反射把一个三角形变为定向相反的三角形. 这是平移或旋转与反射的主要区别.

现在要求正交变换的代数表示式. 为此先做以下准备.

引理 正交变换把共线点变为共线点，把不共线点变为不共线点，并且保持两直线间的夹角不变.

证明 设 A, B, C 共线，它们在正交变换 φ 之下的象分别为 A', B', C'(图 2-6).

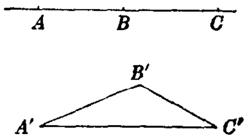

图 2-6

如果后三点不共线，则有

$$|A'C'|<|A'B'|+|B'C'|$$

但是由正交变换的定义有

$$|AB|=|A'B'|,\ |AC|=|A'C'|,\ |BC|=|B'C'|$$

所以，如果

$$|A'C'|<|A'B'|+|B'C'|$$

则必有

$$|AC|<|AB|+|BC|=|AC|$$

这是一个矛盾，说明 A', B', C' 非共线不可.

同理，如果 A, B, C 不共线，则 A', B', C' 也必不共线.

最后，设 φ 把不共线三点 A, O, B 变到不共线三点 A', O', B'（图 2-7）.

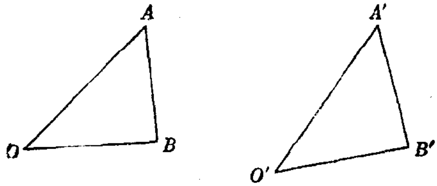

图 2-7

因为

$$|AB| = |A'B'|$$

$$|OA| = |O'A'|$$

$$|OB| = |O'B'|$$

故有

$$\triangle OAB \cong \triangle O'A'B'$$

由此得

$$\angle O = \angle O'$$

可见 φ 保持两直线间的夹角不变.

定理 2.4 在正交变换之下

（1）线段变为等长线段；

（2）单位向量变为单位向量；

（3）笛卡儿直角坐标系变为笛卡儿直角坐标系；

（4）矩形变为全等的矩形.

根据正交变换的定义与以上引理，容易证明这个定理.

设正交变换把直角坐标系 $O\text{-}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ 变为直角坐标系 $O'\text{-}\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$，点 $P(x, y)$ 变为点 $P'(x', y')$（图 2-8）.

如果 $\boldsymbol{e}_1'$ 在原坐标系中的坐标为 (a_{11}, a_{21})，$\boldsymbol{e}_2'$ 在原坐标系中

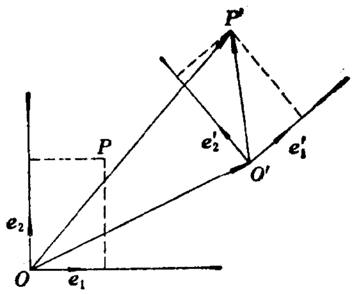

图 2-8

的坐标为(a_{12}, a_{22})，点 O' 在原坐标系中的坐标为(a_{13}, a_{23}).

则由于点 P 在原坐标系中的坐标为(x, y)，点 P' 在原坐标系中的坐标为 (x', y')，根据定理 2.4 可知点 P' 在坐标系 O'-$e_1'e_2'$ 中的坐标也是(x, y).

因为

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P'}$$

故有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'}&=(a_{13}\boldsymbol{e}_1+a_{23}\boldsymbol{e}_2)+(x\boldsymbol{e}_1'+y\boldsymbol{e}_2')\\&=(a_{13}\boldsymbol{e}_1+a_{23}\boldsymbol{e}_2)+x(a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2)+y(a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2)\\&=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})\boldsymbol{e}_1+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})\boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

但是

$$\overrightarrow{OP'}=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2$$

比较以上两式，则得

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}\\y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}\end{cases}\tag{2.6}$$

这就是正交变换的代数表示式.

由于 $\boldsymbol{e}_1'$ 不平行于 $\boldsymbol{e}_2'$，故有

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}\neq\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

因此

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.7}$$

$\Delta \neq 0$ 说明正交变换是一个一一变换，它的逆变换的表示式可以由(2.6)式解出 x, y 而得到.

又因为 e_1' 与 e_2' 是垂直的单位向量，所以

$$e_1' \cdot e_2' = 0,\ e_1' \cdot e_1' = e_2' \cdot e_2' = 1$$

而

$$e_1' = a_{11} e_1 + a_{21} e_2$$

$$e_2' = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$$

分别代入上面三个等式即得(2.6)式中的系数必须满足的条件:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{31}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

(2.8)式通常叫做正交条件，它包含了条件(2.7).

平面上的一个点变换，如果它的代数表示式具有形式(2.6)，则此变换叫做线性变换. 正交变换是满足条件(2.8)的线性变换. 反之，有以下定理.

定理 2.5 满足正交条件(2.8) 的线性变换(2.6)必是正交变换.

证明 任取两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$. 如果在变换(2.6)之下，P_1, P_2 的象分别为 $P_1'(x_1', y_1')$，$P_2'(x_2', y_2')$.

由(2.6)有

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$\begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

其中