（修订本）

冲刺名牌大学

高考数学难点压轴题

Make a dash at prestigious universities

裴光亚 编著

权威性

针对性

导向性

实用性

湖北人民出版社

（修订本）

冲刺名牌大学

——高考数学难点题压轴题

■ 裴光亚 编著

湖北人民出版社

鄂新登字 01 号

冲刺名牌大学

——高考数学难点题压轴题(修订本)　　裴光亚 编著

出版： 发行：湖北人民出版社	地址:武汉市解放大道新育村 33 号 邮编:430022
印刷:枝江市新华印刷有限公司	经销:湖北省新华书店
开本:850 毫米×1168 毫米 1/32	印张:12
字数:298 千字	插页:1
版次:2001 年 11 月第 2 版	印次:2001 年 11 月第 2 次印刷
印数:1—1 0000	定价:15. 60 元

书号:ISBN 7—216—02917—8/G・721

目 录

一、压轴题、难点题的特征

高考是由合格高中毕业生参加的大学入学考试，不仅要判断考生是否达到了某种水平，而且要按照选材的标准和数量，从考生群体中选出接受高等教育的最佳人选．这样的最佳人选必须素质最好，基础最扎实，能力最强，潜力最大，如果得到深造的机会，成功的可能性也最大．为了把这样的学生选拔出来，高考试卷中除了全面反映中学教学的基础知识、基本技能和基本方法外，还必须设计专门的试题，以突出考查学生的潜能，给优秀者以施展才能的空间，从众多考生中脱颖而出．通常把这样的试题叫做压轴题．

压轴题的特点是：

(1)新颖性．首先表现在题型上，与课本中的例题、习题和复习题是不同的．试题结构和设问方式新颖，力求突破常规模式，把考生置于新的情境中，从不同的角度进行考查．比如一个运算题可以设计成证明题，例如代数推理题；一个待证的命题可以设计成不确定的猜想，成为探索题；一种背景中产生的知识可以运用于另外的背景中，成为信息迁移题等．其次表现在内容上，压轴题注重在考试说明和教材规定的考试范围内，不断寻求知识点新颖巧妙的组合，甚至所涉及的知识和方法并不完全是过去的教学内容，试题的立足点不在于测试相应的知识，而集中在能够迁移这些内容

到广泛情境中去的能力．

（本章例题旨在说明压轴题的特征，其解答附在本章文后）

例 1 ［2001，理(20)］

已知 i,m,n 是正整数，且 $1<i\leqslant m<n$.

（Ⅰ）证明 $n^iP_m^i<m^iP_n^i$；

（Ⅱ）证明 $(1+m)^n>(1+n)^m$.

2001 年考这样一道题，使人感到出其不意．从组合数学的角度来说，不过是基本的组合不等式，但在中学课本及其资料中却少有这样的材料，这就设置了一个新颖的情景．

其实这题所用的方法并不陌生，涉及的知识也较基本．第（Ⅰ）问即证$\frac{P_n^i}{n^i}>\frac{P_m^i}{m^i}(m<n)$. 自然想到用排列数公式展开，注意到它们都是 i 个因子的积，只需就对应的因子比较大小就够了．

解第（Ⅱ）问要用到第（Ⅰ）问的结论，这是解数学问题的基本思路，立体几何就是如此．如果具备了这种意识，就会用二项式定理分别将$(1+m)^n$ 和$(1+n)^m$ 展开，并将展开式中的项 $m^iC_n^i$、$n^iC_m^i$ 转化成$\frac{m^iP_n^i}{i!}$、$\frac{n^iP_m^i}{i!}$，再运用（Ⅰ）的结论和放缩法，即可得到证明．如果不具备上述意识，就会走很多弯路，在多种方法的踌躇中贻误时机．

做个事后诸葛亮，这题是如此的简单，但它却难倒了考场上的众多学子，就是因为它如一匹黑马，从众多复习资料的薄弱处脱颖而出．这道题也告诉我们，试题的新颖性，是由迁移产生的，即将基本普通的思路用于题海所遮蔽的地方．这是对既定模式的反叛，其目的在于减少思维定势的作用．

例 2 ［1992，理(28)］

已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A$、$B$ 是椭圆上的两点，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于点 $P(x_0,0)$.

证明：$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$.

像这样的证明题，在教材上也是少见的．实际上，这类典型题目的设问方式不是“证明$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$”，而是“求 x_0 的取值范围”．这里把计算的结果写在试题中告诉考生，就变成了证明形式．这种改动从表面上看把计算结果告诉了考生，好像容易了，但由计算改为证明却加大了试题的难度，增加了对演绎推理的考查．首先要求考生分析判断使用什么样的方法和手段来证明$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$的结论．一见到不等式，考生就很容易从不等式证明的方法上来寻找思路，是用分析法还是综合法？是作差比较还是作商比较？正是由于证明的设问方式，才把本题的解法思路引上了多元化的轨道，这是使用平面解析几何素材考查推理论证的一种尝试．

例 3 [1999，理(23)]

已知函数 $y=f(x)$的图象是自原点出发的一条折线，当 $n\leqslant y\leqslant n+1(n=0,1,2,\cdots)$时，该图象是斜率为 b^n 的线段(其中正常数 $b\neq1$)，设数列$\{x_n\}$由 $f(x_n)=n(n=1,2,\cdots)$定义．

(Ⅰ)求 x_1、x_2 和 x_n 的表达式；

(Ⅱ)求 $f(x)$的表达式，并写出其定义域；

(Ⅲ)证明：$y=f(x)$的图象与 $y=x$ 的图象没有横坐标大于 1 的交点．

这是一道新颖的试题，我们很难从教材上找到类似的题目．

首先，所给的函数是分段函数，且由斜率确定．教材上虽然有分段函数的例子，但只涉及到有限段，而且每段上的表达式都是直接给出的，充其量根据实际意义直接求出．实际上，教材上关于分段函数的例子只是为了说明函数的多样性、函数的一种表示方法，这里利用分段函数来考查函数的基本概念，是考生很难想到的，从

而置身于一种陌生的情境中．

其次，从解题思路来看，一般由不等式和反函数的单调性确定函数的定义域，本题是用极限方法来求函数的定义域，这不仅从求定义域的角度来说新颖别致，从运用极限知识的角度来讲也是超凡脱俗的．第（Ⅲ）问的证明更是如此，证明两图象没有横坐标大于1的交点，通常是证明联立方程组无解，本问则转化成证明另一个更强的命题（即 $x>1$ 时，$f(x)>x$，或 $f(x)<x$），怎样想到这个加强了的命题？如何证明这个加强了的命题？都没有现成的题型可以参照．特别地，用数学归纳法来证明这个命题，既没有提示，也没有暗示，而是由考生根据解题的需要进行判断，恰当的选用证明方法，这就把数学归纳法的考查向前推进了一步．这里，题目并没有明确要求用数学归纳法，也没有得出一个明显的与自然数有关的命题，使人容易联想到用数学归纳法．另外，这里也不一定非要使用数学归纳法不可，还可以由递推关系，通过直接运算求得．能力的标志在于方法的确定和选取，如果限定使用某种方法，只能考查考生对这种方法掌握的准确和熟练程度，如果不加限定，而由考生自己选取方法，这样所考查的能力就又高了一个层次．这正是对“以能力立意”的最好诠释．与曹才翰先生关于“知识、技能、能力”的著名例子如出一辙：学生掌握换元法是知识，掌握换元法的步骤和过程是技能，但是判断什么时候使用换元法，在元不明显的时候，怎样构造元，则是能力了．

如上分析，我们可以知道，这道题和中学的教学内容并不完全一致，特别是与复习中的题型训练相去甚远，但若把题目和解答拆分成知识点来看，又没有超越中学范围的地方，充分表现了压轴题的特点．

（2）超越性．超越性，也是新颖性的必然要求．所谓超越，就是不拘泥于课本知识和常用方法的考查，而是着眼于分析问题和思考问题的方法．这就是我们通常所说的“命题范围遵循中学教

学大纲，但不拘泥于教学大纲”．这一特点也反映在选择题中．2001 年的（12）题如下：

例 4 如图，小圆圈表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网线相联．连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量．现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开沿不同的路线同时传递．则单位时间内传递的最大信息量为

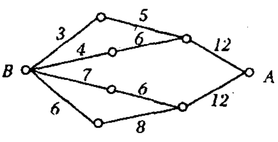

图 1—1

（A）26　　（B）24

（C）20　　（D）19

《考试说明》把考试内容划分为三个部分（代数、立体几何和解析几何）共 13 个项目（文科 12 个项目）．这道题属于哪些知识项目？就很难归类．你可以说它具有排列组合的特征，但又不同于课本中关于排列组合的问题；你可以说是分析推理题，但又不同于教材中的证明题（不论是几何证明，还是代数证明）．它是选择题的最后一题，但却把知识的要求降到了零点，解这题不需要用到高中的任何知识，只需要一点基本常识，即串联线路通过的最大信息量，取决于最“弱”的部分．尽管如此，解这题却有逻辑思维能力的要求．比如需要对图形进行观察，对信息传递的过程进行分析，对每条线路可能传递的信息量进行比较，等．

事实上，设从 B 出发的第 i 条线路（依从上至下的顺序，$i=1,2,3,4$）可以通过的最大信息量为 A_i，则 $A_1=3,A_2=4,A_3=6,A_4=6$，注意到 $A_1+A_2=7\leqslant 12,A_3+A_4=12\leqslant 12$，故所求最大信息量为 $A_1+A_2+A_3+A_4=19$．选（D）．

（3）综合性．试题注重知识的内在联系，要求考生把数学各部分作为一个整体学习、掌握，而不是机械的分为几块．一道以数列为背景的试题，可能要用函数的思想、方程的方法和不等式的知识来解决；一个以几何语言表述的问题，可能要用代数的方法来解

决.

例 5 ［1997,文(24)］

已知过原点 O 的一条直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图象交于 A、B 两点,分别过点 A、B 作 y 轴的平行线与函数 $y=\log_2 x$ 的图象交于 C、D 两点.

(Ⅰ)证明点 C、D 和原点 O 在同一条直线上;

(Ⅱ)当 BC 平行于 x 轴时,求点 A 的坐标.

这是一道代数题,还是几何题,是很难划分的.实际上,在代数与几何之间并不存在一个明显的界限.数形结合应当成为我们处理数学问题的一种常用方法,甚至形成一个思维习惯,即善于用图象(图形)来帮助我们发现数量间的关系,善于对数量关系给出其几何意义并用数量关系式推证出其几何性质.

通常讲数形结合法往往举几何方法解决代数问题的例子,导致我们的注意力集中于用几何作为工具去解决代数问题,本题则相反,用代数作为工具去解决几何问题:三点共线问题.这是一个标准的几何问题,但要解决它却必须用代数工具.用换底公式得出:$\log_2 x=\dfrac{\log_8 x}{\log_8 2}=3\log_8 x$ 后,发现 C、D 的纵坐标正好分别是 A、B 的纵坐标的 3 倍.于是由 O,A,B 同在一直线上导出 OC 与 OD 的斜率相等,因而 O,C,D 三点共线:换言之,解决这一问题的过程与解析几何中的常用方法一致,但用的却是解析几何中所没有涉及到的代数知识:对数的换底公式.

再看第(Ⅱ)问,由图象的分析启发我们,A 点的确定由两个条件决定.其一为 $AC /\!/ Oy$ 轴,且 $BC /\!/ Ox$ 轴;其二为 O,A,B 三点共线,或者说 OA 与 OB 的斜率相同.每个条件产生一个等式——即一个方程.因而,由解联立方程可求出点 A.这个解题过程虽不长,但用的知识点涉及到对数方程、指数方程,以及同底数($\neq 1$)幂相等则其指数也相等,等一系列十分基本的知识.

例 6 [1995,理(25)]

设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列,S_n是其前n项和.

(Ⅰ)证明$\frac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$;

(Ⅱ)是否存在常数$c>0$,使得$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$成立?并证明你的结论.

本题立意作综合设计,以数列为核心知识,在考查等比数列的基本知识的同时,考查不等式的证明和解方程,兼考查对数的运算法则和对数函数的单调性.并且多角度、多层次考查数学思想方法的灵活、恰当的运用,提高对数学能力考查的要求.为此,在第(Ⅰ)问求证对数不等式的设计中,隐含了分类讨论思想的考查(按公比的取值范围分类,不设计为按对数的底分类,加深了考查的隐蔽性);第(Ⅱ)问,不用解方程的提问方式出现,采用了疑问、探索型的陈述方式,增强了对逻辑思维能力的考查;此外,试题解答的主体是代数运算,试题采用字符运算为主,而不是复杂的数值运算,以加强算理、算法的考查;再者,为了加强转化思想的考查,试题设计成:求解过程,必须多次转化问题的提法,既有等价转化,又有不等价转化.

知识的整体性,是切实掌握数学知识的重要标志.高考命题总是从学科整体意义的高度去考虑问题,在知识网络的交汇点设计试题.

(4)主体性.高考压轴题的一个重要特征是侧重于数学的主体知识及其综合运用.其中知识项目以函数、不等式、数列、圆锥曲线为重点,思想方法以数形结合为重点,能力考查的着重点在于从数量关系和几何形体的变化中去研究问题,从运动的角度考查学生的探索能力.

这里,我们仅就1996—2001六年来理科压轴题作一统计,即考察一下这六年来理科卷的最末二题(2000年、2001年倒数第二

题是应用题)，即可以充分的表明这一点．

[1996，理(24)]　直线与双曲线．主要考查直线与双曲线的性质，解析几何的基本思想，以及综合运用知识的能力．

[1996，理(25)]　函数、不等式．主要考查函数的性质、含有绝对值的不等式的性质，以及综合运用数学知识分析问题与解决问题的能力．

[1997，理(24)]　函数、不等式．主要考查一元二次方程、二次函数和不等式的基础知识，考查综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力．

[1997，理(25)]　直线与圆．主要考查轨迹的思想，求最小值的方法，考查综合运用知识建立曲线方程的能力．

[1998，理(24)]　函数图象．主要考查函数及其图象的基本概念、基本性质，曲线几何变换(平移、中心对称)的性质，以及用代数方程研究曲线位置关系的思想方法．

[1998，理(25)]　数列、函数、不等式．主要考查等差数列基本概念及其通项的求法，考查对数函数的性质，考查归纳推理能力以及用数学归纳法进行论证的能力．

[1999，理(23)]　函数、数列．主要考查函数的基本概念、等比数列、数列极限的基础知识，考查归纳、推理和综合的能力．

[1999，理(24)]　点的轨迹．主要考查曲线与方程，直线和圆锥曲线等基础知识，以及求动点轨迹的基本技能和综合运用数学知识解决问题的能力．

[2000，理(22)]　圆锥曲线．本题主要考查坐标法、定比分点的坐标公式、双曲线的概念和性质，推理、运算能力和综合运用数学知识解决问题的能力．

[2001，理(22)]　函数、数列．本题主要考查函数的概念、图象，函数的奇偶性和周期性以及数列极限等基础知识，考查运算能力和逻辑思维能力．

上述，是关于压轴题的一些特点．了解这些特点后，我们自然要问：这些题是如何形成的？或者说这些题的主要来源有哪些？通过对历年试题的分析，不难知道，高考题的来源主要有三：

(1)课本．即是课本内容的组合、加工和发展．命题者总是从知识体系中提取考点，从知识形成的过程中挖掘素材．

(2)与高等数学的衔接处．高考的性质决定了高考命题必须充分考虑中学数学与高等数学的衔接．近年来，具有高等数学背景的试题不断出现．1997 年理(24)题，关于二次函数的试题，其背景是非线性函数的迭代法（参见任子朝主编 2001 年版《高考能力测试与试题设计・数学》P_{202}）．1999 年理(23)题（见例 3）无疑涉及到微积分的基本材料，其中第（Ⅰ）问解答中的式子 $\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}=b^{n-1}$，使人联想到导数、中值定理等．第（Ⅱ）问要用到极限方法．2001 年理(22)题也是如此．

例 7 [2001，理(22)]

设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，对任意 $x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 $f(1)=a>0$.

（Ⅰ）求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{4})$；

（Ⅱ）证明 $f(x)$ 是周期函数；

（Ⅲ）记 $a_n=f(2n+\frac{1}{2n})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)$.

众所周知，中学一般研究具体的函数，而这里讨论的，则是抽象函数的特性．由函数 $f(x)$ 的一些性质（偶函数、关于直线 $x=1$ 对称、满足某恒等式）推出另一些性质（周期性），正是高等代数的基本方法．解第（Ⅲ）问，需先求 a_n，所用的递推方法，也是高等数学中常用的变换技巧．

值得注意的是，我们并不需要提前了解高等数学．如果有人好高骛远，也不可能带来什么优势．我们揭示这一来源的作用，在于明确高考的方向，把握高考的重点，增强复习的有效性．

(3)将源于上述两条途径的题目改变设问方式．前述例 2 就是把一道计算题改成了证明题．例 6 是将证明题(第(Ⅱ)问证等式不成立)改成了探索题等．这给我们什么启示呢？它启示我们，在运用模拟题进行复习时，要采取分析和扬弃的态度，注意改变条件，改变结论，改变设问方式，不断增加变动的因素，在反思中提高复习的效益．

一般说来，压轴题都是难点题，但难点题并不都是压轴题．除压轴题外，还有两种情况的难题：一种是应用题．数学的应用极其广泛，致使应用性题目没有固定的类型，不可能有一套对付应用题的办法，只能依靠考生的真实能力解决，对大多数习惯于题型分类训练的考生而言，必然感到无所适从．另一种是学生难以弄清、弄懂或解答容易出错的问题，这种难题可以区分学生已有和潜在的学习能力．从命题者的意图来看，这样的试题并不期望多数考生都能正确作答，只是为那些可能被录取，甚至只是为那些可能被录取到重点高校的少数考生设计的．

综上所述，从压轴题的角度考虑，本书集中研究四个课题：

关于函数、不等式、数列的综合问题；

代数推理；

与直线、圆锥曲线有关的问题；

开放型问题．

从其他难点题的角度考虑，主要有两个课题：

应用性问题；

选择题的解题策略．本书主要介绍那些具有一定综合性，突出考查直觉思维的选择题的解法．

另外，基于综合复习完整性的考虑，还将讨论如下两个课题：

与三角、复数有关的问题；

解立体几何题的基本思路。

附：本章例题解答

例 1 ［2001，理(20)］

(Ⅰ)**证明**：对于 $1<i\leqslant m$，有

$$P_m^i=m\cdot\cdots\cdot(m-i+1),$$

$$\frac{P_m^i}{m^i}=\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\cdots\cdot\frac{m-i+1}{m},$$

同理 $$\frac{P_n^i}{n^i}=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-i+1}{n},$$

由于 $m<n$，对整数 $k=1,2,\cdots,i-1$，有 $\frac{n-k}{n}>\frac{m-k}{m}$，

所以 $\frac{P_n^i}{n^i}>\frac{P_m^i}{m^i}$，即 $m^iP_n^i>n^iP_m^i$.

(Ⅱ)**证明**：由二项式定理有

$$(1+m)^n=\sum_{i=0}^{n}m^iC_n^i,$$

$$(1+n)^m=\sum_{i=0}^{m}n^iC_m^i,$$

由(Ⅰ)知 $m^iP_n^i>n^iP_m^i(1<i\leqslant m<n)$，

而 $C_m^i=\frac{P_m^i}{i!}$，$C_n^i=\frac{P_n^i}{i!}$，

所以，$m^iC_n^i>n^iC_m^i(1<i\leqslant m<n)$.

因此，$\sum_{i=2}^{m}m^iC_n^i>\sum_{i=2}^{m}n^iC_m^i$.

又 $m^0C_n^0=n^0C_m^0=1$，$mC_n^1=nC_m^1=mn$，$m^iC_n^i>0(m<i\leqslant n)$.

∴ $\sum_{i=0}^{n}m^iC_n^i>\sum_{i=0}^{m}n^iC_m^i$.

即 $(1+m)^n>(1+n)^m$.

例 2 [1992,理(28)]

证法 1 设 A、B 的坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2). 因线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交,故 AB 不平行于 y 轴,即 $x_1\neq x_2$. 又交点为 $P(x_0,0)$,故$|PA|=|PB|$,即

$$(x_1-x_0)^2+y_1^2=(x_2-x_0)^2+y_2^2. \qquad ①$$

$\because$ A、B 在椭圆上,

$\therefore$ $y_1^2=b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x_1^2$,

$y_2^2=b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x_2^2$.

将上式代入①,得

$$2(x_2-x_1)x_0=(x_2^2-x_1^2)\frac{a^2-b^2}{a^2}. \qquad ②$$

$\because$ $x_1\neq x_2$,可得

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2}. \qquad ③$$

$\because$ $-a\leqslant x_1\leqslant a$,$-a\leqslant x_2\leqslant a$,且 $x_1\neq x_2$,

$\therefore$ $-2a<x_1+x_2<2a$,

$\therefore$ $-\dfrac{a^2-b^2}{a}<x_0<\dfrac{a^2-b^2}{a}$.

证法 2 设 A、B 的坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2). 因 $P(x_0,0)$在 AB 的垂直平分线上,以点 P 为圆心,$|PA|=r$ 为半径的圆 P 过 A、B 两点,圆 P 的方程为

$$(x-x_0)^2+y^2=r^2,$$

与椭圆方程联立,消去 y 得

$$(x-x_0)^2-\frac{b^2}{a^2}x^2=r^2-b^2,$$

$\therefore$ $\dfrac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2x_0x+x_0^2-r^2+b^2=0. \qquad ①$

因 A、B 是椭圆与圆 P 的交点，故 x_1,x_2 是方程①的两个根．由韦达定理，得

$$x_1+x_2=\frac{2a^2}{a^2-b^2}x_0.$$

因 $-a\leqslant x_1\leqslant a,-a\leqslant x_2\leqslant a$，且 $x_1\neq x_2$，故

$$-2a<x_1+x_2=\frac{2a^2}{a^2-b^2}x_0<2a,$$

$$\therefore\quad -\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}.$$

例 3 ［1999，理(23)］

(Ⅰ)**解**：依题意 $f(0)=0$，又由 $f(x_1)=1$，当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象是斜率为 $b^0=1$ 的线段，故由

$$\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0}=1 \text{ 得 } x_1=1.$$

又由 $f(x_2)=2$，当 $1\leqslant y\leqslant 2$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象是斜率为 b 的线段，故由

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=b,\text{即 } x_2-x_1=\frac{1}{b}\text{ 得 } x_2=1+\frac{1}{b}.$$

记 $x_0=0$. 由函数 $y=f(x)$ 图象中第 n 段线段的斜率为 b^{n-1}，故得

$$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}=b^{n-1}.$$

又 $f(x_n)=n,f(x_{n-1})=n-1$；

$$\therefore\quad x_n-x_{n-1}=\left(\frac{1}{b}\right)^{n-1},n=1,2,\cdots.$$

由此知数列 $\{x_n-x_{n-1}\}$ 为等比数列，其首项为 1，公比为 $\frac{1}{b}$.

因 $b\neq 1$，得

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$$