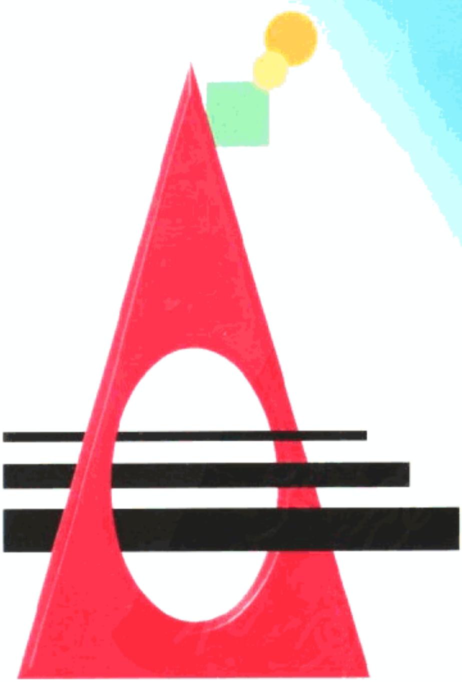
高考综合能力总训练

3+X

数学

高考命题研究组
王大赫 主编



北京教育出版社

高考综合能力总训练

3+X

数学

高考命题研究组
王大赫　主编

北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考综合能力总训练．数学/高考命题研究组编著．
北京:北京出版社,2000.11
ISBN 7-5303-2162-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.高…　Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料　Ⅳ.G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 53974 号

高考综合能力总训练·数学

GAOKAO ZONGHE NENGLI ZONGXUNLIAN

SHUXUE

高考命题研究组

王大赫　主编

*

北京教育出版社出版

(北京北三环中路6号)

邮政编码:100011

网　址:www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

新华书店经销

中国青年出版社印刷厂印刷

*

850×1168　32开本　11.5印张　260000字

2001年1月第1版　2002年1月第2次印刷

印数 40 001-70 000

ISBN 7-5303-2162-5

G·2137　定价:13.00元

编委会名单

主　编　王大赫

编　委　王树声　杨子坤
　　　　傅以伟　林镜仁
　　　　陶谋靖　杨锦操
　　　　陈国星　王万军
　　　　高自友　刘岩华
　　　　肖　鹏　许鸿彦
　　　　汪　朔　张　燕
　　　　程崇杰　章冬白

前　言

面对科学技术突飞猛进和知识经济迅速兴起的新世纪的挑战，高考也在进行着深刻的改革，教育部发布了教学[1999]3号文件，对高校招生考试制度改革提出了新的意见，教育部考试中心也公布了《高考内容和形式改革方案》。1999年及2000年在广东、吉林、山西、江苏、浙江五省，进行“3+X”考试方案改革实验，2001年全国将有天津、上海、内蒙古、辽宁、黑龙江、福建、湖南、湖北、四川、海南、陕西、河南等12个省、市参加更新一轮高考“3+X”改革实验。

高考内容改革是这次改革的重点。命题原则是把以“知识立意”改为以“能力立意”；更加强调注重考查考生进入高校学习所需的基础文化素质；考查对知识的理解、运用、分析与综合的能力。“综合能力考查”也列入高考的科目。它包括两个方面内容：一是学科内的综合能力考查；二是学科间的综合能力考查。

本丛书特为适应新一轮高考综合能力考查而编，包括“3”即语文、数学、英语，“X”即文科综合及理科综合，对考生最关心的几个问题：高考综合能力的要求，考查的内容、题型、解题思路及综合能力的培养等方面进行了详细的阐释。为培养考生的这种能力，还精心设计了足够数量的训练题，以供考生之用。

本丛书作者阵容强大，由著名的考试研究专家、学科专家、特高级教师组成。本丛书力求做到：

1．正确体现新一轮“3+X”高考内容改革的精神；

2. 准确阐述高考命题原则、思路和题型特点；

3. 引导考生培养正确的解题思路；

4. 强调丛书的科学性、权威性、实用性和可操作性。

这是一套当前最好的为“3+X”高考准备的备考用书。

本丛书在设计编写的过程中得到了有关考试部门、招生部门和老师的关心和支持，在这里向他们致以衷心的谢忱。

因编写时间仓促，难免有不当之处，请批评指正。

编　者

2000年10月

目　　录

第一部分

高考数学科

能 力 释 析

全国高考数学科考试说明中，“关于考试内容的知识要求和能力要求作如下说明：

1. 知识要求

对知识的要求由低到高分为三个层次，依次是了解、理解和掌握、灵活和综合运用，且高一级的层次要求包含低一级的层次要求.

（1）了解：要求对所列知识内容有初步的、感性的认识，知道有关内容，并能在有关的问题中直接应用.

（2）理解和掌握：要求对所列知识内容有较深刻的理解认识，能够解释、举例或变形、推断，并能利用知识解决有关问题.

（3）灵活和综合运用：要求系统地掌握知识的内在联系，能运用所列知识分析和解决较为复杂的或综合性的问题.

2. 能力要求

（1）逻辑思维能力：会对问题或资料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括；会用演绎、归纳和类比进行推断；能准确、清晰、有条理地进行表述.

（2）运算能力：会根据概念、公式、法则，进行数、式、方程的正确运算和变形；能分析条件，寻求与设计合理、简捷的运算途径；能根据要求对数据进行估计，并能进行近似计算.

（3）空间想象能力：能根据条件画出正确的图形，根据图形想象出直观形象；能正确分析图形中基本元素及其相互关系；能对图形进行分解、组合与变形.

（4）分析和解决问题的能力：能阅读、理解对问题进行陈述的材料；能综合应用所学数学知识、思想和方法解决问题，包括解决在相关学科、生产、生活中的数学问题，并能用数学语言正确地加以表述.”

下面按上述四个方面的能力要求，结合高考实践分别进行释析.

一、逻辑思维能力

数学中的逻辑思维能力，是指根据正确思维规律和形式对数学对

象的属性进行分析综合、抽象概括、推理证明的能力．它要求对问题或数学材料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括；会用演绎、归纳和类比进行判断与推理，并能准确、清晰、有条理地进行表述．

逻辑思维能力是人们进行思维活动的基础，是数学素养的主要标志，是数学能力的核心．

数学的逻辑思维过程，就是运用数学的思想和方法、逻辑的方法，目的明确地对外来的和内在的信息进行提取与转化、加工与传输的思维活动过程，在整个过程中，要求合乎逻辑，不悖常理，并能最终达到目的，同时还要将其全过程给予正确陈述，令人信服．

因此上述要求是对"逻辑思维能力"的三个层次的说明，体现在解题过程中，表现为：能正确领会题意，明确解题目标；能寻找到实现解题目标的方向和适当的解题步骤；能通过合乎逻辑的推理与运算，正确地表述解题过程．

显然，正确地领会题意，明确解题目标，是开展思维的前提．这就要求有一定的阅读理解能力，要弄清条件是什么，结论要求什么等等，这是开展思维的前提．

寻求解题的方向和步骤，是充分运用观察、比较、类比、分析、综合、演绎、归纳、抽象、概括等思维方式，对题目的条件和结论的外在信息与自身大脑中储存的内在信息进行提取、组合、加工与转化，从而明确解题方向，形成解题策略，确定解题方法，选择解题步骤（当然这与分析和解决问题能力有关，只是思维要求的侧重点不同）．

采用适当的步骤、合乎逻辑地进行推理演算．这里推理过程包括：

(1) 演绎推理．即从定义和已知条件出发进行分析、推理、论证的能力，重点是三段论的推理．要保证推理的合理性和论证的严谨性，就必须掌握好有关的逻辑知识，如命题的充要条件、等价命题、逻辑划分、推理规则等等，从而做到因果关系明晰，推理步步有据，陈述层次清楚，论证完整无缺．

(2) 归纳推理．它是由旧事物发现新事物的推理方法，是创造力的重要组成部分．虽然数学知识是个演绎体系，并且演绎推理是数学学习与研究的重要方法，但归纳的方法是获得数学结论的一个重要途

径. 运用不完全归纳法，通过观察、实验，从特殊中归纳出一般结论，形成猜想，然后加以证明，这就是数学研究的基本方法之一.

(3) 直觉思维. 它区别于逻辑思维的重要标志是没有经过严密逻辑推理之前，就对事物迅速作出判断，得出结论，而这种结论还需严格的逻辑证明.

事实上，直觉思维得出的结论并非主观猜测，而是以扎实的知识为基础，以对事物的敏锐观察、深刻的理解为前提的.

直觉思维是指不受固定的逻辑思维规则的约束，直接领悟事物本质的一种思维方式，在直觉思维过程中，人们以已有的知识为依据，对所研究的问题提出合理的猜想与假设，含有一个飞跃的过程，往往表现为突然的认识和顿悟. 直觉思维的特性主要表现在思维对象的整体性、思维产生的突发性、思维过程的非逻辑性、思维结果的创造性和超前性，以及思维模式的灵活性与敏捷性等.

逻辑思维与直觉思维是人们的两种基本思维形式，逻辑思维在数学中始终占据着主导的地位，而直觉思维又是思维中最活跃、最积极、最具有创造性的成分，两者形成了辩证的互补关系，它们的辩证运动构成了完整的数学思维过程，直觉思维为演绎思维提供了动力并指示了方向，逻辑思维则为直觉思维作出检验和反馈，是直觉思维的深入发展.

(4) 数学语言. 语言是思维的载体，思维需要语言或文字来表述，数学语言包括文字语言、符号语言和图形语言，要求考生能够根据实际情况进行各种语言间的互相转换.

对语言的考查主要包括两个方面的要求：

其一是要求考生有一定的语言表述能力，能清楚、准确、流畅地表达自己的解题过程，并要求表达合乎条理、层次清楚、合乎逻辑，准确规范地使用名词、术语和数学符号，书写清楚；

其二是要求考生能读懂题目的叙述，把所给的文字及数学符号翻译成数学关系，进行数学化，以便进行加工处理.

简言之，要考生做到因果关系清楚、明晰，推理步步有据，陈述层次清楚，论证完整无缺.

下面通过一些高考试题对以上几个方面的考查要求给予说明：

1. 关于演绎推理方面

【例 1】$F(x)=\left(1+\frac{2}{2^x-1}\right)f(x)(x\neq 0)$是偶函数，且$f(x)$不恒等于零，则$f(x)$ (　　)

A. 是奇函数

B. 是偶函数

C. 可能是奇函数也可能是偶函数

D. 不是奇函数也不是偶函数

[1993 年高考试题]

【分析】本题需要通过概念进行推理与判断，其基本过程就是演绎推理. 首先要深刻理解函数奇偶性的概念. 然后从概念和已知条件出发进行判断与演绎推理.

如果直接使用定义进行判断，则需要先进行变形.

$\because \quad 1+\frac{2}{2^x-1}\neq 0,$

$\therefore \quad f(x)=\frac{F(x)}{1+\frac{2}{2^x-1}}=\frac{2^x-1}{2^x+1}\cdot F(x),$

然后再利用定义进行判断:

$f(-x)=\frac{2^{-x}+1}{2^{-x}+1}\cdot F(-x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}\cdot F(x)=-f(x).$

故函数$f(x)$为奇函数，所以选 A.

如果考虑到三个函数：$F(x)$，$1+\frac{2}{2^x-1}$和$f(x)$都是不恒为零的函数，那么判断$f(x)$的奇偶性便可转化为判断函数$1+\frac{2}{2^x-1}$的奇偶性，使问题得到简化. 两种不同的解法体现出思维要求上的差异，不同的层次.

【例 2】设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=x$，则$f(7.5)$等于 (　　)

A. 0.5　　B. -0.5　　C. 1.5　　D. -1.5

[1996 年高考试题]

【分析】本题的条件给出的信息量较大，概念性强，条件与所求

之间，有一定跨度，欲得出正确的判断则需具备良好的逻辑思维能力.

解答本题时，从思维取向上大体有两种：

其一是考虑在 $x=7.5$ 时的函数关系式或者利用函数图象来反映这种关系.

其二是利用 $f(x+2)=-f(x)$ 及 $f(x)=x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 对 $f(7.5)$ 进行等值转换来进行判断.

相应的解法思路分别是：

思路 1：由 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，$\therefore$ $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$. $\therefore$ $f(x)$ 为周期为 4 的周期函数. $\therefore$ $f(7.5)=f(8-0.5)=f(-0.5)$，又 $\because$ $f(x)$ 为奇函数. 且 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $f(x)=x$. $\therefore$ $f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5$. 故应选择 B.

思路 2：由 $f(x+2)=-f(x)$ $\therefore$ $f(x+1)=-f(x-1)$，又 $f(x)$ 为奇函数，$\therefore$ $f(x+1)=f(1-x)$，$\therefore$ $f(x)$ 图象关于 $x=1$

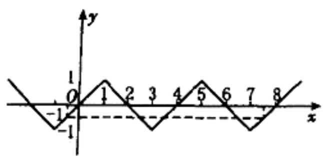


图 1-1

对称，且 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$. 故函数图象为图 1-1，可知 $f(7.5)=-0.5$.

思路 3：由 $f(x+2)=-f(x)$、$f(x)$ 为奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$ 及 $f(x)=x, 0\leqslant x\leqslant 1$，利用迭代的方法可得：

$$\begin{aligned} f(7.5)&=-f(5.5)=f(3.5)=-f(1.5)\\ &=f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5. \end{aligned}$$

说明：对于思路 1 和思路 2，逻辑上的要求较高，且解题的用时也较多；而思路 3 作为选择题来讲，更显得快捷省时，解题关键在于对数学符号和数学语言的深刻理解.

【例 3】 如图 1-2，三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA\perp BC$，$PA=BC=l$，PA、BC 的公垂线 $ED=h$. 求证三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $V=$

$\frac{1}{6}l^2h$.

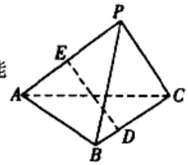


图 1-2

【分析】几何证明题，主要是考查演绎推理能力，要求推理严谨、论述完整.

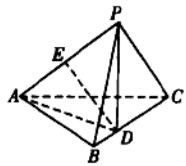


图 1-3

证明：连结 AD，PD，

$\because$ $BC\perp ED$，$BC\perp AP$，

又 $\because$ $ED\cap AP=E$，

$\therefore$ $BC\perp$平面 PAD，

令 $BD=l_1$，

$\because$ $ED\perp PA$，

$S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}AP\cdot ED=\frac{1}{2}l\cdot h$，

$\therefore$ 三棱锥 $B-PAD$ 体积

$$V_1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}lh\right)l_1=\frac{1}{6}lhl_1.$$

同理，令 $DC=l_2$，得三棱锥 $C-PAD$ 的体积

$$V_2=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}lh)l_2=\frac{1}{6}lhl_2.$$

$\because$ $l=l_1+l_2$，

$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 体积

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{6}lhl_1+\frac{1}{6}lhl_2=\frac{1}{6}lh\ (l_1+l_2)\ =\frac{1}{6}l^2h.$$

说明：该问题的证明过程关键在于连结 AD 和 PD，将三棱锥分割成两个棱锥，而后再将其组合而成，说明了空间想象能力、逻辑推理能力不是孤立的，在解决一个问题的过程中，需把几种能力综合进行应用.

【例 4】已知函数 $f(x)=\tan x$，$x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. 若 x_1，$x_2\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1\neq x_2$，证明

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

[1994 年理 (22)]

【分析】该题即证明不等式

$$\frac{1}{2}(\tan x_1+\tan x_2)\ >\tan\frac{x_1+x_2}{2},\ x_1,\ x_2\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

因此，应设法把两端的三角函数式化成可比较大小的三角式或代数式，要充分利用三角函数的性质，并结合代数不等式证明的常用方法，展开讨论．方法很多，重要的是尽量减少盲目性，避免走弯路．

证法 1：

$\because\quad \tan x_1+\tan x_2=\dfrac{\sin x_1}{\cos x_1}+\dfrac{\sin x_2}{\cos x_2}$

$=\dfrac{\sin(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2}=\dfrac{2\sin(x_1+x_2)}{\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)}$；

又 $\quad x_1,\ x_2\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x_1\neq x_2$，

$\therefore\quad 2\sin(x_1+x_2)>0$，$\cos x_1\cos x_2>0$，

$0<\cos(x_1-x_2)<1$

从而，$0<\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)<1+\cos(x_1+x_2)$，

$\tan x_1+\tan x_2>\dfrac{2\sin(x_1+x_2)}{1+\cos(x_1+x_2)}=2\tan\dfrac{x_1+x_2}{2}$．

即 $\quad \dfrac{1}{2}(\tan x_1+\tan x_2)>\tan\dfrac{x_1+x_2}{2}$．

$\therefore\quad \dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$．

证法 2：

(1) 当 $x_1+x_2\neq\dfrac{\pi}{2}$ 时，有

$$\tan x_1+\tan x_2=\tan(x_1+x_2)(1-\tan x_1\tan x_2)$$

$$=2\tan\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{1-\tan x_1\tan x_2}{1-\tan^2\frac{x_1+x_2}{2}}$$

$$=2\tan\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{x_1+x_2}{2}}{\cos x_1\cos x_2},$$

$x_1,\ x_2\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x_1\neq x_2$，知有

$$\cos^2\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}[\cos(x_1+x_2)+1]$$

$$>\frac{1}{2}[\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)]$$

$$=\cos x_1\cos x_2>0,$$

$\tan\dfrac{x_1+x_2}{2}>0$．

第一部分 高考数学科能力释析