目　录

绪 论

一、工程流体力学的定义

流体力学是力学的一个分支。由于流体包括液体和气体，因而流体力学也就包括液体力学和气体力学两部分。液体力学常以水作为液体的代表，故一般称为水力学。气体力学是以气体为研究对象，它通过数学推理，追求问题解的严密性和精确。因气体力学主要研究动力学问题，所以又叫气体动力学。

工程流体力学主要研究液体和低速气流的运动规律，它根据工程实际的需要，着重解决工程实际问题。因此它分析流体运动的方法，既注重理论分析，又广泛采用实验数据和经验公式。

二、流体力学的研究对象

流体的共同特点是易流动性，并在任何微小的剪切力作用下，都可以使流体发生很大的变形。故，流体是具有易流动性和易变形性的物体。

流体力学以流体为研究对象，主要是研究流体的平衡、运动和流体与固体相互作用的力学规律以及这些规律在工程实际中应用的一门学科。

三、工程流体力学在探矿工程中的应用

工程流体力学在许多工程技术部门有着广泛的应用。以探矿工程部门来说，大量的液压钻机、水泵、海洋钻探、石油钻探、水文地质与工程地质钻探、矿井与巷道的通风和排水，以致于利用流体包裹体找矿等都要用到流体力学的基本理论和基本知识，因此流体力学是一门重要的技术基础课。

四、连续介质假设

从物理学的观点来看，流体的真实结构是由运动着的流体分子所组成，分子与分子之间具有间隙。因此从微观的角度看，流体是不连续的；但是在流体力学中，我们是从宏观的角度来研究流体的，即把流体质点作为最小的研究对象。所谓流体质点是指由许多流体分子所组成的流体最小研究单位。从而把流体看作没有间隙的、连绵一片的、由无数流体质点所组成的同一体。这种把流体内部看作没有间隙的连续体的假设称为流体的连续介质假设。把流体看成连续介质之后，我们就可以利用连续函数这一强有力的数学工具，从而给流体力学的研究带来极大的方便。同时经工程实践证明，这种连续介质的假设是完全可以的。

第一章　流体的主要物理性质

由于流体处于平衡和运动时的力学规律都与流体的物理性质有关，所以我们首先来讨论与力学有关的主要物理性质。流体的主要物理性质有密度、重度、膨胀性、压缩性与粘性等。

§1-1　流体的密度和重度

流体和其他物质一样，具有质量和重量，故流体就有密度和重度这两个物理性质。

一、流体的密度

流体的质量通常用密度来表示。对于均质流体来说，密度是指单位体积的流体所具有的质量，即

$$\rho = \frac{M}{V} \tag{1-1}$$

式中：ρ——流体的密度；

M——流体的质量；

V——质量为 M 的流体体积。

对于非均质流体，则某一点处的密度为

$$\rho = \frac{dM}{dV}$$

二、流体的重度

流体的重量通常用重度来表示。对于均质流体来说，重度是指单位体积的流体所具有的重量，即

$$\gamma = \frac{G}{V} \tag{1-2}$$

式中：γ——流体的重度；

G——流体的重量；

V——重量为 G 的流体体积。

对于非均质流体，则某一点处的重度为

$$\gamma = \frac{dG}{dV}$$

三、密度与重度的关系

由于 $G=Mg$，故流体的密度与重度的关系为

$$\gamma = \rho g \tag{1-3}$$

式中：g——当地的重力加速度。

应当指出，流体的密度是一个绝对量，因为它不随地理位置而变化；而流体的重度是一个相对量，因为 g 是随地理位置而变化的。

四、比重与重度

比重与重度是两个不同的概念。液体的比重定义为：在标准大气压下，液体的重量与温度为4℃时同体积蒸馏水的重量之比。由此可见，比重是没有单位的。比重与密度、重度的关系式为

$$S_{液} = \frac{\gamma_{液}}{\gamma_{水}} = \frac{\rho_{液}}{\rho_{水}} \tag{1-4}$$

式中：$S_{液}$——液体的比重。

关于气体的比重没有统一的定义。

在一个标准大气压下测定的几种常见的流体的密度、重度与比重见表1-1。

表1-1　几种常见流体的密度、重度和比重

流体名称	温度（℃）	密度（kg/m³）	重度（N/m³）	比　重
清　水	4	1000	9807	1
海　水	15	1020～1030	9996～10094	1.02～1.03
普通汽油	15	700～750	6860～7350	0.70～0.75
石　油	15	880～890	8624～8722	0.88～0.89
柴　油	15	875	8575	0.875
润滑油	15	890～920	8722～9010	0.89～0.92
液压油	15	860～900	8428～8820	0.86～0.90
酒　精	15	790～800	7742～7840	0.79～0.80
水　银	0	13 600	133 280	13.6
空　气	0	1.293	12.68	0.001 293
空　气	20	1.205	11.82	0.001 183

【例1-1】　已知一升煤油重8N，一升纯水在4℃时重9.8N，试求煤油的比重、重度和密度。

【解】

$$S_{煤油} = \frac{G_{煤油}}{G_{水}} = \frac{8}{9.8} = 0.816$$

$$\gamma_{煤油} = \frac{G}{V} = \frac{8\text{N}}{10^{-3}\text{m}^3} = 8000\ \text{N/m}^3$$

$$\rho_{煤油} = \frac{\gamma}{g} = \frac{8000\text{N/m}^3}{9.8\text{m/s}^2} = 816\ \text{kg/m}^3$$

【答】　煤油的比重、重度和密度分别为0.816、8000N/m³和816kg/m³。

§1-2　流体的压缩性与膨胀性

当作用在流体上的压力增加时，流体所占有的体积将缩小，这种特性称为流体的压缩性。当温度增高时，流体的体积将膨胀，这种特性称为流体的膨胀性。这就表明，一定质量的流体，其密度随压力和温度不同而发生变化。由于气体分子之间的引力要比液体小得多，因此在这两种物理性质上气体和液体的差别很大，必须分别进行讨论。

一、液体的压缩性和膨胀性

液体的压缩性通常用体积压缩系数 β_p 来表示。β_p 表示在温度不变的条件下，压力每增加

一个单位时，液体体积相对减少的数值，即

$$\beta_p = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} \tag{1-5}$$

式中：V——原有的体积；

dV——体积的改变量；

dp——压力的改变量；

β_p——压缩系数。

负号表示由于压力增加，体积就会缩小，所以 dV 与 dp 总是异号；而我们希望 β_p 取正值，故式（1-5）右边加上负号。

表 1-2 中列出了在温度 273K 时不同压力下水的 β_p 值。

表 1-2　273K 水在不同压力下的 β_p 值

p (N/m²)	5×98 100	10×98 100	20×98 100	40×98 100
β_p×98100 (m²/N)	0.539	0.537	0.531	0.523

从表 1-2 中看出，当水温为 273K、压力为 5×98 100N/m² 的情况下，压力每增加 1N/m² 时，水的体积（即 β_p）只改变 0.539/98 100m²/N；随着压力的增高，β_p 逐渐减小。由此可见，水的压缩性是很小的，同样其他液体的压缩性也是很小的。因此工程实际中认为液体是不可压缩流体。只有在特殊情况下，如水击时，才考虑液体的压缩性。

体积压缩系数的倒数称为体积弹性系数，体积弹性系数用 K_p 表示，该概念将在介绍水击时用到。

【例 1-2】　在容器中压缩一种液体。当压力为 10^4N/m² 时，液体的体积为 1m³；当压力增加到 2×10^4 N/m² 时，其体积为 995cm³。问此液体的压缩系数为多少？

【解】

$$\beta_p = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} = \frac{1}{1\text{m}^3}\frac{(0.995-1)\text{m}^3}{(2\times10^4-10^4)\text{N/m}^2} = 5\times10^{-7}\text{m}^2/\text{N}$$

液体的膨胀性通常用体积膨胀系数 β_t 来表示。β_t 是指在压力不变，温度每升高 1K 时，液体体积的相对增量，即

$$\beta_t = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \tag{1-6}$$

式中：dt——液体的温度增量；

β_t——液体的体积膨胀系数。

表 1-3 中列出了在不同温度下水的 β_t 值。

表 1-3　水的 β_t 值（1/K）

温度（K） 压力（N/m²）	274—283	313—323	363—373
98 100	14×10^{-6}	422×10^{-6}	719×10^{-6}
9 810 000	43×10^{-6}	422×10^{-6}	704×10^{-6}

从表 1-3 中看出，当压力为 98 100N/m²，温度在 274—283K 区间内时，温度每升高 1K，水的体积（即 β_t）只改变 14×10^{-6}1/K。由此可见，水的膨胀性是很小的，同样其他液体的膨胀性也与水类似。因此在工程实际计算中，一般可以不考虑液体的膨胀性。

二、气体的压缩性与膨胀性

对于气体，它不同于液体，压力和温度的改变对气体密度的变化影响比较大。对于气体的压缩性与膨胀性，通常用理想气体的状态方程来表示，即

$$\frac{p}{\rho T}=R \tag{1-7}$$

式中：p——绝对压力；

ρ——气体的密度；

T——绝对温度；

R——气体常数。

气体常数 R 可由标准状态下的参数来确定。例如空气，把标准大气压 $p_0=101\ 300\text{N/m}^2$，比容 $v_0=0.773\text{m}^3/\text{kg}$，$T_0=273\text{K}$ 代入式（1-7），得 $R=287$（N·m/kg·K）。

公式（1-7）也可以写为

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1}=\frac{p_2}{\rho_2 T_2}=R$$

或

$$\frac{p_1}{\gamma_1 T_1}=\frac{p_2}{\gamma_2 T_2}=\frac{R}{g}$$

对于实际气体，在一般温度下，当压力的变化不大时，应用式（1-7）可以得到正确的结果。

三、关于不可压缩流体的概念

因为液体的压缩性很小，所以在工程实际计算中把液体视为不可压缩流体。气体的压缩性虽然比液体大，但是当气体的压力和温度变化不大，而且其流速低于 70m/s 时，由于气体的密度变化很小，这时亦可把气体视为不可压缩流体，其误差不超过 1%。例如矿山开采中的巷道通风和勘探掘进工程中的井巷通风的风流都可看作不可压缩流体。在工程实际计算中，不可压缩流体的密度可视为常数。反之，对于压缩性比较大的流体称为可压缩流体，例如爆破工程中的气流和水击过程中的水流都是可压缩流体的典型实例。本教材主要介绍不可压缩流体。

§1-3 流体的粘性

在日常生活中，我们有这样的感性知识，油要比水粘，流体这种粘的性质，我们习惯上称之为粘性。

一、粘性的概念

为了对粘性作一个定性的分析，我们来做如下实验。

设两块比较靠近的平行平板之间充满着流体，如图 1-1 所示。上平板以速度 u_{max} 向前运动，下平板固定不动。

由于与平板相接触的流体分子附在平板表面上，所以附在上平板表面上的流体层速度为 u_{max}，而附在下平板表面上的流体层速度为零。而两平板之间的各流体层的速度自下而上增加到 u_{max}。当运动速度快的流体层在运动速度慢的流体层上滑过时，速度慢的流体层将阻滞速度

快的流体层向前运动；反之，速度快的流体层又带动速度慢的流体层向前运动。这个实验说明，当运动流体的各层由于各自的速度不一样而发生相对运动时，在其相邻的两层流体的接触面上就会产生一对大小相等、方向相反的力来阻碍两流层之间的相对运动。因为这一对力是在运动流体的内部产生的，故称为内摩擦力或粘性阻力。现在我们可以给流体的粘性下这样的定义：当运动流体的各流体层之间发生相对运动时，在其相邻两层的接触面上就会产生内摩擦力来阻止这种相对运动，流体的这种特性称为粘性。流体的粘性愈小就愈容易流动。

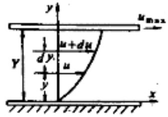

图 1-1　速度分布图

产生粘性的原因，对于液体来说主要是由分子之间的内聚力和附着力所引起的；对于气体来说主要是由流速不同的各流体层之间发生动量交换的结果。

二、牛顿内摩擦定律

流体内摩擦力的大小如何计算呢？科学家牛顿根据其大量的实验，在 1686 年得出了计算内摩擦力大小的定律——牛顿内摩擦定律，该定律也叫粘性定律。这样内摩擦力的大小就可以用粘性定律来描述：流速不同的各流体层之间的内摩擦力的大小，与沿板面法向的速度变化率（即速度梯度）成正比，与接触面积成正比，还要乘上一个与流体性质有关的系数。其定律的数学表达式为

$$T = \pm\ \mu A \frac{du}{dy} \tag{1-8}$$

或

$$\tau = \pm\ \mu \frac{du}{dy} \tag{1-9}$$

式中：T——内摩擦力；

τ——内摩擦切应力，τ 的作用方向如图 1-2 所示；

μ——动力粘性系数，或称为动力粘度；

du/dy——速度梯度，当各流体层速度分布呈直线规律时：

$du/dy = u_{max}/Y$；

A——接触面积；

"±"——是为了确保 T 或 τ 的正值而加上的。

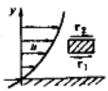

图 1-2　内摩擦切应力

从粘性定律可以看出：当流体静止时，因为 $du=0$，故 $\tau=0$，这说明流体是没有静摩擦力的，所以流体极易流动。这是流体与固体的重要区别之一。

大量的实验证明：大多数气体、水和许多润滑油类以及低碳氢化合物都能很好地遵循牛顿内摩擦定律，像上述这样的流体称为牛顿流体。当温度一定时，牛顿流体的动力粘性系数 μ 保持常数。此外还有许多流体不能遵循牛顿内摩擦定律，这类流体称为非牛顿流体。本教材主要介绍牛顿流体。

三、粘度

衡量粘性大小的物理量称为粘度。常用的粘度表示方法有三种：动力粘度、运动粘度和相对粘度。

动力粘度 μ，简称为粘度，它就是式（1-9）中的动力粘性系数。μ 值的测定方法是：当

速度梯度等于 $1\ \frac{1}{s}$ 时，测得接触面上的内摩擦切应力 τ 的大小就是动力粘度 μ 的值。

动力粘度的常用单位有 $N \cdot s/m^2$、$Pa \cdot s$ 两种。因为上述单位具有动力学量纲，故称为动力粘度。此外，在工程实际中，还常见两种以工程单位制表示的动力粘度单位：泊（P）与厘泊（cP）。上述单位之间的换算方法为

$$1N \cdot s/m^2 = 1Pa \cdot s = 10P = 1000cP$$

在流体力学的分析计算中，常出现动力粘度 μ 与密度 ρ 的比值，此比值称为运动粘度，并用 υ 表示，即

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} \tag{1-10}$$

运动粘度的常用单位有 m^2/s、斯（St）和厘斯（cSt）三种。因这些单位具有运动学的量纲，故称为运动粘度。应当指出斯和厘斯是工程单位制。上述三种单位之间的换算方法为

$$1m^2/s = 10^4 St = 10^6 cSt$$

我国常用以厘斯为单位的运动粘度 υ 来表示机油的粘度，如 10 号机油是指在 50℃时的运动粘度为 10cSt；20 号机油的 υ 值为 20cSt 等。所以机油的牌号大小实际上反映了该号机油的运动粘度的大小。

相对粘度用得最为广泛，这是因为动力粘度和运动粘度的数值要直接测出都比较困难的缘故。相对粘度是用间接的方法来测定流体的粘度。常用的相对粘度有恩氏粘度和赛氏粘度两种。

恩氏粘度用 $°E$ 表示，用恩格勒粘度计测得。其测定方法是把 200mL 的被测液体通过一根直径为 2.8mm 的细管所需的时间 t_1（s），与同量的 20℃的蒸馏水从同一细管中流出所需的时间 t_2（s）（t_2=51s，并称为仪器常数）之比，即

$$°E = t_1/t_2 \tag{1-11}$$

恩氏粘度是无因次的。当 $°E>2$ 时，它与运动粘度 υ 的换算关系为

$$\upsilon = 7.31°E - \frac{6.31}{°E} \tag{1-12}$$

赛氏粘度的测定方法是把 60mL 的被测液体通过内直径为 0.176cm、长为 1.225cm 的小管所需要的时间（s）就称为赛氏粘度，并用 ssu 表示。赛氏粘度与运动粘度的换算关系为

$$\upsilon = 0.22ssu - \frac{180}{ssu} \tag{1-13}$$

由式（1-12）和式（1-13）算得的运动粘度 U 的单位都是厘斯。

影响粘度 μ 值的因素有两个，即温度和压力，其中温度是主要的。温度对粘度的影响，对于液体和气体是不一样的。液体的粘度随着温度的升高而减小；而气体的粘度随着温度的升高而增大。其原因是液体分子之间的吸引力比气体要大得多。当温度升高时，液体分子的活动能力增强，相互间的吸引力减弱，故导致粘度减小。而气体分子之间的吸引力本来就很弱，当温度升高时，其布朗运动更加激烈，故导致粘度增大。所以机器所用的机油牌号在冬天和夏天是不一样的，其道理就在于此。水的动力粘度与温度的关系为

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + 0.0337t + 0.000\ 221t^2}(N \cdot s/m^2) \tag{1-14}$$

式中：μ_0——0℃时水的动力粘度，$\mu_0 = 1.792 \times 10^{-3} N \cdot s/m^2$；

t——水温（℃）。

μ——t℃时水的动力粘度，其单位与 μ_0 的单位相同。

在标准大气压下，水和空气的运动粘度随温度而变化的情况列于表 1-4 中。

压力对粘度的影响很小，因此一般认为气体的粘度与压力无关；对于液体的粘度，例如液压传动系统中的液压油的粘度，当其压力小于 50 个大气压时，压力对其粘度的影响可以忽略不计。

关于水和空气的运动粘度与温度之间的关系见表 1-4。

表 1-4　水和空气的粘度与温度的关系

温　度 t（℃）	0	5	10	15	20	25	30	35	40	50	60	80	100
水的运动粘度 $\nu\times10^{6}$ (m^2/s)	1.80	1.52	1.30	1.14	1.01	0.90	0.80	0.73	0.66	0.56	0.48	0.37	0.30
空气的运动粘度 $\nu\times10^{6}$ (m^2/s)	13.2	13.8	14.2	14.7	15.1	15.6	16.0	16.5	17.0	18.0	19.2	21.7	24.5

【例 1-3】 轴置于轴套中，如图 1-3 所示，以 90N 的力，从左端推轴向右移动。轴移动的速度为 0.122 m/s，轴的直径为 75mm，其他尺寸见图 1-3 所示。求轴与轴套间流体的动力粘度 μ。

【解】 设轴与轴套之间流体的速度按线性规律分布，则得

$$T=\mu A\frac{du}{dy}=\mu A\frac{u_{max}}{Y}$$

$$\mu=\frac{TY}{Au_{max}}$$

$$=\frac{90N\times75\times10^{-6}m}{\pi\times0.075m\times0.2m\times0.122m/s}$$

$$=1.174N\cdot s/m^2$$

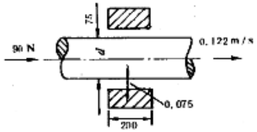

图 1-3

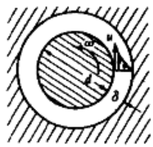

图 1-4

【例 1-4】 如图 1-4 所示，直径 $d=5cm$ 的轴在轴承中空载旋转，转速 $n=4000r/min$，轴与轴承同心，径向间隙 $\delta=0.005cm$，轴承长度 $L=7.6cm$，测得内摩擦力矩 $M=1.2N\cdot m$。求动力粘度 μ。

【解】 内摩擦力 $T=\frac{M}{d/2}=\frac{2\times1.2N\cdot m}{5\times10^{-2}m}=48$ (N)

轴的线速度　$u=\pi dn=\pi\times5\times10^{-2}m\times\frac{4000}{60s}=10.47m/s$

速度梯度　$\frac{du}{dy}=\frac{u}{\delta}=\frac{10.47m/s}{0.005\times10^{-2}m}=209\ 400s^{-1}$

接触面积　$A=\pi dl=\pi\times5\times10^{-2}m\times7.6\times10^{-2}m=0.01\ 194m^2$

所以动力粘度为 $\mu=\frac{T}{A\ du/dy}$

$$=\frac{48N}{0.01\ 194m^2\times209\ 400s^{-1}}$$

$$=0.0192\ N\cdot s/m^2$$

习 题 一

1-1. 若水的重度为 $9810N/m^3$，水银的比重为 13.55，求水的密度以及水银的密度和重度。

1-2. 已知某钻探用泥浆的比重为 1.25，求它的密度和重度。

1-3. 工程实际中如何定义不可压缩流体这一概念？

1-4. 用空气压缩机将 20℃的空气压缩到绝对压力为 7 个大气压，此时温度升高到 78℃，问空气的体积将减少多少？

1-5. 温度和压力对流体的粘度有何影响？

1-6. 由恩格勒粘度计测得石油的恩氏粘度为 $°E=5.6$，若石油的密度 $\rho=850kg/m^3$，求其动力粘度 μ。

1-7. 有两个同心的圆筒，其直径分别为 15cm 和 15.5cm，其高均为 20cm，两筒间盛满油液（其 $\mu=1.17Pa\cdot s$）。若外筒不动，内筒以 12r/min 的转速旋转，为克服油的粘性阻力，问需加在内筒的力矩是多少？

1-8. 如图 1-5 所示，浮在油面上的平板，其水平方向的运动速度为 1m/s，若 $\delta=10mm$，油的 $\mu=0.09\ 807N\cdot s/m^2$，求作用于平板单位面积上的阻力。

1-9. 如图 1-6 所示，一套筒长 $H=20cm$，内直径 $D=5.04cm$，重量 $G=6.8N$，套在直径 $d=5cm$ 的立轴上。当套筒与轴之间充以甘油（$\mu=8$ 泊）时，求套筒在自重作用下将以多大的速度沿直轴下滑？不计空气阻力。

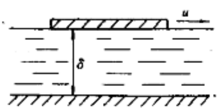

图 1-5

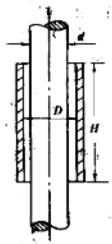

图 1-6

第二章　流体静力学

流体力学可以分为流体静力学、流体运动学和流体动力学三部分，其中流体静力学是研究流体的平衡规律及其在工程实际中的应用。本章以液体为例进行分析，但分析所得的结论同样适用于气体。

§2-1　作用在流体上的力

流体无论处于平衡状态，还是运动状态，它都受到外力的作用。作用于流体上的力，按其作用方式可以分为质量力和表面力两类。

一、质量力

质量力是指作用于流体内部每一个质点上的力，其大小与流体的质量成正比。常见的质量力有重力和惯性力。例如流体作匀加速直线运动时，其质量力有重力和惯性力；流体绕某轴作等速旋转时，其质量力有重力和离心惯性力。

质量力通常用单位质量流体承受的质量力来衡量其大小，即用单位质量力来表示。若作用在体积为 V、质量为 M 的流体上的质量力为 F，则 F_x、F_y、F_z 分别表示质量力在 x、y、z 三个坐标轴方向上的分力。若用 X、Y、Z 分别表示单位质量力在三个坐标轴方向的分力，则

$$\left.\begin{aligned} X &= F_x/M \\ Y &= F_y/M \\ Z &= F_z/M \end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$

根据牛顿第二定律，单位质量力的分力正好是合成加速度在三个坐标轴上的投影。例如重力的单位质量力就是重力加速度 g，显然它只有在 z 轴方向有投影长度。

二、表面力

表面力是指作用在所研究的那部分流体表面上的力，其大小与表面积成正比。它是由与流体相接触的其他物体（固体或流体）作用而产生的。表面力一般有两种：一种是与流体表面相垂直的法向力；另一种是与流体表面相切的切向力。例如流体静压力就是法向表面力，而流体的内摩擦力就是切向表面力。

§2-2　流体静压力及其特性

流体静压力也叫流体静压强，它是流体静力学中最重要、最常用的参数，必须深入地了解它的概念，掌握它的特性。

一、流体静压力

夏天当我们游泳时，当水深达到胸部时，我们呼吸就会感到不舒服。如果这时水是静止的，人站着也不动，那么这种水压迫胸的力就是流体静压力。

下面我们用数学分析的方法来阐明流体静压力这个重要概念。

在均质的静止流体中取一分离体，如图 2-1 所示，将该分离体用一平面切成两部分，去掉上边部分Ⅰ，研究下边部分Ⅱ。下边部分为了保持原有的平衡，必须在截面上加上上边部分Ⅰ对下边部分的作用力 P；设截面的面积为 A，则 P 与 A 之比称为平均静压力，即

$$p_{平均} = \frac{P}{A}$$

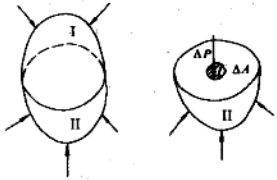

图 2-1 静压力示意图

若截面上各点的静压力不等，则在 D 点处取一小面积 ΔA，作用于 ΔA 上的作用力为 ΔP，则当所取面积 ΔA 趋向于零时，ΔP 与 ΔA 之比的极限值称为 D 点处的流体静压力，即

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \tag{2-2}$$

明确了流体静压力的概念之后，自然就会想到，流体静压力既然是个力，那么它就有一个大小、方向和作用点的问题。从现在起我们就由点到面地来研究这些问题。

二、流体静压力具有两个重要特性

特性Ⅰ 流体静压力的方向总是和作用的面相垂直，并指向该作用面，即沿作用面的内法线方向。

如图 2-2 所示，在静止流体中取一作用面 AB，上面的流体对 AB 面上各点有一个流体静压力的作用。若某点处静压力 p 的方向不与 AB 面垂直，那么 p 就可以分解为垂直于平面 AB 的法向分力 p_n 和平行于 AB 平面的切向分力 p_τ，若有切向分力 p_τ 存在，则必然会引起流体沿 AB 面流动，这显然与流体静止的前提不符，因此 p_τ 只能等于零，所以静压力 p 必定与 AB 面垂直。又由于流体分子间的引力较小，不能承受拉力，因此 p 的作用方向只能沿着作用面 AB

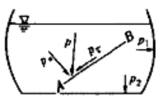

图 2-2 静压力的方向

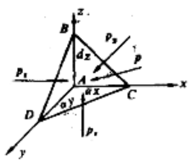

图 2-3 微元四面体

的内法线方向。

利用静压力特性 I，就可以作出图 2-2 中流体作用于容器内壁上两点的静压力 p_1 和 p_2 的作用方向了。

特性 II 静止流体内任意一点处的流体静压力的大小在各个方向上都是相等的。

为了证明这一特性，在静止流体中取出一个微小四面体 *ABCD*，其三个互相垂直的边长分别为 dx、dy 和 dz，如图 2-3 所示。由于四面体 *ABCD* 可以取得无限小，因此可以认为在其微小表面上的静压力是均布的。假设作用在 *ABD*、*ABC*、*ACD* 及 *BCD* 四个面上的静压力分别为 p_x、p_y、p_z 和 p，则在相应各面上作用的总静压力分别为

$$p_x \frac{1}{2} dy\, dz$$

$$p_y \frac{1}{2} dz\, dx$$

$$p_z \frac{1}{2} dx\, dy$$

$$p dA$$

式中：dA 为斜平面 *BCD* 的面积。

除静压力外，还有质量力作用在该微小四面体上，质量力 F 在三个坐标轴方向的分量分别为

$$F_x = \frac{1}{6} dxdydz \cdot \rho X$$

$$F_y = \frac{1}{6} dxdydz \cdot \rho Y$$

$$F_z = \frac{1}{6} dxdydz \cdot \rho Z$$

式中：$\frac{1}{6}dxdydz$ 为微小四面体的体积。

因为微小四面体在静止流体中处于平衡状态，所以诸力在各坐标轴上的投影之和等于零，即

$$\Sigma F_x = 0 \quad p_x \frac{1}{2} dxdy - pdA\cos < p,x > + \frac{1}{6} dxdydz\rho X = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad p_y \frac{1}{2} dzdx - pdA\cos < p,y > + \frac{1}{6} dxdydz\rho Y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad p_z \frac{1}{2} dxdy - pdA\cos < p,z > + \frac{1}{6} dxdydz\rho Z = 0$$

式中第一、二项是二阶无穷小，而第三项是三阶无穷小；所以第三项与前两项相比是高阶无穷小，故可以略去不计。于是上式可写为

$$p_x \frac{1}{2} dydz - pdA\cos < p,x > = 0$$

$$p_y \frac{1}{2} dzdx - pdA\cos < p,y > = 0$$

$$p_z \frac{1}{2} dxdy - pdA\cos < p,z > = 0$$

式中 $\cos<p,\ x>$ 是斜平面的法线与 x 轴向夹角的余弦，故 $dA\cos<p,\ x> = \frac{1}{2}dydz$；同理 $dA\cos<p,\ y> = \frac{1}{2}dzdx$；$dA\cos<p,\ z> = \frac{1}{2}dxdy$；所以上式又可写为

$$p_x \frac{1}{2}dydz - p\frac{1}{2}dydz = 0$$

$$p_y \frac{1}{2}dzdx - p\frac{1}{2}dzdx = 0$$

$$p_z \frac{1}{2}dxdy - p\frac{1}{2}dxdy = 0$$

当四面体以 A 点为极限时，则得 $p_x=p$，$p_y=p$，$p_z=p$；故得

$$p_x = p_y = p_z = p$$

由于斜平面 BCD 的方位是任意的，这就证明了在静止流体中，同一点 A 上各个方向的流体静压力值是相等的。当然不同的点上流体静压力的大小一般是不相等的。因为流体是连续介质，所以流体静压力 p 是空间位置坐标的单值函数，即

$$p = f(x,y,z)$$

由此可得静压力的全微分为

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

应当指出：上述两个特性不仅适用于静止流体内部，而且也适用于流体与固体相接触的表面。无论容器壁的方位和形状如何，作用于固体壁面上的流体静压力的方向总是垂直指向壁面。如图2-2中的 p_1 与 p_2 所示。

§2-3　流体平衡微分方程及其等压面

上一节我们指出了流体静压力的概念及其两个特性，现在我们着手来推导静压力的计算公式。

一、流体平衡的概念

凡是流体质点与质点之间以及流体质点与固体接触面之间都无相对运动的状况称为流体的平衡，也叫流体的静止。

流体的平衡可以分为绝对平衡与相对平衡两种。凡是流体质点及其所在的容器对地球来说都是不动的状况称为流体的绝对平衡，也叫绝对静止。例如，地上放了一桶水，若水不晃动，则这水处于绝对平衡状态。凡装有流体的容器对地球有运动，但流体质点之间以及流体质点与容器壁之间都无相对运动的状况称为流体的相对平衡，也叫相对静止。例如把一桶水放在小车上，小车作匀加速直线运动，此时的水就处于相对平衡状态。

二、流体平衡微分方程

在静止流体中取一微小六面体，其各棱边长分别为 dx、dy、dz，并且分别平行于坐标轴 x、y、z，如图2-4所示。

首先分析作用于该微小六面体上的力。先看表面力，因为是静止流体，所以其内摩擦力为零，因此其表面力只有静压力。设微小六面体中心点 A 上的静压力为 p，过 A 点作平行于 ox 坐标轴的平行线交两侧面于 m、n 两点。将 $p=f(x,y,z)$ 按泰勒公式展开，并舍去高阶无穷小，得 m 点的流体静压力为

$$p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

n 点的流体静压力为

$$p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

由于微小六面体的侧面面积很小，所以 m 点和 n 点上的静压力可分别看作两侧面上的平均静压力，因此两侧面上的表面力分别为

$$(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2})dydz$$

$$(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2})dydz$$

作用于微小六面体沿 x 轴向的总表面力为

$$P_x=(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2})dydz-(p+\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{dx}{2})dydz=-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

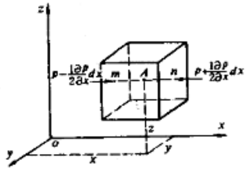

图2-4　平衡微小六面体

同理作用于微小六面体沿 y、z 轴向的总表面力分别为

$$P_y=-\frac{\partial p}{\partial y}dxdydz$$

$$P_z=-\frac{\partial p}{\partial z}dxdydz$$

再设作用于微小六面体上的单位质量力沿 x、y、z 坐标轴向的分力分别为 X、Y、Z，并用 ρ 表示该流体的密度，则作用于微小六面体上的质量力在相应的三个坐标轴向的分力分别为

$$X\rho dV=X\rho dxdydz$$

$$Y\rho dV=Y\rho dxdydz$$

$$Z\rho dV=Z\rho dxdydz$$

因为微小六面体处于平衡状态，所以作用于微小六面体上的表面力和质量力在同一坐标轴向的投影之和等于零。对于 x 轴向，由 $\Sigma F_x=0$ 得

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz+X\rho dxdydz=0$$

若以微小六面体的质量 $\rho dxdydz$ 除以上式各项，则得单位质量的平衡方程为

同理得

$$\left.\begin{aligned}X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0\\Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\tag{2-3}$$

方程组 (2-3) 就是流体的平衡微分方程。它是科学家欧拉在1755年首先提出来的，所以又称欧拉平衡微分方程。该微分方程可以解决流体静力学中的许多基本问题，它在流体静力学中占有很重要的地位。它既适用于绝对静止流体，也适用于相对静止流体；它不仅适用于不可压缩流体，也适用于可压缩流体。

将上述微分方程组的各式分别乘以 dx、dy 和 dz，然后三式相加，则得

$$\rho(Xdx+Ydy+Zdz)=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz$$

因为上式右边为静压力 p 的全微分，所以又可写为

$$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)\tag{2-4}$$

式（2-4）叫压力差公式，它实际上也是一个平衡微分方程，该公式对所有的平衡流体普遍适用。

三、等压面

在平衡流体中由静压力相等的点所组成的面称为等压面。等压面可能是平面，也可能是曲面。根据等压面的定义，在等压面上 p=常数，故 $dp=0$，即由平衡微分方程（2-4）得

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \tag{2-5}$$

上式称为等压面微分方程，它表明了在等压面上质量力所作的功为零；但该式中的质量力和移动的距离都不等于零，而要使它们的乘积等于零，所以只能是力的方向与移距互相垂直，即质量力垂直于等压面，这就是等压面的一个重要特性。根据这个特性，可以从已知质量力的方向，来确定等压面的形状；或已知等压面的形状，确定质量力的方向。例如，当质量力只有重力时，因为 $X=Y=0$，$Z=-g$，代入式（2-5）得

$$-gdz = 0$$

积分得

$$z = C$$

这说明，当质量力只有重力时，其等压面是水平面。又如液体与气体的分界面也是等压面。同一容器中装有两种互不相溶的液体时，它们的分界面也一定是等压面。

利用等压面可以方便地求解流体静力学问题。

§2-4 流体静力学基本方程

上一节介绍了流体的平衡微分方程，现将该方程进行有条件的积分，便得到本章最重要的方程——流体静力学基本方程。

一、静力学基本方程

在流体力学中，当流体所受的质量力只有重力时，该流体称为重力流体。例如绝对静止的流体以及作匀速直线运动的流体，都属于重力流体。

现取一处于绝对静止状态的液体，如图 2-5 所示。取坐标系如图 2-5，则单位质量力在各坐标轴上的投影为

$$X = 0, Y = 0, Z = -g$$

将上述质量力代入流体平衡微分方程式（2-4）中，则得

$$dp = -\rho g dz = -\gamma dz$$

移项得

$$dz + \frac{dp}{\gamma} = 0$$

对于不可压缩流体 ρ=常数，故对上式积分得

$$z + \frac{p}{\gamma} = C \tag{2-6}$$

式中：C——积分常数。

对于图 2-5 所示液体中的任意两点 1 和 2，若其位置坐标分别为 z_1 和 z_2，其静压力分别为 p_1 和 p_2，则由式（2-6）得