



教育部高职高专规划教材
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

建筑力学

(多学时)

下 册

陈永龙 编著

11-43

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS



732

732-1

教育部高职高专规划教材

建 筑 力 学

(多学时)

下 册

陈永龙 编著

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部高职高专规划教材,依据教育部《高职高专教育土建类专业力学课程教学基本要求》编写而成,是高职高专力学系列课程教学内容及课程体系改革的成果。全书力求体现高职高专教育培养高等技术应用性人才的特点,精选静力学、材料力学和结构力学的有关内容,使之融合贯通,内容精炼,重点突出,应用性强。

全书分上、下两册,共计十二章。上册共八章,包括绪论,力系的平衡,内力与内力图,静定结构的受力分析,轴向拉伸、压缩杆的强度计算,扭转杆的强度计算,弯曲杆的强度计算,组合变形杆的强度计算。下册共五章,包括结构的位移计算和刚度校核,超静定结构分析,移动荷载作用下静定梁的计算,压杆稳定,梁的极限荷载。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校土建类专业,道桥、市政等专业的教材,也可供相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

建筑力学(多学时)下册/陈永龙编著. —北京:高等教育出版社,2001

教育部高职高专规划教材

ISBN 7-04-008719-7

I. 建… II. 陈… III. 建筑力学-高等教育-教材

IV. TU311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 64949 号

建筑力学(多学时)下册

陈永龙 编著

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

电 话 010-64054588

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

邮政编码 100009

传 真 010-64014048

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 北京地质印刷厂

开 本 787×109² 1/16

印 张 11.25

字 数 260 000

版 次 2001 年 1 月第 1 版

印 次 2001 年 1 月第 1 次印刷

定 价 10.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第9章 结构的位移计算和刚度校核

§9-1 概 述

9-1-1 变形和位移

结构在荷载、温度变化、支座位移等作用时会发生变形。变形除了指结构中各杆件的变形外,还包括结构形状的改变。变形时,结构中各杆横截面的位置会有变动。结构的位移即指结构中杆件横截面位置的改变。而结构的变形可用结构上某些截面的位移来反映。

结构的位移分线位移和角位移两种。截面的移动称为线位移,在计算简图上用杆轴上的一点(截面形心)处的移动来表示。截面的转动称为角位移,在计算简图上用杆轴上一点处的切线方向的变化来表示。例如图9-1a所示简支梁,在荷载作用下发生变形如图9-1b所示,截面(形心) C 移动到 C' , CC' 即为截面(点) C 的线位移,记为 v_C 。同时截面 C 转动了一个角度,变形曲线在 C' 点的切线与水平线的夹角即为截面 C 的角位移,或称转角,记为 $\theta_{z,C}$ 。

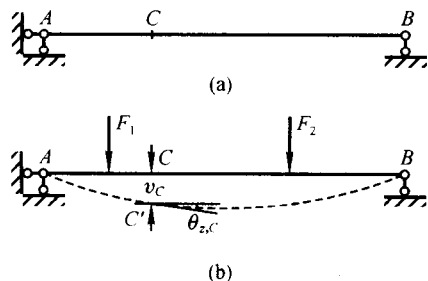


图 9-1

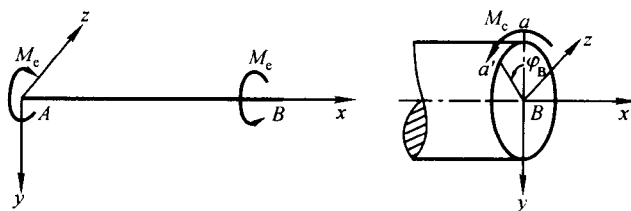


图 9-2

图9-2所示圆截面轴 AB ,受一对力偶 M_c 作用发生扭转变形,截面 B 没有线位移,角位移是绕 x 轴的扭转角 φ_B 。

一般情况下,杆件截面的线位移可用轴向位移 u 和侧向位移 v 、 w 三个分量来表示,角位移可用扭转角 φ 和转角 θ_y 、 θ_z 三个分量表示。讨论杆件变形时,线位移用上述 u 、 v 、 w 三个分量表示比较方便,但是在结构的位移计算中,通常采用水平位移分量和竖向位移分量来表示线位移。例如图9-3所示平面桁架, C 点的线位移 CC' 记为 Δ_C ,一般将它分解为竖向位移 Δ_{Cy} 和水平位移 Δ_{Cx} 。

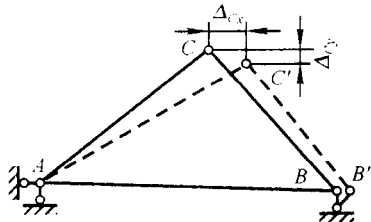


图 9-3

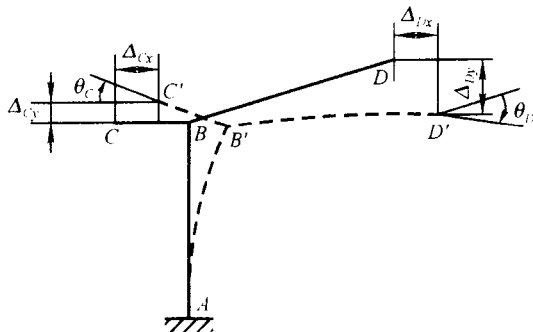


图 9-4

图 9-4 所示平面悬臂刚架在荷载作用下发生变形如虚线所示, D 点的线位移可用竖向位移 Δ_{Dy} (向下) 和水平位移 Δ_{Dx} (向右) 两个分量表示。 C 点的竖向位移为 Δ_{Cy} (向上), 水平位移为 Δ_{Cx} (向右)。 C 点的竖向位移向上, D 点的向下, 这两个方向相反的竖向位移之和称为 C 、 D 两点的相对竖向位移, 记为 Δ_{CDy} , 即 $\Delta_{CDy} = \Delta_{Cy} + \Delta_{Dy}$ 。 C 、 D 两点的水平位移都是向右, 方向相同, 此时它们的相对水平位移是二者之差, 即 $\Delta_{CDx} = \Delta_{Dx} - \Delta_{Cx}$ 。

同样, 截面 C 、 D 的角位移分别为 θ_C (反时针方向) 和 θ_D (顺时针方向), 这两个方向相反的角位移之和便是两截面的相对角位移, 记为 θ_{CD} , 即 $\theta_{CD} = \theta_C + \theta_D$ 。

通常将上述的线位移、角位移、相对位移及相对角位移统称为广义位移, 并记为 Δ 。

9-1-2 位移计算的目的

计算结构位移的一个目的是为了校核结构的刚度。结构如果强度能保证, 但没有足够的刚度, 在荷载作用下变形过大, 也是不能正常工作的。例如行车在安置于吊车梁上的轨道上运行时, 如果吊车梁的变形过大, 行车轨道不平顺, 就会引起较大的冲击和振动, 影响正常的运行。在工程上, 结构的刚度条件通常是用位移来衡量。校核结构的刚度, 一般就是检验结构中的某一位移是否超过规定的允许值, 以防止结构因产生过大的变形而影响其正常的使用。例如, 有关的规范规定, 上述吊车梁跨中的最大竖向位移不得超过梁跨度的 $1/500 \sim 1/600$ 。

位移计算的另外一个目的是为了分析超静定结构。在计算超静定结构的内力时, 除了平衡条件外还必须考虑结构的变形和位移条件。因此, 超静定结构的受力分析, 必定要涉及到结构的位移计算, 位移计算可以说是计算超静定结构的基础。

建筑力学中计算结构位移的一般方法是以虚功原理为基础的单位荷载法。本章将先简单介绍弹性变形体系的虚功原理, 然后着重讨论用单位荷载法计算静定结构的位移。在工程实践中, 有时也会遇到单根杆件的变形或位移计算, 如简支梁, 圆截面转轴等, 为了加深对杆件的变形与位移的理解, 在 § 9-2 中我们将对杆件基本变形时的位移微分方程及它们的积分作简单的介绍。

§ 9-2 杆件的变形与位移

平面杆件结构中的杆件有梁式杆和桁架杆(链杆)两类。梁式杆主要承受弯曲和剪切,桁架杆主要承受轴向拉伸或压缩。受扭杆件上作用的虽是空间力系,但它是杆件的基本变形形式之一。下面我们分别讨论杆件在轴向拉伸、压缩、扭转和平面弯曲时的变形与位移的计算。

9-2-1 轴向拉、压杆的变形和位移

杆件在轴向拉伸、压缩时,其横截面仍保持为平面,并只发生沿轴线的平行移动。所以,轴向拉伸、压缩杆中的各横截面,只有轴向位移,侧向位移和角位移都等于零,并且,同一横截面上各点的变形和位移都相同。如用 u 表示截面的轴向位移,由于 $\frac{du}{dx} = \epsilon_x$,则利用应力应变关系和应力计算公式可写出轴向位移沿杆轴的变化率

$$\frac{du}{dx} = \frac{F_N}{EA} \quad (a)$$

式中 F_N 是截面上的轴力,此式表示了杆件轴向拉伸、压缩变形的程度。

式(a)是轴向位移 u 的一阶微分方程,对它积分可得到轴向位移 u 的表达式

$$u = \int \frac{F_N}{EA} dx + C \quad (b)$$

式中 C 是积分常数,可由杆端的约束条件来决定。当刚度 EA 和轴力 F_N 均为常数时,则式(b)为

$$u = \frac{F_N x}{EA} + C \quad (c)$$

设杆段的长度为 l ,一端($x = x_0$)的轴向位移为 u_0 ,另一端($x = x_0 + l$)的轴向位移为 u_1 ,则两端截面的相对轴向位移 $\Delta u = u_1 - u_0$,即为该杆段的伸长或缩短,即

$$\Delta l = u_1 - u_0$$

将上述杆端位移条件代入式(c),可求得

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \quad (9-1)$$

工程上一般对结构中杆件的轴向变形不会提出刚度要求。

例 9-1 圆截面钢杆件 AB 如图 9-5a 所示,材料的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ 。试求杆的总伸长^①。

解: 作 AB 杆轴力图如图 9-5b 所示。

钢杆的截面积

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 \times (30 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{4} = 7.07 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

抗拉刚度

① 按照有关制图标准规定,本书各图中凡长度尺寸的单位为 mm 时,将不标其单位 mm。

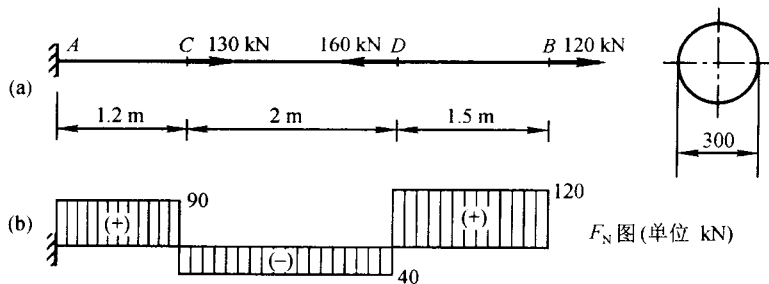


图 9-5

$$EA = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \times 7.07 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 1.41 \times 10^5 \text{ kN}$$

由于各杆段的轴力不相同,所以必须分段计算。杆的总伸长为

$$\begin{aligned} \Delta l &= \sum \frac{F_{Ni} l_i}{E_i A_i} \\ &= \frac{90 \text{ kN} \times 1.2 \text{ m}}{1.41 \times 10^5 \text{ kN}} - \frac{40 \text{ kN} \times 2 \text{ m}}{1.41 \times 10^5 \text{ kN}} + \frac{120 \text{ kN} \times 1.5 \text{ m}}{1.41 \times 10^5 \text{ kN}} \\ &= (0.77 - 0.57 + 1.28) \times 10^{-3} \text{ m} = 1.48 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

例 9-2 如图 9-6a 所示等截面柱,横截面面积为 A ,材料的体积质量为 ρ ,弹性模量为 E 。试求在自重和荷载 F 作用下柱的压缩变形。

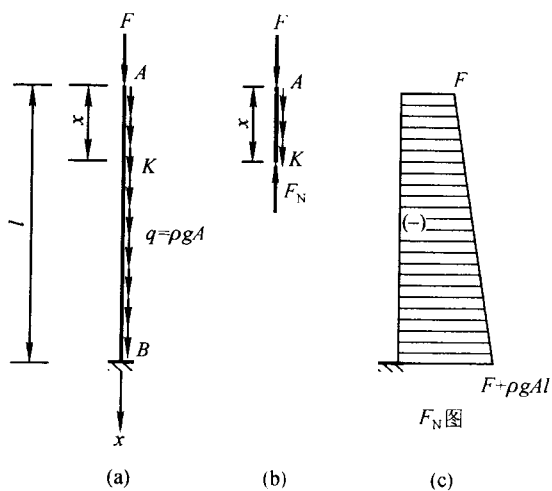


图 9-6

解: 设 x 轴如图 9-6a 所示,原点设在柱顶 A 点,向下为正。取隔离体 AK 如图 9-6b 所示,由平衡条件 $\sum F_x = 0$,可求得 K 截面上的轴力

$$F_N = -(F + \rho g A x)$$

此为轴力方程,据此作轴力图如图 9-6c 所示。将上式代入式(b),得柱的位移表达式

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{F_N}{EA} dx + C = - \int \frac{F + \frac{\rho g A x}{2}}{EA} dx + C \\ &= - \frac{x}{EA} \left(F + \frac{\rho g A x}{2} \right) + C \end{aligned} \quad (d)$$

根据 B 截面($x=l$)处, $u_B=0$ 的条件,可求出积分常数

$$C = \frac{l}{EA} \left(F + \frac{\rho g A l}{2} \right)$$

代入(d)式得位移方程

$$u = \frac{F}{EA} (l - x) + \frac{\rho g}{2E} (l^2 - x^2) \quad (e)$$

把 $x=0$ 代入(e)式,求得 A 截面的位移为

$$u_A = \frac{Fl}{EA} + \frac{\rho g l^2}{2E}$$

所以,柱的压缩变形为

$$\Delta l = u_B - u_A = - \left(\frac{Fl}{EA} + \frac{\rho g l^2}{2E} \right)$$

9-2-2 圆截面扭转杆的变形及刚度条件

圆截面杆扭转时,各横截面只发生绕杆轴(x 轴)的转动,角位移即为扭转角 φ (图 9-7a)。在圆杆中取微段 dx 如图 9-7b 所示,左、右两端截面的扭转角分别是 φ 和 $\varphi + d\varphi$, $d\varphi$ 是微段两端截面的相对扭转角。

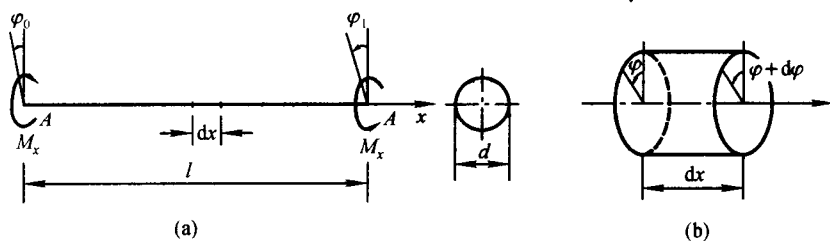


图 9-7

根据式(6-8)单位长度上的相对扭转角为

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_p} \quad (9-2a)$$

设圆截面杆段长为 l , 杆段两端截面的扭转角分别为 φ_0 和 φ_1 (图 9-7a), 则该两截面的相对扭转角为

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$$

若圆杆的抗扭刚度 GI_p 和各截面上作用的扭矩 M_x 均是常数, 则圆杆沿杆长将均匀扭转, 此时扭转角的平均变化率 $\Delta\varphi/l$ 等于扭转角的变化率, 即

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\Delta\varphi}{l}$$

将上式与式(9-2a)比较,可得

$$\Delta\varphi = \frac{M_x l}{GI_p} \quad (9-2b)$$

此为相对扭转角的计算公式。扭转杆的刚度校核是将杆件单位长度上的相对扭转角 $d\varphi/dx$ (工程上用 θ 表示,即 $\theta = d\varphi/dx$) 限制在允许的范围内,即

$$\frac{d\varphi}{dx} \leq [\theta] \quad (9-3)$$

式中 $[\theta]$ 为单位长度许用相对扭转角,它的单位是 $(^\circ)/m$ 。但根据式(9-2a)求得的 $d\varphi/dx$,其单位是 rad/m ,这点在计算时要特别注意。

例 9-3 圆截面传动轴如图 9-8a 所示,材料的剪切弹性模量 $G = 8.04 \times 10^4 \text{ MPa}$ 。试求 A、D 两截面的相对扭转角。

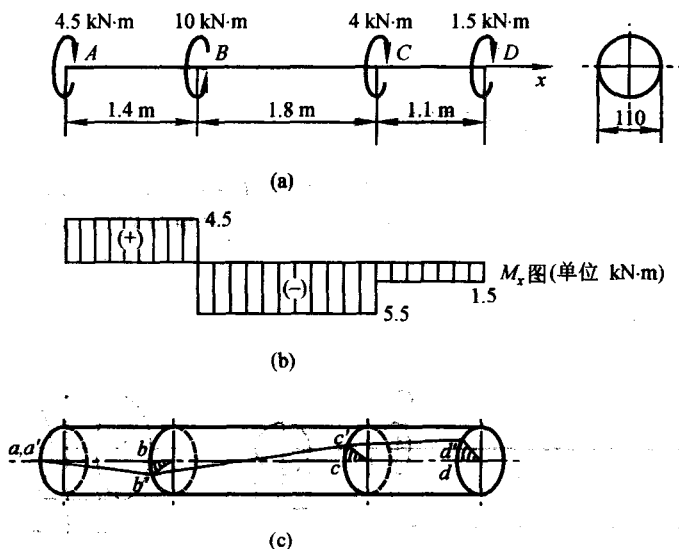


图 9-8

解: 根据所受外扭矩,可作扭矩图如图 9-8b 所示。

圆轴横截面的极惯性矩为

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3.14 \times (0.11 \text{ m})^4}{32} = 1.44 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

抗扭刚度为

$$GI_p = 8.04 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \times 1.44 \times 10^{-5} \text{ m}^4 = 1.16 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

A、D 两截面的相对扭转角为

$$\Delta\varphi_{AD} = \sum \frac{M_x l_i}{GI_p}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4.5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 1.4 \text{ m}}{1.16 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} + \frac{-5.5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 1.8 \text{ m}}{1.16 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} + \\
&\quad \frac{-1.5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 1.1 \text{ m}}{1.16 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} \\
&= (5.43 - 8.53 - 1.42) \times 10^{-3} \text{ rad} = -4.52 \times 10^{-3} \text{ rad} \\
&= -0.259^\circ
\end{aligned}$$

若在圆轴表面任取一母线 $abcd$, 扭转后成为螺旋线 $a'b'c'd'$ (图 9-8c), 它形象地反映了圆轴各段的扭转变形情况。

例 9-4 汽车传动轴由无缝钢管制成, 外径 $D = 90 \text{ mm}$, 内径 $d = 84 \text{ mm}$, 材料的剪切弹性模量 $G = 8.04 \times 10^4 \text{ MPa}$, 单位长度许用相对扭转角 $[\theta] = 1.5(^{\circ})/\text{m}$ 。试求该轴所能承受的许用扭矩。

解: 空心圆轴截面的极惯性矩为

$$\begin{aligned}
I_p &= \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \\
&= \frac{3.14}{32} [(0.090 \text{ m})^4 - (0.084 \text{ m})^4] = 1.55 \times 10^{-6} \text{ m}^4
\end{aligned}$$

单位长度许用相对扭转角为

$$[\theta] = 1.5(^{\circ})/\text{m} = \frac{1.5\pi}{180} \text{ rad/m} = 0.0262 \text{ rad/m}$$

根据刚度条件

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_p} \leq [\theta]$$

则许用扭矩为

$$\begin{aligned}
[M_x] &= GI_p [\theta] \\
&= 8.04 \times 10^7 \text{ kN/m}^2 \times 1.55 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \times 0.0262 \text{ rad/m} = 3.26 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}
\end{aligned}$$

9-2-3 平面弯曲杆的位移及刚度条件

杆件 AB 在荷载作用下发生平面弯曲, 其轴线在纵向对称平面 (Oxy 平面) 内弯成一条光滑的平面曲线, 此为变形曲线 (图 9-9)。表示杆件弯曲变形程度的变形曲线的曲率为

$$\kappa = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (f)$$

在第 7 章中已经讨论, 在小变形情况下, 变形曲线的曲率等于侧向位移 v 对 x 的二阶导数, 即

$$\kappa = \frac{dv^2}{dx^2}$$

将此式代入式 (f), 即得

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (9-4)$$

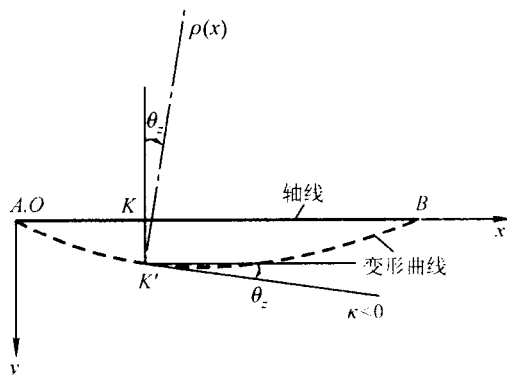


图 9-9

式(9-4)是杆件平面弯曲时变形曲线的基本方程,工程上通常称为梁的挠曲线微分方程或挠度方程。

基本方程(9-4)是侧向位移 v 的二阶微分方程,对此方程式积分时将出现两个积分常数,这可由杆件的已知位移边界条件来确定。图 9-10 给出了几种常用支座的位移边界条件。

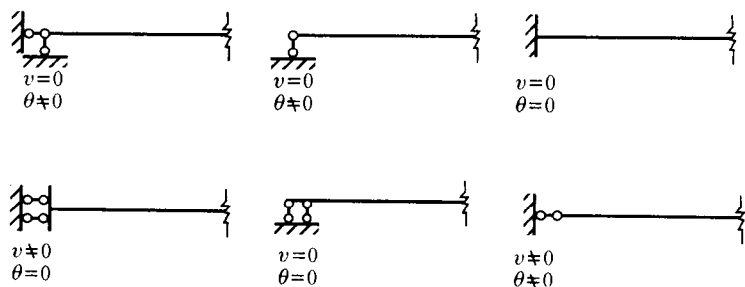


图 9-10

下面举例说明方程(9-4)的应用。

例 9-5 试求图 9-11a 所示悬臂梁自由端 B 截面的转角和挠度。 $EI_z = \text{常数}$ 。

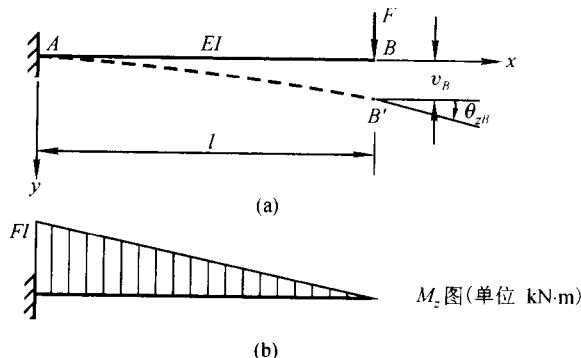


图 9-11

解: 取坐标系如图所示。作 M_z 图如图 9-11b 所示,弯矩方程为

$$M_z = -F(l-x) \quad (g)$$

代入式(9-4),得挠度方程

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} = \frac{F(l-x)}{EI_z} \quad (h)$$

积分一次,得

$$\theta_z = \frac{dv}{dx} = \frac{F}{EI_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \quad (i)$$

再积分一次,得

$$v = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2 \quad (j)$$

由固定端截面 A 的位移边界条件,即 $x=0$ 时

$$\theta_{z,A} = 0$$

$$v_A = 0$$

可确定积分常数

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

分别代入式(i)和(j),得梁的转角方程

$$\theta_z = \frac{F}{EI_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

挠度方程

$$v = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

将 $x=l$ 分别代入此两式,即得自由端 B 截面的转角

$$\theta_{z,B} = \frac{Fl^2}{2EI_z} \quad (\circ)$$

挠度

$$v_B = \frac{Fl^3}{3EI_z} \quad (\downarrow)$$

求得的 $\theta_{z,B}$ 是正值,表明 B 截面是顺时针转动; v_B 是正值,表明沿 y 的正方向。

例 9-6 试求图 9-12a 所示简支梁两端截面 A、B 的转角和跨中截面 C 的挠度。 $EI_z =$ 常数。

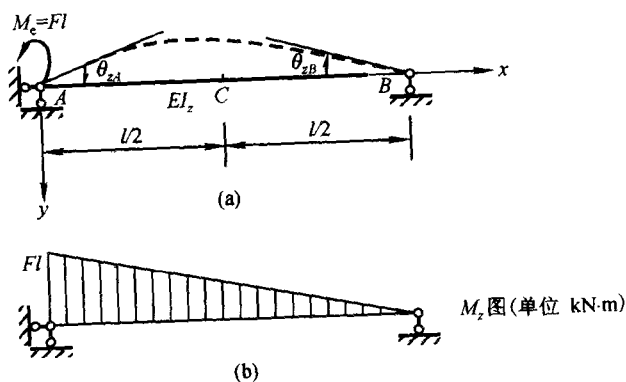


图 9-12

解: 根据平衡条件求得梁的支座反力为

$$F_{Ay} = F$$

$$F_{By} = -F$$

作 M_z 图如图 9-12b 所示。取坐标系如图 9-12a 所示,则弯矩方程、挠度方程及其积分表达式与例 9-5 中的悬臂梁完全相同,但积分常数 C_1 和 C_2 需由梁 A、B 两端的位移边界条件确定。

根据简支梁两端的位移条件, $x=0$ 时

$$v_A = 0$$

和 $x=l$ 时

$$v_B = 0$$

将其代入式(j),可求得积分常数

$$C_1 = -\frac{Fl^2}{3EI_z}$$

$$C_2 = 0$$

将此两积分常数分别代入式(i)和式(j),即得梁的转角方程为

$$\theta_z = \frac{F}{EI_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{3} \right) \quad (k)$$

挠度方程为

$$v = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{l^2x}{3} \right) \quad (l)$$

将 $x=0$ 和 $x=l$ 分别代入式(k),得截面 A 的转角

$$\theta_{z,A} = -\frac{Fl^2}{3EI_z} \quad (\cap)$$

截面 B 的转角

$$\theta_{z,B} = \frac{Fl^2}{6EI_z} \quad (\cap)$$

将 $x = \frac{l}{2}$ 代入式(l),得跨中截面 C 的挠度

$$v_C = -\frac{Fl^3}{16EI_z} \quad (\uparrow)$$

讨论: 本例简支梁与例 9-5 悬臂梁的受力情况完全相同,所以它们的挠度方程相同,表明二者变形的程度一样。但是,由于两根梁的支座情况不同,它们的位移是不一样的。

*** 例 9-7** 伸臂梁如图 9-13a 所示,试求自由端 B 截面的转角和挠度。 $EI_z = \text{常数}$ 。

解: 作弯矩图如图 9-13b 所示。通过与图 9-11b 和图 9-12b 所示的两弯矩图的比较,发现梁 AB 可分为 AC、CB 两段梁分别进行分析(图 9-11c、d),AC 梁与例 9-6 中简支梁仅仅是外力偶 $M_e = Fl$ 的作用位置不同,例 9-6 中作用在左端,AC 梁则在右端。CB 梁与例 9-5 中悬臂梁的不同之处则是在固定端 C 发生了转动,但二者的受力状况及变形情况是完全一样的。如果取坐标系如图 9-13c、d 所示,则 CB 梁的弯矩方程和挠度方程仍为式(g)和(h),其积分表达式即转角和挠度为式(i)和式(j)

$$\theta_z = \frac{F}{EI_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

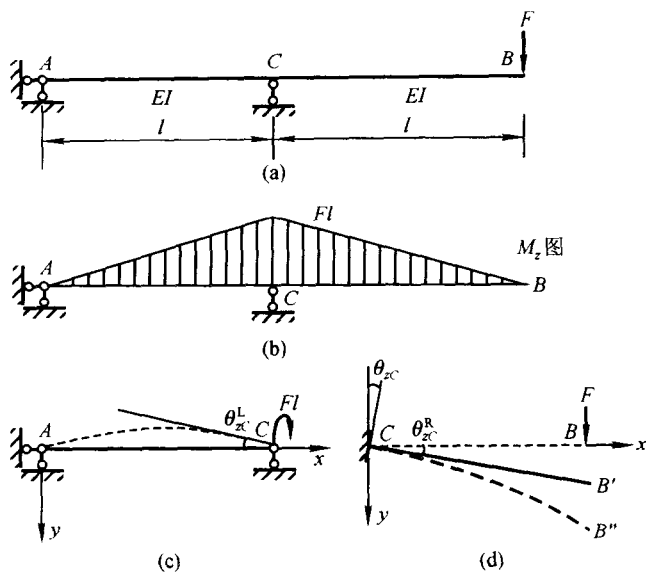


图 9-13

$$v = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2$$

式中 C_1 、 C_2 是积分常数。

梁 AC 和 CB 本来就是一根梁,两根梁在 C 截面处必须满足变形连续条件,即两根梁在该处的左、右截面的转角和挠度必须分别相等,即

$$\begin{aligned} \theta_{xc}^L &= \theta_{xc}^R \\ v_C^L &= v_C^R \end{aligned} \quad (m)$$

θ_{xc}^L 、 v_C^L 分别是支座 C 左侧截面 (AC 梁段上) 的转角和挠度, θ_{xc}^R 、 v_C^R 分别是支座 C 右侧截面 (CB 梁段上) 的转角和挠度。

根据例 9-6 的结果,可知梁段 AC 右端截面 C 的转角为

$$\theta_{xc}^L = \frac{Fl^2}{3EI_z} \quad (\circ)$$

挠度为

$$v_C^L = 0$$

CB 梁段 C 端截面的转角和挠度根据变形连续条件式 (m), 分别为

$$\theta_{xc}^R = \theta_{xc}^L = \frac{Fl^2}{3EI_z}$$

和

$$v_C^R = v_C^L = 0$$

由此可求得积分常数

$$C_1 = \frac{Fl^2}{3EI_z}$$

$$C_2 = 0$$

代入 θ_z 、 v 表达式, 即得 CB 段梁的转角方程为

$$\theta_z = \frac{F}{EI_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} + \frac{l^2}{3} \right)$$

挠度方程为

$$v = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{l^2x}{3} \right)$$

将 $x = l$ 分别代入, 即可求得自由端 B 截面的转角为

$$\theta_{z,B} = \frac{5Fl^2}{6EI_z} \quad (\circ)$$

挠度为

$$v_B = \frac{2Fl^3}{3EI_z} \quad (\downarrow)$$

从以上讨论可知, 当刚度 EI 为常数时, 平面弯曲杆的侧向位移和角位移不仅决定于杆件内的弯矩分布, 而且还与它的支承条件有关。本例中梁段 CB 与例 9-5 和例 9-6 中梁(段) AB 承受的弯矩相同, 变形曲线的曲率也相等, 表明三根梁(段)的弯曲变形情况完全一样, 并且都是凸向上侧(即弯矩图的一侧), 但是, 由于支承条件不同, 梁中截面的位移是不相同的。

受弯杆件的刚度校核, 就是将杆件中的最大侧向位移或最大角位移限制在一定的范围内, 即满足

$$v_{\max} \leq [v] \quad (9-5a)$$

或

$$\theta_{z,\max} \leq [\theta_z] \quad (9-5b)$$

式中 $[v]$ 和 $[\theta_z]$ 分别为许用侧向位移和许用角位移, 式(9-5a)和(9-5b)称为受弯杆件的刚度条件。

实际结构的位移计算需要求的只是结构中某些杆件个别指定截面处的位移, 上面讨论的方法须先积分挠度方程式(9-4), 分别求出杆件上各截面的侧向位移和角位移的函数表达式, 然后再根据这些表达式再来求指定截面的侧向位移或角位移, 工作量相当大。并且, 在实际结构中, 杆件上常有集中力、集中力偶以及不连续分布荷载等的作用, 弯矩方程就不能用一个连续函数式来表达, 而要用几个式子分段来表示, 此时挠度方程(9-4)也必须分段列出并积分, 运算会相当繁琐。因此, 在实际的位移计算中大多是采用下节介绍的单位荷载法, 该方法不用求出位移的函数表达式, 而是直接计算要求的某些指定截面的指定位移, 并且, 不仅能求线位移和角位移, 还能求相对位移, 概念清楚, 计算方便。所以, 本教材对积分法的具体计算不作过多的讨论, 下一节开始着重介绍单位荷载法。

§ 9-3 虚功原理和单位荷载法

9-3-1 实功和虚功

简支梁 AB 在一作用于 1 点的集中荷载 F_1 作用下达平衡,其变形曲线如图 9-14a 中的虚线所示。荷载 F_1 是静力加载,即从零开始逐渐增加到 F_1 。对于线性变形体材料,产生的位移与荷载成线性关系,所以梁中各点的位移也从零开始按比例增大。集中荷载 F_1 作用点 1 的竖向线位移,称为 F_1 的相应位移,记为 Δ_{11} 。第一个下标表示位移的性质,1 表示此位移是与 F_1 相对应的位移,即作用点 1 处的竖向线位移;第二个表示位移产生的原因,表示此位移是荷载 F_1 引起的。

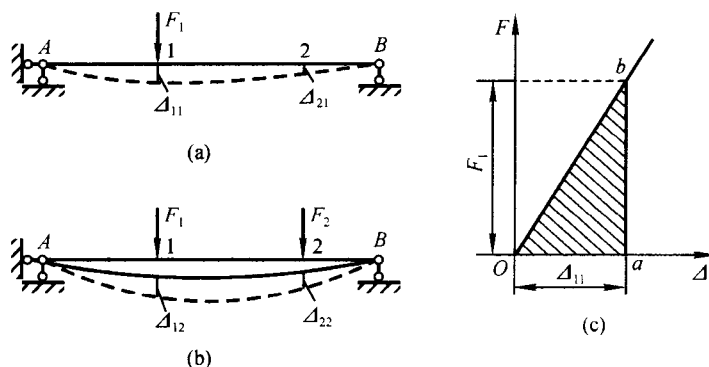


图 9-14

荷载 F_1 在上述加载过程中所作的功为

$$W_{11} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11}$$

这相当于 $F-\Delta$ 图(图 9-14c)中三角形 Oab 的面积。功 W_{ij} 有两个下标,第一个下标表示作功的力,第二个下标表示位移的产生原因。位移 Δ_{11} 是由荷载 F_1 引起的, W_{11} 是荷载 F_1 在其自身引起的位移 Δ_{11} 上所作的功。这类力在其自身引起的位移上所作的功称为实功,应注意实功算式前有 $\frac{1}{2}$ 。

如果在上述弯曲后的 AB 梁的点 2 处再作用一集中荷载 F_2 ,梁 AB 在发生微小变形后又达到新的平衡状态,变形曲线成为图 9-14b 中所示的虚线。在加荷载 F_2 的过程中, F_1 的大小和方向均保持不变,所以荷载 F_1 在其相应的位移 Δ_{12} 上所作的功为常力做功,为

$$\delta W_{12} = F_1 \Delta_{12}$$

位移 Δ_{12} 是荷载 F_2 所引起,与荷载 F_1 没有任何关系。 δW_{12} 是荷载 F_1 在由 F_2 引起的相应位移 Δ_{12} 上所作的功。这种力在与其自身无关的相应位移上所作的功称为虚功,记为 δW 。应强调的

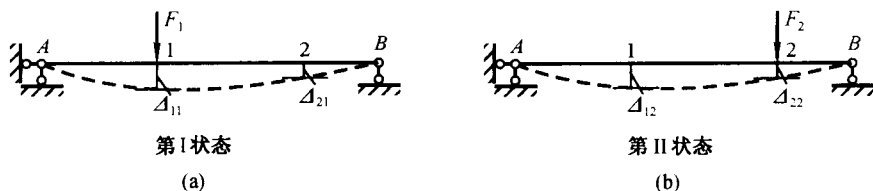


图 9-15

是,虚功算式前没有 $\frac{1}{2}$ 。

实功的力与位移彼此不独立,相互之间存在着一定的关系。虚功的力和位移彼此是独立无关的。为便于分析,把图 9-14b 所示的状态分解成两种状态。一种是简支梁 AB 在 F_1 单独作用时的状态(图 9-15a),另一种是 F_2 单独作用时的状态(图 9-15b),这两种状态彼此独立。对虚功 δW_{12} 来说,是图 9-15a 中的力 F_1 ,在图 9-15b 中的位移 Δ_{12} 上所作的功,其中 F_1 所在的图 9-15a 状态称为力状态(或第 I 状态),位移所属的图 9-15b 状态称为位移状态(或第 II 状态)。所以虚功中的力和位移可看成是分别属于同一体系的两种彼此独立的状态。所谓力状态和位移状态,必须根据所讨论的虚功来确定。例如,对虚功 $\delta W_{12} = F_1 \Delta_{12}$ 来说,图 9-15a 所示的状态是力状态,图 9-15b 是位移状态。但对虚功 $\delta W_{21} = F_2 \Delta_{21}$ 来说,图 9-15b 所示的状态则是力状态,而图 9-15a 是位移状态。

在讨论虚功时,作功的力可以是一集中力或集中力偶,也可以是一对集中力或一对集中力偶,甚至是某一力系(图 9-16),统称为广义力。与之相应的位移则分别是线位移或角位移、相对线位移或相对角位移,某一组位移,统称为广义位移。

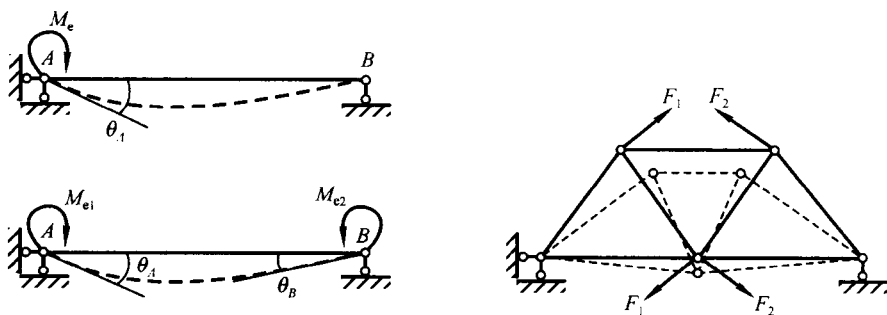


图 9-16

9-3-2 虚功原理

设结构的力状态如图 9-17a 所示,在荷载和支座反力作用下处于平衡,此时结构各杆将产生内力。图 9-17b 所示是结构由于某种原因引起的任意一个位移状态,各杆件发生了变形,支座也可以有移动。力状态中的外力(包括作用的荷载和支座反力)在位移状态的相应位移上所作的虚功称为外力虚功。由于位移状态中各杆件发生了变形,则力状态中各杆件的内力在位移状