

高等学校试用教材

机械优化设计

哈尔滨工业大学 孙靖民 主编



机械工业出版社

前 言

本书是根据1987年11月全国高等工业学校机械设计及制造专业教学指导委员会所制定的教学计划与教学大纲，以及该委员会在1988年3月所审定的编写大纲编写的。

机械优化设计是机械设计类专业的一门必修课程，其目的是使学生树立优化设计的思想，掌握优化设计的基本概念和基本方法，获得解决机械优化设计问题的初步能力。本书可作为高等工业院校机械设计类专业的本科生、研究生教材，也可供有关专业的学生、教师及工程技术人员阅读。

全书分为三大部分：第一部分是优化设计的基本概念及数学基础；第二部分是具体的优化设计方法，包括一维搜索方法、无约束优化方法、线性规划、约束优化方法；第三部分是机械优化设计实例并附有上机实习源程序。本书内容的选择贯彻“少而精”和“理论联系实际”的原则。内容的编排由浅入深，注意逻辑性与系统性，强调物理概念及几何解释，便于工程应用。

本书由哈尔滨工业大学孙靖民教授主编，哈尔滨船舶工程学院米成秋副教授，合肥工业大学柯尊忠副教授参加编写。其中绪论、第一、五章由孙靖民编写，第二、三、四章由米成秋编写，第六、七章由柯尊忠编写，附录部分由合肥工业大学袁华讲师提供。

主审本书的是哈尔滨科技大学王永乐教授，参加审稿的有哈尔滨科技大学杨兰生副教授，吉林工业大学赵清副教授、郭维勤副教授，哈尔滨船舶工程学院龙啸副教授，哈尔滨电工学院程万奎副教授。限于编者水平，书中缺点、错误在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，以便进一步提高教材质量。

编者

1989年2月于哈尔滨

目 录

绪论	1
第一章 优化设计概述	4
§ 1-1 人字架的优化设计	4
§ 1-2 机械优化设计问题示例	7
§ 1-3 优化设计问题的数学模型	15
§ 1-4 优化设计问题的基本解法	18
第二章 优化设计的数学基础	21
§ 2-1 多元函数的方向导数与梯度	21
§ 2-2 多元函数的泰勒展开	25
§ 2-3 无约束优化问题的极值条件	27
§ 2-4 凸集、凸函数与凸规划	29
§ 2-5 等式约束优化问题的极值条件	32
§ 2-6 不等式约束优化问题的极值条件	35
第三章 一维搜索方法	43
§ 3-1 概述	43
§ 3-2 搜索区间的确定与区间消去法原理	43
§ 3-3 一维搜索的试探方法	46
§ 3-4 一维搜索的插值方法	48
第四章 无约束优化方法	54
§ 4-1 概述	54
§ 4-2 最速下降法	55
§ 4-3 牛顿型方法	59
§ 4-4 共轭方向及共轭方向法	61
§ 4-5 共轭梯度法	65
§ 4-6 变尺度法	69
§ 4-7 坐标轮换法	76
§ 4-8 鲍威尔方法	78
§ 4-9 单形替换法	84
第五章 线性规划	89
§ 5-1 线性规划的标准形式与基本性质	89
§ 5-2 基本可行解的转换	92
§ 5-3 单纯形方法	96
§ 5-4 单纯形法应用举例	98
第六章 约束优化方法	104
§ 6-1 概述	104
§ 6-2 随机方向法	106
§ 6-3 复合形法	111

§ 6-4 可行方向法	115
§ 6-5 惩罚函数法	124
§ 6-6 增广乘子法	131
§ 6-7 非线性规划问题的线性化解法——线性逼近法	138
第七章 机械优化设计实例	142
§ 7-1 应用技巧	142
§ 7-2 机床主轴结构优化设计	147
§ 7-3 圆柱齿轮减速器的优化设计	150
§ 7-4 平面连杆机构的优化设计	157
附录 常用优化方法程序及计算机实习指导	162
一、常用优化方法程序的使用说明	162
1. 随机方向法	162
2. 复合形法	163
3. 惩罚函数法	165
二、常用优化方法程序考核题	168
三、计算机实习建议	169
四、常用优化方法源程序	170
参考文献	186

绪 论

优化设计是60年代初发展起来的一门新学科，它是将最优化原理和计算技术应用于设计领域，为工程设计提供一种重要的科学设计方法。利用这种新的设计方法，人们就可以从众多的设计方案中找出最佳设计方案，从而大大提高设计效率和质量。因此优化设计是现代设计理论和方法的一个重要领域，它已广泛应用于各个工业部门。我们在绪论中仅对机械优化设计的特点、发展概况、本课程的主要内容作一简要介绍。

一、从传统设计到优化设计

一项机械产品的设计，一般需要经过调查分析、方案拟定、技术设计、零件工作图绘制等环节。传统设计方法通常在调查分析的基础上，参照同类产品通过估算、经验类比或试验来确定初始设计方案。然后，根据初始设计方案的设计参数进行强度、刚度、稳定性等性能分析计算，检查各性能是否满足设计指标要求。如果不完全满足性能指标的要求，设计人员将凭借经验或直观判断对参数进行修改。这样反复进行分析计算—性能检验—参数修改，直到性能完全满足设计指标的要求为止。整个传统设计过程就是人工试凑和定性分析比较的过程，主要的工作是性能的重复分析，至于每次参数的修改，仅仅凭借经验或直观判断，并不是根据某种理论精确计算出来的。实践证明，按照传统设计方法作出的设计方案，大部分都有改进提高的余地，而不是最佳设计方案。

传统设计方法只是被动地重复分析产品的性能，而不是主动地设计产品的参数。从这个意义上讲它没有真正体现“设计”的含义。其实“设计”一词本身就包含优化的概念。作为一项设计不仅要求方案可行、合理，而且应该是某些指标达到最优的理想方案。设计中的优化思想在古代就有所体现。例如，我国宋代建筑师李诫在其著作“营造法式”一书中曾指出：圆木做成矩形截面梁的高宽比应为三比二。这一结论和抗弯梁理论推得的结果十分接近。根据梁弯曲理论，最佳截面尺寸应使梁截面抗弯模量 W 最大。设截面宽为 b 、高为 h ，则要求 $W = \frac{bh^2}{6} \rightarrow \max$ 。若圆木直径为 d ，有 $d^2 = b^2 + h^2$ ， $W = \frac{b}{6}(d^2 - b^2)$ ， $\frac{dW}{db} = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2) = 0$ 。

当 $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ 时， W 取极大值 $\left(\frac{d^2W}{d^2b} = -b < 0\right)$ ，而 $h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$ ，则有 $h/b = \sqrt{2} \approx 1.414$ 。

这与 $h/b = 3/2 = 1.5$ 很相近。象这样简单的优化问题可用古典的微分方法很容易求解。但对于一般工程优化问题的求解，需要采用数学规划理论并借助于电子计算机才能完成。基于这一原因，“设计”中优化的概念一直未能得以很好的体现。直至60年代，电子计算机和计算技术迅速发展，优化设计才有条件日益发展起来。

近20年来，随着电子计算机的应用，在机械设计领域内，已经可以用现代化的设计方法和手段进行设计，来满足对机械产品提出的要求。

现代化的设计工作已不再是过去那种凭借经验或直观判断来确定结构方案，也不是象过去“安全寿命可行设计”方法那样，在满足所提出的要求的前提下，先确定结构方案，再根据安全寿命等准则，对该方案进行强度、刚度等的分析、校核，然后进行修改，以确定结构

尺寸。而是借助电子计算机,应用一些精确度较高的力学的数值分析方法(如有限元法等)进行分析计算,并从大量的可行设计方案中寻找出一种最优的设计方案,从而实现用理论设计代替经验设计,用精确计算代替近似计算,用优化设计代替一般的安全寿命可行设计。

优化方法在机械设计中的应用,既可以使方案在规定的设计要求下达到某些优化的结果,又不必耗费过多的计算工作量。因此,产品结构、生产工艺等的优化已经成为市场竞争的一种手段。例如,据资料介绍,利用一个化工优化系统(CHEOPS)的计算机手段,对一个化工厂进行设计。根据所给数据,在16 h内,进行16000个可行设计的选择,从中选出一个成本最低、产量最大的方案,并给出必需的精确数据。而在这之前,求解这个问题,曾用一组工程师工作了一年,但仅作了三个设计方案,而它们的效率却没有一个可以和上述优化方案相比。又例如,美国贝尔(Bell)飞机公司采用优化方法解决450个设计变量的大型结构优化问题。在对一个机翼进行重设计中,减轻重量达35%。波音(Boeing)公司也有类似的情况,在747机身的设计中,收到了减轻重量、缩短生产周期、降低成本的效果。武汉钢铁公司所引进的1700薄板轧机是联邦德国DMAG公司提供的。该公司在对此产品进行优化修改后,就多盈利几百万马克。

优化方法不仅用于产品结构的设计、工艺方案的选择,也用于运输路线的确定、商品流通量的调配、产品配方的配比等等。目前,优化方法在机械、冶金、石油、化工、电机、建筑、宇航、造船、轻工等部门都已得到广泛的应用。

二、机械优化设计发展概况

在第二次世界大战期间,由于军事上的需要产生了运筹学,提供了许多用古典微分法和变分法所不能解决的最优化方法。50年代发展起来的数学规划理论形成了应用数学的一个分支,为优化设计奠定了理论基础。60年代电子计算机和计算技术的发展为优化设计提供了强有力的手段,使工程技术人员能够从大量繁琐的计算工作中解放出来,把主要精力转到优化方案选择的方向上来。虽然近20多年来优化设计方法已在许多工业部门得到应用,但最优化技术成功地运用于机械设计还是在60年代后期开始的,虽然历史较短,但进展迅速。十多年来在机构综合、机械零部件设计、专用机械设计和工艺设计方面都获得应用并取得一定成果。

机构运动参数的优化设计是机械优化设计中发展较早的领域,不仅研究了连杆机构、凸轮机构等再现函数和轨迹的优化设计问题,而且还提出一些标准化程序。机构动力学优化设计方面也有很大进展,如惯性力的最优平衡,主动件力矩的最小波动等的优化设计。机械零部件的优化设计最近十几年也有很大发展,主要是研究各种减速器的优化设计、液压轴承和滚动轴承的优化设计以及轴、弹簧、制动器等结构参数优化。除此之外,在机床、锻压设备、压延设备、起重运输设备、汽车等的基本参数、基本工作机构和主体结构方面也进行了优化设计工作。

近年来,机械优化设计的应用愈来愈广,但还面临着许多问题需要解决。例如,机械产品设计中零、部件通用化、系列化和标准化,整机优化设计模型及方法的研究,机械优化设计中离散变量优化方法的研究,更为有效的优化设计方法的发掘等一系列问题,都需做较大的努力才能适应机械工业发展的需要。

近年来发展起来的计算机辅助设计(CAD),在引入优化设计方法后,使得在设计过程中既能够不断选择设计参数并评选出最优设计方案,又可以加快设计速度,缩短设计周期。

在科学技术发展要求机械产品更新周期日益缩短的今天，把优化设计与计算机辅助设计结合起来，使设计过程完全自动化，已成为设计方法的一个重要发展趋势。

三、本课程的主要内容

机械优化设计包括建立优化设计问题的数学模型和选择恰当的优化方法与程序两方面的内容。由于机械优化设计是应用数学方法寻求机械设计的最优方案，所以首先要根据实际的机械设计问题构造出相应的数学模型，即用数学形式来描述实际设计问题。在建立数学模型时需要应用专业知识确定设计的限制条件和所追求的目标，确立各设计变量之间的相互关系等。机械优化设计问题的数学模型可以是解析式、试验数据或经验公式。虽然它们给出的形式不同，但都是反映设计变量之间的数量关系的。

数学模型一旦建立，机械优化设计问题就变成一个数学求解问题。应用数学规划方法的理论，根据数学模型的特点，我们可以选择适当的优化方法，进而可以选取或自行编制计算机程序，以计算机作为工具求得最佳设计参数。

本课程将着重介绍数学规划理论的基本概念、技术术语与基本方法，并通过实例介绍用数学规划理论解决机械优化设计问题的过程。本课程共分八章进行讨论。第一章介绍优化设计的基本概念，其目的在于了解优化设计的步骤及常用术语。第二章介绍某些数学基础知识，以便为以后各章的学习打好基础。第三、四、五、六章分别介绍一维搜索、无约束优化、线性规划和约束优化的原理及算法，这是本课程的重点。第七章介绍几个机械优化设计问题的实例，用以说明如何应用优化方法解决机械优化设计问题的过程。

第一章 优化设计概述

为了对机械优化设计有一具体的认识，现以人字架的优化设计为例予以说明。虽然此设计采用简单的解析法和作图法，但从中可以了解优化的具体过程，以及优化问题的一些基本概念。

§ 1-1 人字架的优化设计

一、问题

图1-1所示的人字架由两个钢管构成，其顶点受外力 $2F = 3 \times 10^5 \text{ N}$ 。已知人字架跨度 $2B = 152 \text{ cm}$ ，钢管壁厚 $T = 0.25 \text{ cm}$ ，钢管材料的弹性模量 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，材料密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，许用压应力 $\sigma_y = 420 \text{ MPa}$ 。求在钢管压应力 σ 不超过许用压应力 σ_y 和失稳临界应力 σ_c 的条件下，人字架的高 H 和钢管平均直径 D ，使钢管总重量 M 为最小。

根据以上所述，可以把人字架的优化设计问题归结为

求 $x = [D \ H]^T$ ，使结构重量

$$M(x) \rightarrow \min$$

但应满足强度约束条件

$$\sigma(x) \leq \sigma_y$$

和稳定约束条件

$$\sigma(x) \leq \sigma_c$$

二、强度、稳定条件

钢管所受的压力

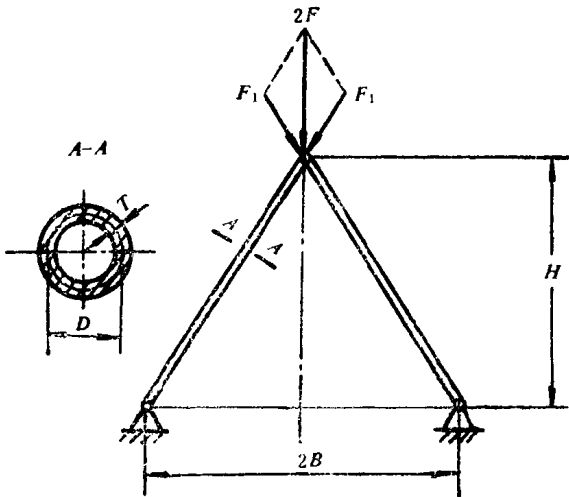


图1-1 人字架的受力

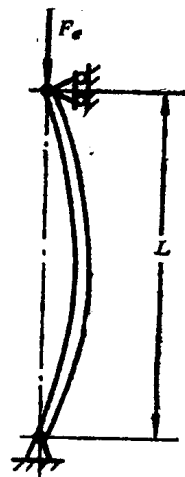


图1-2 压杆的稳定

$$F_1 = \frac{FL}{H} = \frac{F(B^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}}{H}$$

压杆失稳的临界力，见图 1-2

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

式中 I —— 钢管截面惯性矩，

$$I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = \frac{A}{8}(T^2 + D^2)$$

A —— 钢管截面面积 (r , R 为截面内、外半径, $D = R + r$)

$$A = \pi(R^2 - r^2) = \pi TD$$

钢管所受的压应力

$$\sigma = \frac{F_1}{A} = \frac{F(B^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi TDH}$$

钢管的临界应力

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A} = \frac{\pi^2 E(T^2 + D^2)}{8(B^2 + H^2)}$$

因此，强度约束条件 $\sigma \leq \sigma_y$ 可以写成

$$\frac{F(B^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi TDH} \leq \sigma_y$$

稳定约束条件 $\sigma \leq \sigma_c$ 可以写成

$$\frac{F(B^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi TDH} \leq \frac{\pi^2 E(T^2 + D^2)}{8(B^2 + H^2)}$$

三、解析法

上述优化问题是以 D 和 H 为设计变量的二维问题，而且只有两个约束条件，可以用解析法进行求解。

假定使人字架总重量

$$M(D, H) = 2\rho AL = 2\pi\rho TD(B^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$$

为最小的最优解，刚好满足强度条件，即有

$$\sigma(D, H) = \sigma_y$$

从而可以将设计变量 D 用设计变量 H 表示

$$D = \frac{F(B^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi T \sigma_y H}$$

将 D 代入目标函数 $M(D, H)$ 中，得

$$M(H) = \frac{2\rho F}{\sigma_y} \frac{B^2 + H^2}{H}$$

根据极值必要条件

$$\frac{dM}{dH} = \frac{2\rho F}{\sigma_y} \frac{d}{dH} \left(\frac{B^2 + H^2}{H} \right) = \frac{2\rho F}{\sigma_y} \left(1 - \frac{B^2}{H^3} \right) = 0$$

得

$$H^* = B = \frac{152}{2} \text{ cm} = 76 \text{ cm}$$

$$D^* = \frac{\sqrt{2} F}{\pi T \sigma_y} = 6.43 \text{ cm}$$

$$M^* = \frac{4\rho FB}{\sigma_y} = 8.47 \text{ kg}$$

把所得参数代入稳定条件, 可以证明

$$\sigma(D^*, H^*) \leq \sigma_c(D^*, H^*)$$

即稳定约束条件得到满足。所以, H^* 、 D^* 这两个参数是满足强度约束和稳定约束, 且使结构最轻的最佳参数。

四、作图法

在设计平面 $D-H$ 上画出代表

$$\sigma(D, H) = \sigma_y$$

和 $\sigma(D, H) = \sigma_c(D, H)$

的两条曲线, 如图 1-3 所示。两曲线将设计平面分成两部分, 其中不带阴影线的区域是同时满足

$$\sigma \leq \sigma_y$$

和

$$\sigma \leq \sigma_c$$

两个约束条件的区域, 称为可行域。然后再画出一族重量等值线

$$M(D, H) = C$$

(C 为一系列常数)。从图中可以看出, 等值线在可行域内部无中心, 故此约束优化问题的极值点处于可行域边界与等值线的切点处, 从而找到极值点 x^* 的坐标

$$D^* = 6.43 \text{ cm}$$

$$H^* = 76 \text{ cm}$$

通过 x^* 的等值线就是最轻结构重量, 其值为

$$M^* = 8.47 \text{ kg}$$

最优点 x^* 处于强度曲线上, 说明此时强度条件刚好满足, 而稳定条件不但满足且有一定裕量。这表明强度约束条件为起作用约束, 它影响极值点的位置, 稳定约束条件为不起作用约束, 它不影响极值点的位置。

五、讨论

若将许用压应力 σ_y 由 420MPa 提高到 703MPa, 这时强度约束条件发生变化, 因而可行域也发生变化, 如图 1-3 所示。若仍按上述解析法进行求解, 还假定最优点刚好满足强度条件, 得

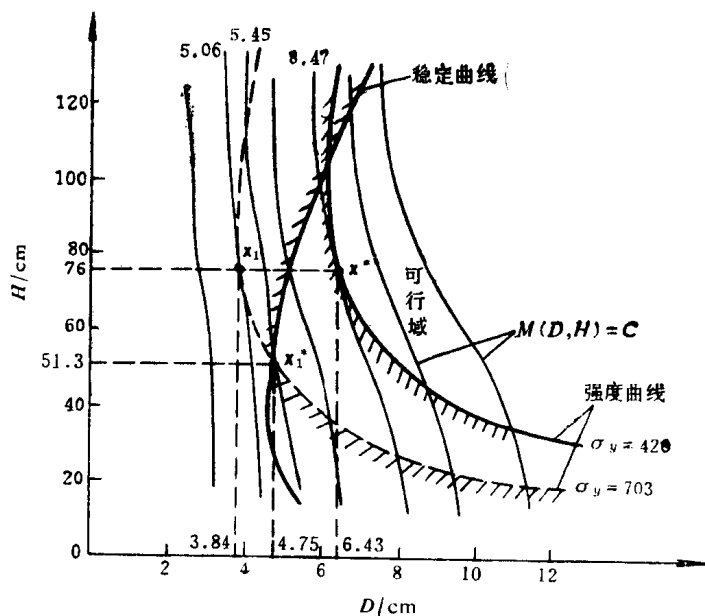


图1-3 人字架优化设计的图解

$$H = B = 76 \text{ cm}$$

$$D = \frac{\sqrt{2} F}{\pi T \sigma_y} = 3.84 \text{ cm}$$

$$M = \frac{4\rho FH}{\sigma_y} = 5.06 \text{ kg}$$

当在 $D-H$ 设计平面上标出此点时, 可以看出它位于等值线

$$M(D, H) = 5.06$$

与强度曲线

$$\sigma(D, H) = 703$$

的切点 x_1 处。但是, x_1 点位于可行域之外, 它不满足稳定条件。这也可以通过将 x_1 点处的 D 和 H 的上述数值代入稳定条件而得到证实。因此, 这表明 x_1 不是最优点。

用作图法可找出最优点位于强度曲线和稳定曲线的交点 x_1^* 处。它的坐标值就是最优参数, 其值为

$$H_1^* = 51.3 \text{ cm}$$

$$D_1^* = 4.75 \text{ cm}$$

通过 x_1^* 的等值线值即为最轻结构重量, 其值为

$$M_1^* = 5.45 \text{ kg}$$

因为 x_1^* 点的位置是由强度曲线和稳定曲线的交点所决定的, 所以强度约束条件和稳定约束条件都得到满足, 且二者都是起作用的约束条件。最优点仍处于可行域边界与等值线的切点位置。

从上面的讨论可知, 对于具有不等式约束条件的优化问题, 判断哪些约束是起作用的, 哪些约束是不起作用的, 这对求解优化问题是很关键的。

§ 1-2 机械优化设计问题示例

在优化设计中, 通常是根据分析对象的设计要求, 应用有关专业的基础理论和具体技术知识进行推导来建立相应的方程或方程组。对机械类的分析对象来说, 主要是根据力学、机械设计基础知识和各专业机械设备的具体知识来推导方程或方程组 (动力学问题中多为偏微分或常微分方程组的形式), 这些方程反映结构诸参数之间的内在联系, 通过它可以研究各参数对设计对象工作性能的影响。

下面通过几个具体例子, 说明机械优化设计中建立方程组的方法和步骤 (公式的推导尽量简略, 以减少篇幅)。

例1-1 平面四连杆机构的优化设计。

平面四连杆机构的设计主要是根据运动学的要求, 确定其几何尺寸, 以实现给定的运动规律。

图 1-4 所示是一个曲柄摇杆机构。图中 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 分别是曲柄 AB 、连杆 BC 、摇杆 CD

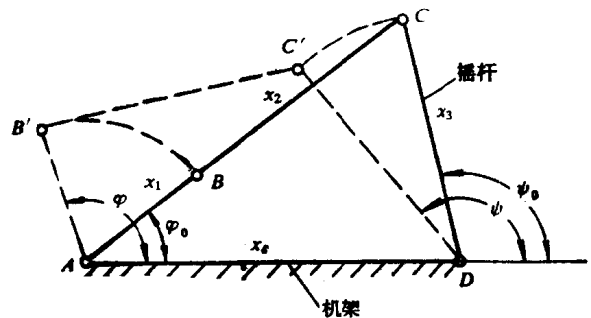


图1-4 曲柄摇杆机构

和机架 AD 的长度。 φ 是曲柄输入角, ψ_0 是摇杆输出的起始位置角。这里, 规定 φ_0 为摇杆在右极限位置角 ψ_0 时的曲柄起始位置角, 它们可以由 x_1 、 x_2 、 x_3 和 x_4 确定。通常规定曲柄长度 $x_1 = 1.0$, 而在这里 x_4 是给定的, 并设 $x_4 = 5.0$ 所以只有 x_2 和 x_3 是设计变量。

设计时, 可在给定最大和最小传动角的前提下, 当曲柄从 φ_0 位置转到 $\varphi_0 + 90^\circ$ 时, 要求摇杆的输出角最优地实现一个给定的运动规律 $f_0(\varphi)$ 。例如, 要求

$$\psi = f_0(\varphi) = \psi_0 + \frac{2}{3\pi}(\varphi - \varphi_0)^2$$

对于这样的设计问题, 可以取机构的期望输出角 $\psi = f_0(\varphi)$ 和实际输出角 $\psi_j = f_j(\varphi)$

的平方误差积分准则做为目标函数, 使 $f(x) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \frac{\pi}{2}} [\psi - \psi_j]^2 d\varphi$ 最小。

当把输入角 φ 取 s 个点进行数值计算时, 它可以化约为 $f(x) = f(x_2, x_3) = \sum_{i=0}^s [\psi_i - \psi_{ji}]^2$ 最小。

相应的约束条件有:

1) 曲柄与机架共线位置时的传动角

$$\text{最大传动角 } \gamma_{\max} \leq 135^\circ$$

$$\text{最小传动角 } \gamma_{\min} \geq 45^\circ$$

对本问题可以计算出

$$\gamma_{\max} = \arccos \left[\frac{x_2^2 + x_3^2 - 36}{2x_2x_3} \right]$$

$$\gamma_{\min} = \arccos \left[\frac{x_2^2 + x_3^2 - 16}{2x_2x_3} \right]$$

所以有

$$x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \cos 135^\circ - 36 \geq 0$$

和

$$x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \cos 45^\circ + 16 \geq 0$$

2) 曲柄存在条件

$$x_2 \geq x_1$$

$$x_3 \geq x_1$$

$$x_4 \geq x_1$$

$$x_2 + x_3 \geq x_1 + x_4$$

$$x_4 - x_1 \geq x_2 - x_3$$

3) 边界约束

当 $x_1 = 1.0$ 时, 若给定 x_4 , 则可求出 x_2 和 x_3 的边界值。例如, 当 $x_4 = 5.0$ 时, 则有曲柄存在条件和边界值限制条件如下:

$$x_2 + x_3 - 6 \geq 0$$

$$4 - x_2 + x_3 \geq 0$$

和

$$1 \leq x_2 \leq 7$$

$$1 \leq x_3 \leq 7$$

例1-2 机床传动系统的优化设计。

这里用一个机床主传动系统为例，说明在优化设计时建立数学模型的方法。

图 1-5 a、b 所示分别是某车床主传动的传动系统图和相应的传动结构图。图中没有画出摩擦离合器，因为它的结构尺寸参数是按现有结构选取的，不需进行优选。由图可知：它共有四个传动组，即在 I - II 轴间的由 i_{11} 和 i_{12} 组成的第一传动组，II - III 轴间由 i_{21} 和 i_{22} 组成的第二传动组，III - IV 轴间由 i_{31} 、 i_{32} 和 i_{33} 组成的第三传动组，IV - V 轴间由 i_{41} 和 i_{42} 组成的第四传动组。IV 轴上的齿轮 z_{41} 是公用齿轮。

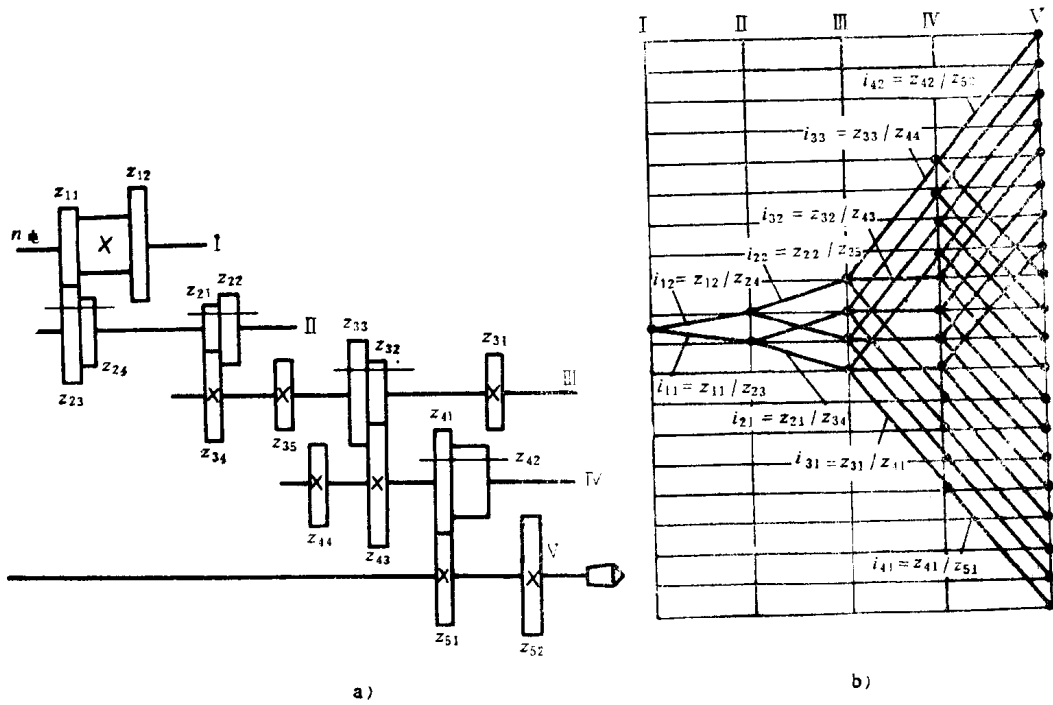


图1-5 车床的主传动系统
a) 传动系统图 b) 传动结构图

各传动组的模数依次为 m_1, m_2, m_3, m_4 。

这个传动系统的设计变量有以下三类，即：

- 1) 各传动组的最低传动比，分别是 $i_{11}, i_{21}, i_{31}, i_{41}$ ；
- 2) 各传动组的最小主动轮齿数，分别是 $z_{11}, z_{21}, z_{31}, z_{41}$ （由于 z_{41} 是公用齿轮，所以 z_{42} 就不是独立的变量）；
- 3) 各传动组的模数，分别是 m_1, m_2, m_3, m_4 。

所以共有12个设计变量。

说明一点，当采用变位齿轮时，还要考虑变位齿轮传动副和标准齿轮传动副中心距的差值 ΔA_i 。

目标函数取传动路线中各对啮合齿轮中心距之和最小，它可写成

$$f(x) = \sum_{j=1}^4 \frac{m_j z_{j1}}{2} \left(1 + \frac{1}{i_{j1}} \right) \tag{1-1}$$

约束条件包括：

1) 由于结构尺寸引起的齿轮齿数、传动比值、中心距的限制 (可以是上限、下限或上下限);

2) 齿轮线速度的限制;

3) 齿轮弯曲和接触强度的限制等。

这台车床共有67个约束条件, 虽然形式各异, 但都可统一写成不等式约束的形式

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots)$$

或

$$x_{i_{\min}} \leq x_i \leq x_{i_{\max}} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

这样, 问题可归结为: 求 $\mathbf{x} = [i_{11} \ i_{21} \ i_{31} \ i_{41} \ r_{11} \ z_{21} \ z_{31} \ z_{41} \ m_1 \ m_2 \ m_3 \ m_4]^T$ 的值, 使

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 \frac{m_j z_{j1}}{2} \left(1 + \frac{1}{i_{j1}} \right) \rightarrow \min$$

$$\text{s. t. } \ominus \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots)$$

$$x_{i_{\min}} \leq x_i \leq x_{i_{\max}} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

例1-3 轴承和轴承系统的优化设计。

对于动压式滑动轴承, 当取无量纲形式的表达式时, 通过计算可以得出它的,

$$\text{承载能力系数} = \frac{F\psi^2}{\eta v L};$$

$$\text{润滑油流量系数} = \frac{q}{\psi v DL};$$

$$\text{轴承的功耗} = \frac{\mu F v}{102};$$

$$\text{轴承的温升} = \frac{\mu F v}{427 c_p \rho q};$$

$$\text{摩擦阻力系数} = \frac{\mu}{\psi};$$

$$\text{圆柱轴承的最小油膜厚度} = \frac{D}{2} \psi \left(1 - \frac{e}{c} \right);$$

$$\text{轴颈的失稳转速 (指开始半速涡动时的轴颈转速)} \quad n_w = n_{k1} \sqrt{\frac{\bar{m}}{\gamma^2 k_{\text{eq}}}} \text{ 等等。}$$

上述各式中: F 是轴承载荷; D 是轴承直径; L 是轴承长度; v 是轴颈圆周速度; η 是润滑油粘度; c 是半径间隙; e 是轴颈和轴承中心间的偏心距; q 是润滑油流量; μ 是摩擦系数; $\psi = \frac{2c}{D}$ 是间隙比; c_p 是油的比热; ρ 是油的密度; $\bar{m} = \frac{\omega \psi^3}{\eta L} m$ 是转轴分配到轴承上的无量纲质量; m 是转轴分配到轴承上的质量; ω 是转轴的工作角速度; k_{eq} 是当量刚度; γ 是刚度和阻尼的比例系数; n_{k1} 是转轴的第一临界转速。

优化设计时, 可以取滑动轴承的最大承载能力、最小功耗、最小流量、最小温升或振动过程中的油膜稳定性等等之中的一个或几个的组合做为目标函数。其约束条件可以是最小油膜厚度、轴承温升、轴承功耗、轴承转速、轴承的长径比等等。

对一般的轴承系统, 可以从动力学角度考虑它的优化设计。

若把轴承系统看做是由支承和轴承处的轴所组成, 则在工作时, 由轴和支承的质量、轴

⊖ 即受约束于

承系统刚度和阻尼组成一个振动系统。在外力作用下，它会产生沿垂直和水平两个方向的强迫振动。如果忽略垂直和水平方向上的刚度和阻尼的相互影响，则可以对它的两个方向的振动分别进行研究。若只考虑系统在垂直方向上的振动，则它可以简化成图1-6所示的力学模型。图中 m_1 、 k_1 和 δ_1 是轴的当量质量、轴承刚度系数和阻尼系数； m_2 、 k_2 和 δ_2 是支承的质量、支承座的刚度系数和阻尼系数。这是一个两自由度的振动系统。

设计时，可以选择、调整 m_1 、 k_1 、 δ_1 、 m_2 、 k_2 、 δ_2 使系统强迫振动引起的振幅 X_1 和激振力 F 之比 $\frac{X_1}{F}$ ，即动柔度最小（或动刚度最大）。但是必须避免共振，同时 m_1 、 k_1 、 δ_1 、 m_2 、 k_2 、 δ_2 等应有一个设计对象所能允许的变化范围。

当忽略阻尼影响时，可以通过系统的两个自由度振动的运动方程

$$M\ddot{x} + Kx = F \quad (1-2)$$

解出其动柔度 $\frac{X_1}{F}$ 。式中的 M 和 K 是系统的质量矩阵和刚度矩阵。

避免共振就是要避免激振力频率 ω （例如轴的工作频率 ω ）与系统的固有振动频率 ω_i 重合。工程上按系统固有频率值给出一个频率禁区，使激振力频率不落在频率禁区内。一般要求激振力频率 ω 避开 $(1 \pm 20\%)\omega_i$ 禁区范围。

这样，问题可归结为：确定设计变量 $\mathbf{x} = [m_1, m_2, k_1, k_2, \delta_1, \delta_2]$ 使目标函数 $\frac{X_1}{F} = f(\mathbf{x})$ 最小，约束条件为

若 $\omega_i > \omega$ ，则 $\omega_i > 1.2\omega$ ；

若 $\omega_i < \omega$ ，则 $\omega_i < 0.8\omega$ ；

$$x_{i, \min} \leq x_i \leq x_{i, \max}$$

其中 x_i 分别是 m_1 、 m_2 、 k_1 、 k_2 、 δ_1 、 δ_2 等设计变量。在实际设计中，轴的当量质量一般是给定的。这时，设计变量中不应再包括 m_1 。

例1-4 机床主轴结构的优化设计。

图1-7所示是一个机床主轴的典型结构原理图。对于这类问题，目前也是采用有限元法，利用状态方程来计算轴端变形 y 和固有频率 ω 。

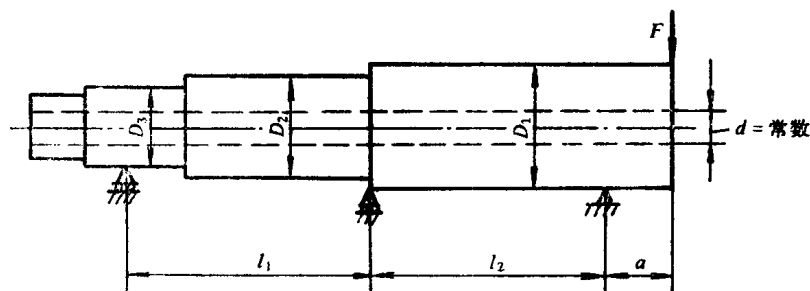


图1-7 机床主轴的典型结构原理图

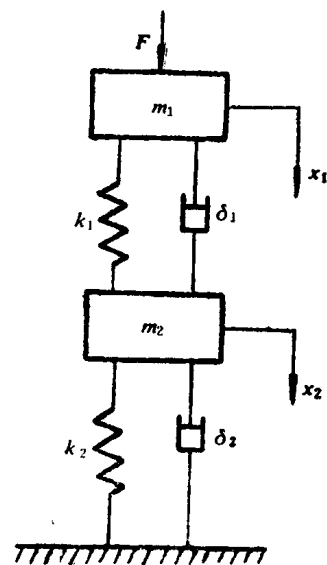


图1-6 轴承系统的力学模型

优化设计的任务是确定 D_i 、 l_i 和 a ，保证 y 和 ω 在允许限内，使结构的重量最轻。

这时，问题归结为：求 D_i 、 l_i 、 a 的值，使重量 $f(D_i, l_i) = \rho\pi[\Sigma(D_i^2 - d^2)l_i + (D_n^2 - d^2)a]$ 为最小，并满足条件

$$\begin{aligned}
 y &\leq [y] \\
 \omega^2 &\geq \omega_0^2 \\
 D_{i\min} &\leq D_i \leq D_{i\max} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 l_{i\min} &\leq l_i \leq l_{i\max} \\
 a_{\min} &\leq a \leq a_{\max} \\
 N_{\min} &\leq \frac{l_1}{a} \leq N_{\max}
 \end{aligned}$$

式中 ρ ——材料的密度；

D_i 、 l_i ——阶梯形主轴的外径和对应的长度；

D_n ——与 a 对应的外径。

在主轴结构动力优化设计时，也可取由振型和质量确定的能耗为目标函数。约束条件可以取激振力频率避开 $(1 \pm 20\%) \omega$ 的禁区范围。

例1-5 直升飞机尾仓部分桁架结构的优化设计。

图1-8 a 是某直升飞机尾仓部分的外观图。图1-8 b 是它的内部桁架结构的两个视图。这种桁架结构，设计时要求其总重量最小，但各杆在受载时，各杆单元的应力 σ_i 和节点位移 y_i 以及振动的固有频率 ω 都应有所限制。

图示的桁架结构，共有108个杆单元，28个节点。若每个节点考虑3个自由度，共有72个自由度（28个节点中有4个节点被固定）。

对于这样的结构，目前都是用有限元法来计算它的 y_i 、 ω^2 和 σ_i 。当取各杆横截面积 A_i 为设计变量（可以把 A_i 进行分组处理，以减少设计变量数目）时，相应的计算公式是

$$K(A)y = F \tag{1-3}$$

$$K(A)\bar{y} = \omega^2 M(A)\bar{y} \tag{1-4}$$

式中 $K(A)$ ——结构刚阵；

$M(A)$ ——结构质阵；

F ——载荷列阵；

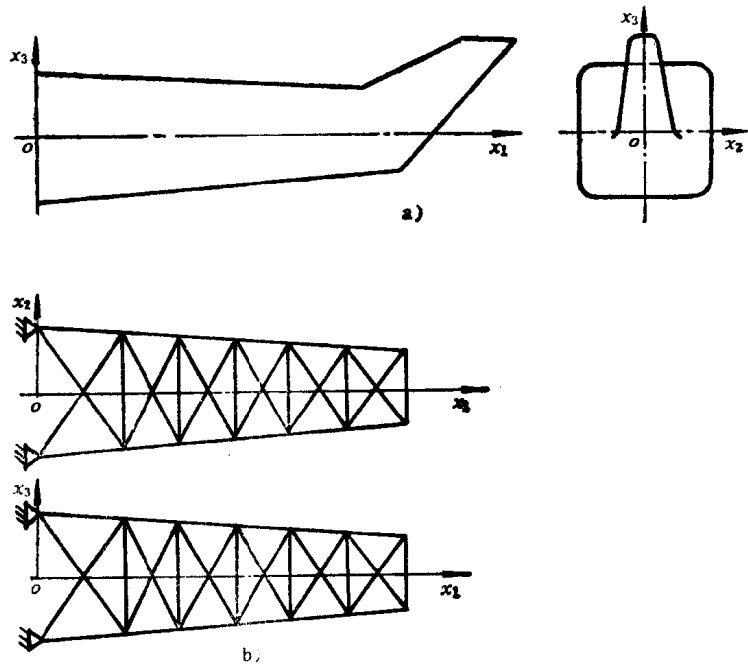


图1-8 直升飞机尾仓的桁架结构
a) 尾仓外形图 b) 尾仓桁架结构的正视图与俯视图

y ——节点位移列阵;

ω 、 \bar{y} ——分别为固有频率和对应的振型矩阵。

式 (1-3) 和 (1-4) 是由许多个平衡方程所组成的方程组 (又称状态方程), 通过求解, 可以得出与某一设计方案 (某一组设计变量所确定的方案) 相应的 y_j 、 ω^2 和 σ_i 值。

优化设计的目标是结构总重量最轻。若 L_i 是各杆单元的长度, 则总重量 (ρ 是材料密度)

$$f(A) = M = \rho \sum_{i=1}^{108} L_i A_i \quad (1-5)$$

设计时, 要求各 σ_i 都不能大于允许的 $[\sigma_i]$; y_j 必须小于允许的 $[y_j]$; 计算的最低固有频率 ω^2 应大于频率的下限值 ω_0^2 ; 各设计变量 A_i 应限制在一定界限之内。

这样, 本优化问题归结为: 求一组变量 A , 使目标函数

$$\begin{aligned} f(A) &\rightarrow \min \\ \text{s. t. } &|\sigma_i| \leq [\sigma_i] \quad (i = 1, 2, \dots, 108) \\ &|y_j| \leq [y_j] \quad (j = 1, 2, \dots, 72) \\ &\omega^2 \geq \omega_0^2 \\ &A_{i \min} \leq A_i \leq A_{i \max} \end{aligned}$$

当然, 这些约束条件可统一写成不等式 $g(A) \leq 0$ 的形式。

例1-6 汽车悬挂系统的优化设计。

在汽车结构系统设计中, 希望汽车能在不同速度和道路条件下, 驾驶员座位的最大加速度为最小, 同时还须满足一系列的动态响应和设计参数的约束。设计参数是选择系统的弹簧常数 k^i 和阻尼系数 δ_i 。

图1-9所示是5个自由度的汽车悬挂系统。图中的 m_1 是驾驶员及其座位的质量, 它由弹簧 k_1 和阻尼器 δ_1 支持。其它部分, 如车体、车轮、车轴等的质量、弹簧和阻尼分别用 m_2 、 m_3 、 m_4 、 m_5 及 k_2 、 k_3 、 δ_2 、 δ_3 表示, 如图1-9所示。 k_4 、 k_5 和 δ_4 、 δ_5 表示轮胎的刚度和阻尼系数。车体对其质量中心的惯性矩用 I 表示; L 表示轮距长度。 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 表示由于道路表面起伏不平引起的前后轮的位移函数。 z_i 是坐标。

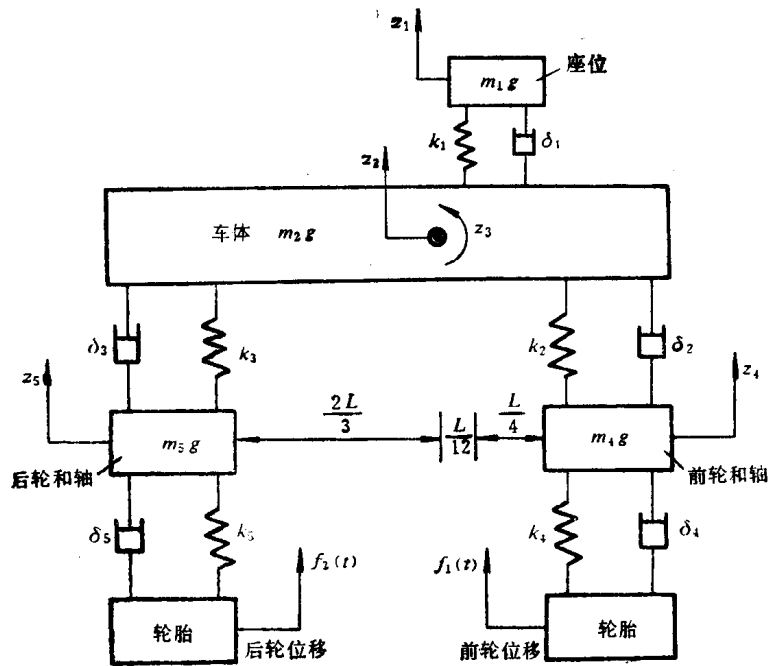


图1-9 汽车悬挂系统

δ_5 表示轮胎的刚度和阻尼系数。车体对其质量中心的惯性矩用 I 表示; L 表示轮距长度。 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 表示由于道路表面起伏不平引起的前后轮的位移函数。 z_i 是坐标。

根据拉格朗日运动方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_i} + \frac{\partial U}{\partial z_i} - Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$