高等学校函授教材

（兼作高等教育自学用书）

材料力学

下册

于绶章

马安禧

李民庆　编

金世增

刘家树

于绶章　主编

高等教育出版社

本书是根据1981年教育部审订的高等工业学校机械类专业试用的材料力学函授教学大纲(草案)编写的。

本书分上、下二册出版。上册包括:绪论、拉伸和压缩、剪切、扭转、截面的几何性质、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、三次谈学习材料力学、两次测验作业。下册包括:应力状态理论、强度理论、组合变形构件的强度计算、能量法、压杆稳定、动荷应力、交变应力、线弹性断裂力学简介、四谈学习材料力学、两次测验作业等内容。

本书是高等工业学校机械类各专业适用的函授教材,也可作为相应专业的其他业余高等教育的教材和高等教育自学通用教材。本书也可作为机械工程技术人员的参考书。

高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)
材料力学
(下册)
于绶章　主编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷三厂印装
*
开本 850×1168 1/32　印张 10.875　字数 263,000
1983年3月第1版　1983年8月第1次印刷
印数 00,001—22,000
书号 15010·0492　　定价 1.30 元

2

下 册 目 录

第九章　应力状态理论

内 容 提 要

本章首先介绍应力状态的概念，然后着重讨论二向应力状态分析的解析法和图解法，同时介绍三向应力状态下的最大应力、广义虎克定律和弹性比能等内容。

§9-1　应力状态的概念

一、概述

在轴向拉压一章中曾经指出，通过构件内一点处所取的截面方向不同，则该点在不同的截面上将有不同的应力(图 9-1a)。在扭转和弯曲各章中，分析了构件横截面上的应力。我们知道，在同一横截面上各点处的应力并不相同。进一步分析还可知道，通过构件内某一点处的各斜截面上的应力也是不同的。

研究一点处的应力状态，就是研究受力构件中某一点处各不同截面上的应力变化情况。

为什么要研究一点处的应力状态呢？(1)为了解决构件的强度问题，就需要知道构件受力后，在哪一点处并在什么斜截面上的应力为最大。(2)对一些构件和材料的破坏现象，也常需通过应力状态分析，才能解释其破坏原因。例如低碳钢拉伸试验，加力达到屈服阶段时，在试件表面沿与试件轴线成 45° 方向上会出现滑移线；又如铸铁压缩时，在与轴线成稍大于 45° 的斜截面上试件发生破坏。这些破坏现象都与斜截面上的应力有密切关系。(3) 在测定

构件应力的实验应力分析中，以及在弹性力学、塑性力学和断裂力学等学科的研究中，都要广泛用到应力状态理论，以及由它得出的一些结论。

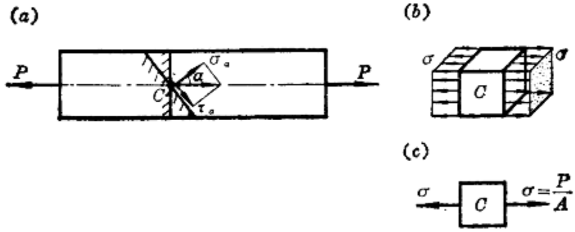


图 9-1

二、应力状态的研究方法

表示构件中一点处应力状态的方法，是用围绕该点截取单元体的方法。首先围绕该点截取微小单元体作为分离体，然后给出此单元体各侧面上的应力。如图 9-1a 所示，从轴向拉伸杆中C点处截取单元体如图 9-1 b 所示(或用图 9-1 c 表示)，根据拉压杆件的应力计算公式可知，其左右两侧面上仅有均布正应力，即$\sigma=P/A$，其它各面上无应力作用。

再以图 9-2a 所示的悬臂梁为例，在梁上边缘 A 点处截取单元体如图 9-2a、b 所示，其左右两侧面上的正应力，可按弯曲正应力公式 $\sigma_{\max}=M/W$ 算出。在离中性层为 y 的 B 点处截取单元体如图 9-2 c 所示，其左右两侧面上的正应力 σ 和剪应力 τ，可按公式(7-2)和(7-10)计算，即由 $\sigma=My/I$ 和 $\tau=QS/Ib$ 求得，再根据剪应力互等定理，在上下两平面上还有剪应力 τ。单元体 A、B 的前后两个平面上都没有应力作用。

应该指出，所截取的单元体一般都极其微小，可以认为单元体各面上的应力为均匀分布，同时，在两个平行平面上的应力大小相等方向相反。从所截取的单元体出发，根据其各侧面上的已知应

力，借助于截面法和静力平衡条件，即可求出通过这一单元体的任何斜截面上的应力，从而确定此点处的应力状态。这就是研究一点处应力状态的基本方法。

三、应力状态分类

在图 9-1 上 C 点处或图 9-2 上 A 点处截取的单元体，其两侧面上只有正应力，没有剪应力。单元体上没有剪应力作用的平面，叫作主平面；主平面上的正应力，称为主应力。

为了研究方便，常将应力状态分为三类：

1. 单向应力状态　单元体上只有一个主应力不为零的应力状态，称为单向应力状态。例如，梁的上边缘 A 点处的单元体即处于单向应力状态(图 9-2a、b)。

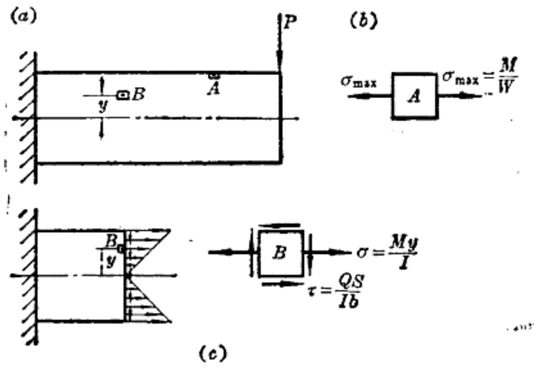


图 9-2

2. 二向应力状态　单元体两个互相垂直的截面上都有主应力的应力状态，称为二向应力状态。如图 9-3 所示的薄壁球形容器，在内压力 P 作用下，球壁将向外膨胀而产生拉伸应力。若在球壁上用通过球心的直径平面截取单元体，由于圆球形状和受力的对称性，可知单元体各侧面上没有剪应力，只有拉伸主应力。这就是

二向应力状态的一个实例。

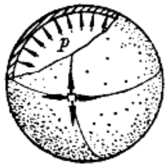


图 9-3

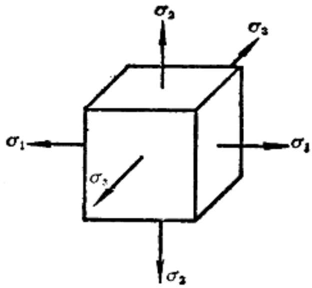


图 9-4

3. 三向应力状态　单元体三个互相垂直的截面上都存在主应力的应力状态，称为三向应力状态。如图 9-4 所示单元体即为三向应力状态，三个主应力分别用 σ_1、σ_2 和 σ_3 表示。通常规定拉应力为正，压应力为负，并按主应力代数值大小顺序排列，即 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$。例如三个主应力值为 -100MPa、0、50MPa，则 $\sigma_1 = 50$MPa、$\sigma_2 = 0$、$\sigma_3 = -100$MPa。

二向应力状态和三向应力状态，又统称为复杂应力状态。

§9-2　用解析法求二向应力状态斜截面上的应力

研究应力状态的方法有解析法和图解法。本节介绍用解析法求二向应力状态斜截面上的应力。

设从受力构件中一点处取一单元体如图 9-5a 所示，已知在与 x 轴垂直的平面上的正应力 σ_x 和剪应力 τ_x，在与 y 轴垂直的平面上的正应力 σ_y 和剪应力 τ_y，在与 z 轴垂直的平面上没有应力。这是二向应力状态的最一般情形。

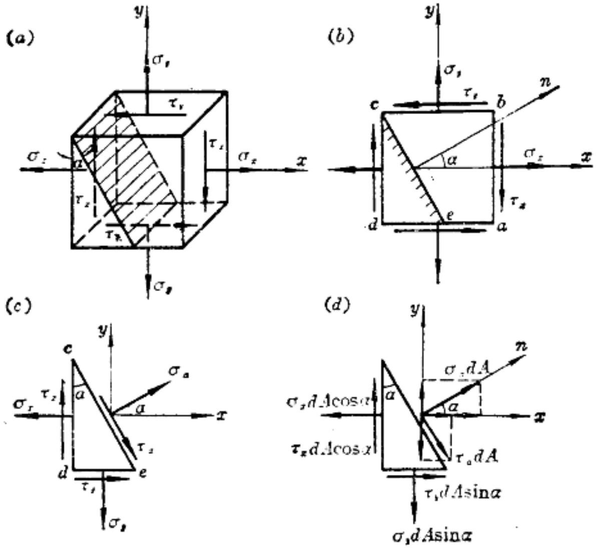


图 9-5

上述单元体又可表示为如图 9-5b 所示。如以 α 表示垂直于 xy 平面的任意斜截面 ce 的外法线 n 与 x 轴的夹角，并将单元体沿该斜截面假想地截开，通常在此斜截面上将作用有沿某个方向的应力，这个应力总可分解为垂直于该截面的正应力 σ_α 和平行于该截面的剪应力 τ_α(图 9-5c)。现取楔形体 cde 为研究对象，利用平衡条件来求此斜截面上的应力。

由于作用在单元体各平面上的应力是单位面积上的内力，所以必须将应力乘以其作用面的面积后，才能考虑各力之间的平衡关系。因此，设斜截面 ce 的面积为 dA，则平面 cd 和 de 的面积分别为 $dA\cos\alpha$ 和 $dA\sin\alpha$。作用在楔形体 cde 各平面上的力，如图 9-5d 所示。列出平衡条件为：

$$\Sigma X=0,\ \sigma_\alpha dA\cos\alpha+\tau_\alpha dA\sin\alpha-\sigma_x dA\cos\alpha+\tau_y dA\sin\alpha=0 \quad (a)$$

$$\Sigma Y=0,\ \sigma_\alpha dA\sin\alpha-\tau_\alpha dA\cos\alpha-\sigma_y dA\sin\alpha+\tau_x dA\cos\alpha=0 \tag{b}$$

联立求解方程(a)、(b)，并考虑到剪应力互等定理，$\tau_x=\tau_y$(二者的符号不同，已在图上画出相反的方向)，可得

$$\sigma_\alpha=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha-2\tau_x\sin\alpha\cos\alpha \tag{c}$$

$$\tau_\alpha=(\sigma_x-\sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha+\tau_x(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) \tag{d}$$

利用三角关系

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha&=\frac{1+\cos2\alpha}{2}\\ \sin^2\alpha&=\frac{1-\cos2\alpha}{2}\\ 2\sin\alpha\cos\alpha&=\sin2\alpha\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

可以得到

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_\alpha&=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_x\sin2\alpha\\ \tau_\alpha&=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau_x\cos2\alpha\end{aligned}} \tag{9-1}$$

公式(9-1)就是计算二向应力状态斜截面上应力的基本公式。利用此二式可由单元体上的已知应力 σ_x、σ_y、τ_x 和 τ_y，求得任意斜截面上的正应力 σ_α 和剪应力 τ_α。

利用上述公式计算时，应注意其符号的规定：正应力以拉应力为正，压应力为负；剪应力以绕单元体内任一点顺时针转向时为正，反之为负；夹角 α 则规定从 x 轴逆时针方向转到斜截面的外法线 n 时为正，反之为负。例如，在图 9-5 中，应力 σ_x、σ_y、τ_x、σ_α、τ_α 和角度 α 均为正值，而 τ_y 则为负值。

公式(9-1)还可用来计算如图 9-6 所示单元体的斜截面 ce 上的应力。此时，可令 $\sigma_x=\sigma_1$、$\sigma_y=\sigma_2$、$\tau_x=\tau_y=0$，代入公式(9-1)后，

得到

$$
\boxed{\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\alpha\end{aligned}} \tag{9-2}
$$

利用上式，可由已知二主应力σ_1、σ_2，求得任意斜截面上的应力σ_α、τ_α。

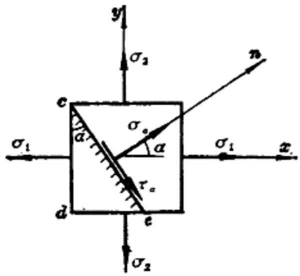
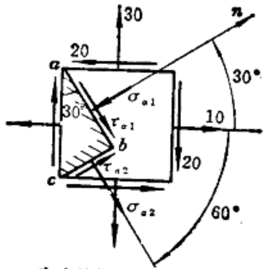


图 9-6



应力单位: MPa

图 9-7

例题 9-1 单元体上的应力如图 9-7 所示，其铅垂方向和水平方向各平面上的应力为已知，互相垂直的二斜面 ab 和 bc 的外法线分别与 x 轴成 30° 和 −60° 角。试求此二斜面 ab 和 bc 上的应力。

解: 按应力和夹角的符号规定，此题中 $\sigma_x=+10\text{MPa}$，$\sigma_y=+30\text{MPa}$，$\tau_x=+20\text{MPa}$，$\tau_y=-20\text{MPa}$，$\alpha_1=+30°$，$\alpha_2=-60°$。

(1) 求$\alpha_1=+30°$斜截面上的应力　将有关数据代入公式(9-1)，可得此斜截面上的正应力为

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\alpha_1} &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha_1-\tau_x\sin 2\alpha_1 \\
&= \frac{10+30}{2}+\frac{10-30}{2}\cos 60°-20\sin 60°
\end{aligned}
$$

$$=20-10\times0.5-20\times0.866$$

得 $$\sigma_{\alpha_1}=-2.32\text{MPa}$$

在此斜截面上的剪应力为

$$\tau_{\alpha_1}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha_1+\tau_x\cos2\alpha_1$$

$$=\frac{10-30}{2}\sin60^\circ+20\cos60^\circ$$

得 $$\tau_{\alpha_1}=-10\times0.866+20\times0.5$$

$$=+1.33\text{MPa}$$

所得正应力 σ_{α_1} 为负值，表明它是压应力；剪应力 τ_{α_1} 为正值，其方向如图 9-7 所示。

(2) 求 $\alpha_2=-60^\circ$ 斜截面上的应力　由公式(9-1)可求得此斜截面上的正应力和剪应力为

$$\sigma_{\alpha_2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha_2-\tau_x\sin2\alpha_2$$

$$=\frac{10+30}{2}+\frac{10-30}{2}\cos(-120^\circ)-20\sin(-120^\circ)$$

$$=20-10\left(-\frac{1}{2}\right)-20(-0.866)$$

得 $$\sigma_{\alpha_2}=+42.32\text{MPa}$$

$$\tau_{\alpha_2}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha_2+\tau_x\cos2\alpha_2$$

$$=\frac{10-30}{2}\sin(-120^\circ)+20\cos(-120^\circ)$$

$$=-10(-0.866)+20\left(-\frac{1}{2}\right)$$

得 $$\tau_{\alpha_2}=-1.33\text{MPa}$$

由上面计算结果，可得两互相垂直平面上的应力关系为

$$\sigma_{\alpha_1}+\sigma_{\alpha_2}=\sigma_x+\sigma_y=+40\text{MPa}$$

$$\tau_{\alpha_1}=-\tau_{\alpha_2}=+1.33\text{MPa}$$

第一式表明，单元体的两互相垂直平面上正应力之和是不变的。第二式则表明，单元体的两互相垂直平面上剪应力数值相等，而方向相反，此即第四章中剪应力互等定理公式(4-3)。这两点结论也可直接利用公式(9-1)加以证明。

例题 9-2 一单元体如图 9-8 所示，已知二主应力值及其方向。试求图示斜截面上的应力。

解：按主应力排列顺序及斜截面角度的规定，$\sigma_1=+80\text{MPa}$、$\sigma_2=0$、$\sigma_3=-50\text{MPa}$、$\alpha=+60^\circ$，代入公式(9-2)中，并将式中的 σ_2 用 σ_3 替换后，可得

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\alpha$$

$$=\frac{80+(-50)}{2}+\frac{80-(-50)}{2}\cos 120^\circ$$

$$=15+65\left(-\frac{1}{2}\right)$$

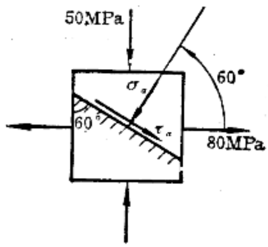


图 9-8

得 $\sigma_\alpha=-17.5\text{MPa}$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\sin 2\alpha$$

$$=\frac{80-(-50)}{2}\sin 120^\circ$$

$$=65\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

得 $\tau_\alpha=56\text{MPa}$

$\alpha=+60^\circ$ 斜截面上的压应力及剪应力的方向，如图 9-8 所示。

习题：9-1、9-2c、9-3、9-4b、9-5a、9-6、9-7。

§9-3　用图解法求二向应力状态斜截面上的应力

在上节中，用解析法分析了单元体任意斜截面上的应力。本节将用图解法来解决同样的问题。这种方法是通过简单的作图来代替解析法中的一些代数运算。现将图解法的原理和作法分述如下：

一、原理

由公式(9-1)可知，任一斜截面上的应力 σ_α 及 τ_α 都是以 2α 为参变量而变化的，因此，σ_α 与 τ_α 之间必存在一定的函数关系，若消去公式中的 $\sin 2\alpha$ 与 $\cos 2\alpha$，就可得到它们的关系。为此，将公式(9-1)的第一式改写成

$$\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha \tag{a}$$

将式(a)与公式(9-1)第二式各自平方，然后相加，得

$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\alpha^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2 \tag{b}$$

式中，由于单元体上的应力 σ_x、σ_y 和 τ_x 的值为已知，故 $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$ 及式(b)的右端各项均为定值。

由解析几何得知，圆的一般方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \tag{c}$$

比较式(b)与(c)，可知 σ_α 与 τ_α 的关系式(b)也是一个圆。如果取横坐标表示 σ，纵坐标表示 τ，则式(b)所表示的 σ_α 与 τ_α 之间的关系，是以 $\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}、0\right)$ 为圆心，以 $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$ 为半径的一个圆(图 9-9)。这样，在此圆周上任意一点的坐标，就代表受力构件

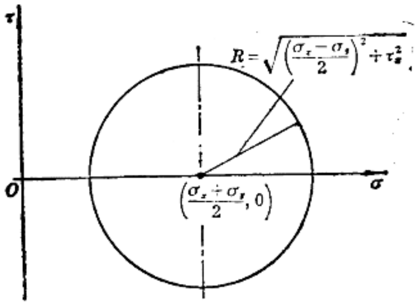


图 9-9

一点处相应斜截面上的应力σ_α及τ_α。这个圆称为应力圆，因为是德国学者莫尔(O. Mohr)于1882年首先提出的，故又称莫尔圆。

二、作图法

设从受力构件中一点处所取单元体如图9-10a所示，根据其上的已知应力σ_x、τ_x、σ_y、τ_y，可画出此单元体的应力圆，其作图步骤如下：

1. 先画$O\sigma\tau$直角坐标系，横轴σ向右为正，纵轴τ向上为正，如图9-10b所示。

2. 设单元体上的应力$\sigma_x>\sigma_y>0$、$\tau_x>0$，则在平面ab和cd上的应力σ_x和τ_x都为正值，取适当比例尺，在横轴σ上，从原点O向右量取$\overline{OA}=\sigma_x$，再向上量取$\overline{DA}=\tau_x$，可得D点。

3. 因在单元体的平面bc和ad上，正应力σ_y为正值，而剪应力τ_y为负值，以相同比例尺，在横轴σ上，向右量取$\overline{OB}=\sigma_y$，再向下量取$\overline{BD'}=\tau_y$，得D'点。

4. 连接$\overline{DD'}$线交横轴σ于C点，以C点为圆心，$\overline{CD}$为半径，即可作出应力圆，如图9-10b所示。

若求单元体上外法线n与x轴成α角的斜截面上的应力σ_α及

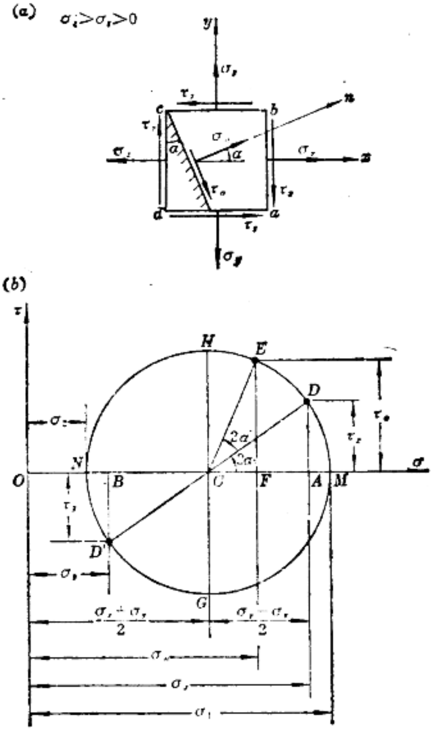


图 9-10

τ_α(图 9-10a),则可自应力圆上D点沿圆周逆时针方向转一圆心角2α,得圆周上一点E。E点的坐标即表示所求斜截面上的应力。证明如下:

从图 9-10b 可知,应力圆上E点的横坐标为

$$\begin{aligned}\overline{OF} &= \overline{OC} + \overline{CF} \\ &= \overline{OC} + \overline{CE}\cos(2\alpha_0 + 2\alpha) \\ &= \overline{OC} + \overline{CD}\cos(2\alpha_0 + 2\alpha) \\ &= \overline{OC} + (\overline{CD}\ \cos 2\alpha_0)\ \cos 2\alpha -\end{aligned}$$