线性代数引论

蓝以中 编

北京大学出版社

O151.2
2

线性代数引论

蓝以中 编

北京大学出版社

11473

内 容 简 介

本书针对非数学专业学生的特点，由具体而抽象，由特殊到一般，深入浅出地阐述了线性代数的基本内容。每节附有习题，书末附有习题答案。

全书包括线性方程组，矩阵代数，行列式，线性空间，线性变换，双线性函数与二次型，欧氏空间，酉空间与满秩双线性度量空间等八章。可供综合大学物理类专业和理工院校作线性代数教材，也可供数学专业作为高等代数课基础部分的教材。本书也适合自学者阅读。

线性代数引论

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
850×1168毫米 32开本 12.75印张 324千字
1981年8月第一版 1981年8月第一次印刷
印数：25000册

统一书号：13209·21 定价：1.55元

前　言

近年来，由于自然科学和工程技术的迅速发展，特别是由于电子计算机的普遍使用，使得线性代数得到日益广泛的应用，因而也就对综合大学和理工院校线性代数课的教学内容提出了越来越高的要求。通过线性代数课程的教学，除了让学生了解一些基本的线性代数计算问题之外，还应当进一步使他们对于线性代数的基础理论有较深的了解，以便融汇贯通地运用线性代数的工具去解决理论上和实践中遇到的各种问题。

在我国综合大学和理工院校的高等数学课程中，线性代数一般安排在微积分之后，因而学习线性代数时，学生已经有了一定程度的数学训练。但从教学实践中看，学生从微积分转到学习线性代数时，仍然感到比较困难。这其中一个主要的原因是线性代数中所研讨的 n 维向量、矩阵、线性空间、线性变换，与学生在前面课程中已经熟悉的实数及其代数运算差别很大，初学者往往感到难于理解。因此，一本较适用的线性代数教材，一方面应当具有足够的理论深度，以满足近代自然科学和工程技术的需要；另一方面，又应当尽可能由浅入深，使初学者感到入门并不难，从而提高深入掌握其基本理论和基本方法的信心。

本书就是根据以上的认识编写的。既包括了与综合大学数学系线性代数课程大致相同的内容，在阐述上也保持了数学专业教材所应有的逻辑上的严格性；同时，又较多地照顾到非数学专业的学生和非数学专业工作者的特点，对于线性代数基本概念的引入和基本命题的阐述尽可能详尽，由具体而抽象，力求使之通俗易懂，不使初学者望而生畏。在读者理解和掌握了线性代数的基本概念和方法之后，再逐步加深内容，使达到必要的理论高度。

本书共包含八章，其中带＊号的章、节和段落是属于选讲的内容。如果教学计划中线性代数课时可达60学时左右（不包括习题课），预计可以讲完前七章的全部内容。如果仅有50学时左右，则可略去第七章和前六章中带＊号的大部分节和段落。而如果仅有30—40学时，则建议讲授第一、二章全部，第三章§1和§2（略去行列式性质的证明），第四章§1，§2以及子空间的概念，第五章§1，§2，§3，第六章§1，§2。

本书删去了λ-矩阵的理论。因为对于非数学专业的学生，它用处不大而又难于掌握，勉强讲授往往事倍功半。而对于数学专业的学生，这一部分内容又可以在将来的抽象代数课程中从更高的观点上得到简单明了的处理。因此，本书对矩阵的若当标准形只作了叙述而略去有关定理的证明。考虑到在实际工作中可能需要计算低阶矩阵的若当标准形，在第五章§4中添加了求二、三阶矩阵的若当标准形一段。此段内容仅供参考，可不作为教学内容。

在本书中，定理按章编号，命题和例题按节编号。在行文中，当需要跨章引用前面的命题或定理时，就指明是第几章的命题或定理。如无说明，则所引用的均是该章的命题或定理。一个命题或定理证明完毕时，以“▌”号表示之。

本书是以作者近年来在北京大学物理类专业讲授线性代数时的讲稿为基础写成的。在编写过程中，得到丁石孙同志的热情指导与帮助，他并仔细地审阅了全书，提出了许多宝贵的修改意见，从而使本书的质量得以有很大的提高，作者在此向他表示衷心的感谢。本书中吸收了北京大学数学系几何代数教研室代数小组所编《高等代数》一书中的许多习题，在此一并致谢。

由于作者水平的限制，书中不当和错误之处一定不少，诚恳地希望读者批评指正。

编　者

一九八一年元月于北京大学

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章 线性方程组

引 言

读者在中学的课程中已经熟悉了有关二元一次方程组和三元一次方程组的基本知识。本章的任务，是要对中学里学过的这些知识从理论上加以总结和提高。

二元一次方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{1}$$

在解析几何中我们已经知道：在平面直角坐标系内，每个二元一次方程代表一条直线。由于这个原因，一次代数方程也称为线性方程。今后，我们将未知量的一次方程统称为线性方程（不管未知量的数目有多少）。

读者已有的关于二元和三元线性方程组的知识大致有如下两个方面：

（1）方程组的求解方法。在中学代数课程中已经指出：解二元和三元线性方程组的最基本的方法是消元法（代入消元法或加减消元法）。例如，从二元线性方程组（1）中设法消去未知量 y，得到未知量 x 的一个一元一次方程，解出这个一元一次方程得到 x 的值，再代回原方程组求未知量 y 的值。这个方法也适用于三元线性方程组，只是这时要想法消去两个未知量，才能得到一元一次方程。

（2）方程组解的状况的讨论。在平面解析几何中，方程组（1）的一组解代表两条直线的一个公共点。因此，不难看出，

方程组(1)的解可能出现下列三种情况：(i)两直线相交，这时方程组有唯一解；(ii)两直线平行而不重合，这时方程组无解；(iii)两直线重合，这时方程组有无穷多组解。同样,因为在空间直角坐标系内，每个三元线性方程代表一个平面，所以，给定如下三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases} \qquad (2)$$

则它的每一组解代表三个平面的一个公共点。利用几何直观不难看出，方程组(2)的解可能出现下列三种情况：(i)三个平面相交于一点(例如三个坐标平面相交于坐标原点),这时方程组有唯一解；(ii)若三个平面中有某两个平行而不重合，这时方程组无解；(iii)三个平面相交于一直线或三个平面互相重合，这时方程组有无穷多组解。

在自然科学和工程技术中，常常需要处理几十、几百甚至成千上万个未知量的线性方程组；这就要求我们把关于二元和三元线性方程组的上述两个方面的知识推广到有 n 个未知量的线性方程组上去。在这一章里，我们就要来解决这个问题。具体地说，我们将要对 n 个未知量的线性方程组作如下两个方面的研究：

第一方面,是从理论上探讨下列三个问题：(1)一个线性方程组在什么情况下有解,什么情况下无解？(2)若有解，则有多少组解？(3)在有许多组解(例如有无穷多组解)的情况下,解与解之间存在什么关系？

第二方面，是对有解的线性方程组探讨求解的方法，也就是把上面提到的消元法理论化、规格化，使它适用于有许多未知量的线性方程组。

由于上述第二方面的问题比较简单，所以，我们将首先探讨第二方面的问题。即先研究线性方程组的求解方法，然后再回过头来研究线性方程组的一般理论问题。

§1 矩阵消元法

现在我们来介绍求解线性方程组的矩阵消元法。这个方法是一个古典的方法，具有悠久的历史，但由于它行之有效，至今仍然是求解线性方程组的最基本方法之一。这个方法中所包含的基本思想，在线性代数的其它一系列理论问题和计算问题中也将发挥重要的作用。

因为我们下面将要研究的线性方程组具有 n 个未知量，我们不可能用 x，y，z，…等不同字母来代表它。因此，下面我们用一个字母带上不同脚标来代表不同的未知量。例如，用 x_1，x_2，…，x_n代表 n 个未知量。这时，有 n 个未知量 m 个方程的线性方程组的一般形式可表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

在这个方程组中，未知量前面的系数带有两个脚标，第一个脚标代表它在第几个方程，第二个脚标代表它是第几个未知量的系数。所以，a_{ij}代表的是第 i 个方程中未知量 x_j 的系数。方程组(1)中等式右端的 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 称为**常数项**。在这个方程组中，方程的个数 m 没有限制，可以小于 n，可以等于 n，也可以大于 n。

在线性方程组(1)中，如果让未知量取一组确定的数值：

$$x_1=k_1,\ x_2=k_2,\ \cdots,\ x_n=k_n,$$

代入方程组后使它转化为恒等式，则这一组数称为方程组(1)的**一组解**。

下面，我们就来具体讨论线性方程组(1)的求解方法。

矩阵消元法的原理

所谓矩阵消元法，是以下面的定义和一个命题作为理论基础的一种解线性方程组(1)的方法。

定义 方程组(1)作如下三种变换：

(i)互换两个方程的位置；

(ii)把某一个方程两边同乘一个非零常数 c；

(iii)把某一个方程加上另一方程的 k 倍。

上述三种变换中的每一种都称为线性方程组(1)的**初等变换**。

应当指出：线性方程组的初等变换是可逆的。也就是说，如果经过一次初等变换把方程组(1)变成一个新方程组，那么，新方程组必可经一次初等变换变为原方程组(1)。这可以具体讨论如下：

1. 如果互换方程组(1)中第 i, j 两方程的位置，则对新方程组再互换 i, j 两方程的位置就变回原方程组(1)；

2. 如果把方程组(1)的第 i 个方程乘以非零常数 c，那么，只要把新方程组的第 i 个方程乘以 $1/c$ 就变回原方程组(1)；

3. 如果把方程组(1)的第 j 个方程加上第 i 个方程的 k 倍，那么，只要把新方程组的第 j 个方程加上第 i 个方程的 $(-k)$ 倍就变回原方程组(1)。

显然，如果方程组(1)经过若干次初等变换化为一个新方程组，那么，新方程组也可以经若干次初等变换化为原方程组(1)。另外还应指出，在作初等变换的过程中，方程组中方程的个数既不增加，也不减少。

命题1.1 设方程组(1)经过某一初等变换后变为另一个方程组，则新方程组与原方程组同解。

证 设方程组(1)有一组解

$$x_1=k_1,\ x_2=k_2,\ \cdots,\ x_n=k_n. \tag{2}$$

代入(1)之后得到 m 个恒等式

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1n}k_n=b_1, \\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2n}k_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}k_1+a_{m2}k_2+\cdots+a_{mn}k_n=b_m. \end{cases}$$

对这组恒等式作相同的变换，得到一组新恒等式（也有 m 个），它恰好是把(2)式代入新方程组所得的结果。由此可知：原方程组(1)的任一组解都是新方程组的解。

反过来，因为新方程组也可以经过适当的初等变换化为原方程组(1)。所以按同样的道理，新方程组的任一组解也是原方程组(1)的解。于是两方程组同解。 ▌

下面举几个例子来具体说明如何利用命题 1 1 来解线性方程组。

例1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_2-x_3=1, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1+x_2-x_3=-2. \end{cases}$$

解 对方程组相继作初等变换。

(i) 调换第 1 、2 两方程的位置，得

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_2-x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=-2. \end{cases}$$

(ii) 把上面的方程组第 3 个方程加上第1个方程的 (-2) 倍，得

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_2-x_3=1, \\ 3x_2-3x_3=-2. \end{cases}$$

上面两次初等变换的目的是使方程组第 1 个方程保留 x_1，而第 2 、3 个方程中未知量 x_1 都不出现（即其系数为零）。

(iii) 把 (ii) 中的方程组的第 3 个方程加上第 2 个方程的

(-1)倍，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

(iv) 再把上面的方程组中第 2 、3 两方程对换位置，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

(v) 把上面的方程组的第 3 个方程加上第 2 个方程的(-2)倍，得

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ x_2 - 2x_3 &= -3, \\ 3x_3 &= 7. \end{aligned}$$

最后所得的方程组具有这样的特点：自上而下看，未知量的个数依次减少，成为阶梯形状（上面用虚线标出阶梯形）。只要从它的第 3 个方程解出 x_3，代入第 2 个方程解出 x_2，再代入第 1 个方程解出 x_1，就得到方程组的解

$$x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{3}, \quad x_3 = \frac{7}{3}.$$

根据命题1.1，上面各个步骤中所得的每一个方程组都与原方程组同解，故最后方程组的这一组唯一的解就是原方程组的唯一解。

上面这个简单例子代表了用消元法解线性方程组的一般方法和计算格式。它的基本思想是：反复利用方程组的初等变换以把方程组转化成阶梯形状的方程组。

读者不难发觉到，在上面的运算过程中，只是对方程组的系数进行运算，而未知量 x_1，x_2，x_3 在整个过程中未参加任何计算。因此，每一步都把它们逐一写出完全是多余的累赘。在计算

中完全可以把它们先隐去．只是这时要注意不要打乱了系数的排列顺序．基于这一认识，我们把例 1 的方程组简化成如下的 3 行 4 列长方表格

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

这个表格称为一个 3 行 4 列矩阵，简称为 3×4 矩阵．它的每个横排称为行，竖排称为列．现在，它的每一行代表原方程组的一个方程，第 1 、2 、3 列分别代表各方程中 x_1，x_2，x_3 的系数，第 4 列代表常数项．

于是，例 1 的解方程的各个步骤现在可简写成如下形式（用箭头⟶表示一次初等变换）

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

等到把矩阵变成阶梯形后，再写出它代表的方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad x_2 - 2x_3 = -3, \\ \qquad\qquad 3x_3 = 7. \end{cases}$$

求解最后的阶梯形方程组即得原方程组的全部解．这种方法就称为**矩阵消元法**．

在熟悉了矩阵消元法的思路和计算格式之后，在实际计算时

可把几次初等变换一步完成。

例2 解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_2-3x_3=3. \end{cases}$$

解 利用矩阵消元法

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

其中第 1 个箭头表示利用第 1 行消去第 2、3、4 行中 x_1 的系数；第 2 个箭头表示：把第 2 行加到第 4 行，然后以 (-1) 乘第 2 行，最后再以 $(1/4)$ 乘第 3 行，等等。在计算中要注意初等变换的先后次序，以免混乱，出现错误。例如，在上面第 2 个箭头的计算中，把第 2 行加到第 4 行后，第 4 行已经变成（0 0 4 7），只能以它为基础接下去再做变换。如果忽略这一点，还用原来的第 4 行又加到第 2 行，把整个矩阵变成

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

这就错了。

现在把最后阶梯形矩阵对应的方程组写出

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1, \\ \qquad x_2-4x_3=-3, \\ \qquad\qquad x_3=\ \ 1, \\ \qquad\qquad 0\ =\ \ 3. \end{cases}$$

这是一个矛盾方程组，无解。故原方程组也无解。

例3 讨论下面线性方程组解的状况

$$\begin{cases} x_1+\ x_2\qquad\quad -3x_4-\ x_5=0, \\ x_1-\ x_2+2x_3-\ x_4\qquad\ \ =0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$$

解 这个方程组的常数项都是零，在消元过程中显然也永远是零，因此可以不写出来，只要写出未知量的系数所成的矩阵就可以了

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

现在有 5 个未知量，计算显然复杂一些。为了避免计算中出错，可以采用加校正项的办法。这就是：把上面矩阵中每一行元素加在一起放在该行的最后，得到一个 4 行 6 列的新矩阵（为防止校正项和前面的方程组系数混淆，可用虚线隔开），然后对新矩阵作消元法。在消元过程中，每一步都保持着每行前 4 个数之和等于第 5 个数的性质。如发现某一行破坏了这一点，那就证明该行计算错了（这个方法对常数项不为零的方程组也适用）。

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right)\longrightarrow$$

$$
\longrightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\
0 & -2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\
0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 15 \\
0 & 2 & -2 & 10 & -5 & 5
\end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\
0 & -2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 9 & -3 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 8
\end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\
0 & 2 & -2 & -2 & -1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2
\end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\
0 & 2 & -2 & -2 & -1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

再写出它所对应的方程组（注意常数项为零）

$$
\begin{cases}
x_1+x_2 \qquad\quad -3x_4-x_5=0, \\
\qquad 2x_2-2x_3-2x_4-x_5=0, \\
\qquad\qquad\qquad\quad 3x_4-x_5=0.
\end{cases}
$$

最后一个方程是$0=0$，可以不写出来。现在把位于阶梯形的角上的未知量x_1，x_2，x_4保留在方程的左端，其余未知量x_3，x_5移到方程的右端，得

$$
\begin{cases}
x_1+x_2-3x_4= \qquad x_5, \\
\quad 2x_2-2x_4=2x_3+x_5, \\
\qquad\quad 3x_4= \qquad x_5.
\end{cases}
$$

在这个方程组中，x_3与x_5任取一组值代入，都能唯一地确定出x_1，x_2，x_4的值，从而得到原方程组的一组解。x_3，x_5称为**自由未知量**。这时方程组有无穷多组解。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com