

陈振宣 杨象富 主编

我自己能够
思考

WoZiJiNengSou

Sikao



初中 数学 题解

辨析手册



上海遠東出版社

初中数学题解辨析手册

主编 陈振宣 杨象富

上海远东出版社

157

13
1:

初中数学题解辨析手册

主 编/ 陈振宣 杨象富

责任编辑/ 汪维范

装帧设计/ 鲁继德

责任出版/ 晏恒全

责任校对/ 吴明泉

出 版/ 上海远东出版社

(200336) 中国上海市仙霞路 357 号

<http://www.ydbook.com>

发 行/ 新华书店 上海发行所

上海远东出版社

排 版/ 上海希望电脑排印中心

刷/ 上海市印刷十厂

装 订/ 上海望新印刷厂

版 次/ 2000 年 3 月第 1 版

印 次/ 2001 年 7 月第 3 次印刷

开 本/ 787 × 1092 1/32

字 数/ 252 千字

印 张/ 11.25

印 数/ 10201 - 21200

ISBN 7 - 80613 - 774 - 2

G·630 定价: 13.00 元

前 言

我国著名的数学家和数学教育家傅种孙先生曾深切提醒教师：“教学的技艺，一方面要指示正规，一方面要矫正错误，必须兼施并用，才会有较好的效果。”“针对学生容易犯的错误，希望他们免除这些毛病。”

新颁数学教学大纲，明确指出“学生是学习的主体”，“教学要按照学生学习的规律和特点，从学生的实际出发”，要引导学生“弄清产生错误的原因并及时加以改正”，教师要“作必要的评析”，“对解题的思想方法作必要的概括。”

本书正是根据上述指导思想，通过广泛搜集和筛选、精心编写而成，力图体现如下特色：

（一）实用性：以现行大纲和教材为依据，针对当前学生学习实际，突出重点，抓住关键，解决难点，并注意与教材的同步性，使学生受到切实启迪，为教师提供实用资料。

（二）典型性：正解的种数不会很多，而错误可以“百出”，我们挑选其中有较深教育意义，并具有代表性、普遍性的典型，加以辨析讲评，有时甚至故意夸张，使常犯错误显得荒谬，让读者加深印象。

（三）概括性：思维的最显著特点是概括，唯有“以百归一”的“一”，才可能发挥“以一总百”的作用。概括归纳才会发现有时百错同根，殊途同归；有时形同实异，形异实同；有时对中有错，错中有对。概括才能把书读“薄”，把理识透。

（四）指导性：错解剖析常被视为是消极的辨误和被动的检验，本书的“辨析”与“练习”两个栏目则力图变消极为积极，变被动为主动。英国心理学家巴特利特(F. C. Bartlett)说过：“测定智力技能的唯一最佳标准可能是检测并摒弃谬误的速度。”因此，本书着意发展学生的自我纠错能力，引

引导学生重视基础知识和基本技能,体会和运用基本的数学思想方法,把知识、思维和技能熔于一炉,经纬交织,相互促进,使读者从辨析入手,最终达到提高解题水平和解题兴趣的目的。

(五)多样性:本书所选题目多姿多态,各尽其用;基础题、中档题、较难题适当搭配,使各类读者都开卷有益;各章都有一定数量的应用题、探索题和名题、趣题,意在真正全面提高学生的数学素质。

编完全书,审视全部数百道典型题目的种种错解,分析其原因,似乎不外乎如下十一种:概念不清,审题不细,算理不明,推理不当,思考不周,计算不对,作图不准,思路不佳,表达不善,意志不坚,注意力不集中。归纳起来,可认为是四类错误:知识性错误,逻辑性错误,策略性错误,心理性错误。如果我们师生共同努力,时时警惕,坚持从知识、逻辑、策略、心理四方面要求自己,我们深信一定会把学生的数学素质提高到一个新的水平。

本书由资深研究员陈振宣和著名特级教师杨象富主编,参加编写的都是多年从教、潜心研究的教师,编写代数的为鲍小曼(第一章,第十四章)、林红年(第三章)、杨水木(第四章)、朱美仙(第六章)、王才苗(第二章)、叶素华(第五章)、戴仲林(第七章)、郑邦明(第九章)、王伟(第十章)、王朝尧(第十一章)、杨象富(第八章、第十二章)、施全汝(第十三章),编写几何的是任炳熹(第一章、第二章)、严焕祺、张莉萍(第三章)、季墨根、范人伊(第四章)、钟永年(第五章)、陈振宣(第六章)、李家元(第七章)。

虽已尽心竭力,倘有错漏不当之处,我们盼望师生和专家的赐教!

编者

1998年7月





目 录

代 数

第 一 章	代数初步知识	1
第 二 章	有理数	11
第 三 章	整式的加减	22
第 四 章	一元一次方程	31
第 五 章	二元一次方程组	45
第 六 章	一元一次不等式和一元一次不等式组	57
第 七 章	整式的乘除	68
第 八 章	因式分解	78
第 九 章	分式	93
第 十 章	数的开方	106
第十一章	二次根式	114
第十二章	一元二次方程	125
第十三章	函数及其图象	158
第十四章	统计初步	179
代数参考答案或提示		189

平 面 几 何

第 一 章	线段、角	212
第 二 章	相交线、平行线	224

第 三 章	三 角 形	241
第 四 章	四 边 形	259
第 五 章	相 似 形	280
第 六 章	解 直 角 三 角 形	312
第 七 章	圆	327
平面几何	参 考 答 案 或 提 示	346

代 数

第一章 代数初步知识

题 1 用字母 a 、 b 、 c 表示任意三个数,对于表中所述的五个运算律,下列说法正确的是 ().

	加 法	乘 法
交换律	① $a + b = b + a$	② $a \cdot b = b \cdot a$
结合律	③ $(a + b) + c = a + (b + c)$	④ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
分配律	⑤ $a(b + c) = ab + c$	

(A) 都正确 (B) ③和⑤不正确

(C) ④和⑤不正确 (D) 只有⑤不正确

【辨析与解答】 五个运算律是“数的通性”,用字母表示运算律不仅具有普遍性,且更简洁明了.分配律是指:一个数同两个数的和相乘等于把这个数分别同这两个数相乘,再把积相加.而式⑤中,数 a 只同数 b 相乘而未同数 c 相乘,因此式⑤不成立.用字母表示分配律应是: $a(b + c) = ab + ac$.

表中其余各式都正确,故应选(D).

【练习】 1. 用运算律计算:

(1) $36 + 369 + 64 + 131$; (2) $25 \times 16 \times 0.125$;

$$(3) \left(\frac{7}{18} + \frac{21}{20} + \frac{14}{45} \right) \times 2 \frac{1}{7}.$$

2. 用字母表示分数的基本性质.

题2 下列各等式中,成立的是 ().

(A) $(a - b) - c = a - (b - c)$

(B) $(a \div a) \div a = a \div (a \div a)$

(C) $(a + b) \div c = a \div c + b \div c$

(D) $a \div (b + c) = a \div b + a \div c$

【错解】 (A)、(D).

【辨析与解答】 对于减法和除法,五个运算律一般不成立.只有把减法转化为加法(下一章将学到),除法转化为乘法后,才能应用运算律.

由于式中各字母表示任意数,只需用具体的数值代替式中的字母进行计算,就能说明(A)、(B)、(D)不成立.(所用的数值,要求适当、简单,一般不同的字母用不同的数值代替)

把(C)中左边的除数换成倒数,就能把除法转化为乘法,再利用分配律可得到右边.

$$(a + b) \div c = (a + b) \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = a \div c + b \div c.$$

所以选(C).

【练习】 3. 下列各题的计算是否正确? 如不正确,请指出错在哪一步,并给出正确的计算:

(1) $0.72 \div (18 \times 10) = 0.72 \times 10 \div 18 = 7.2 \div 18 = 0.4;$

(2) $9.725 - 0.725 \times 7 = (9.725 - 0.725) \times 7 = 9 \times 7 = 63;$

(3) $\frac{1}{32} \div 1.25 + \frac{1}{32} \div 0.25 - \frac{1}{32} \div 0.5$

$$= \frac{1}{32} \div (1.25 + 0.25 - 0.5) = \frac{1}{32}.$$

4. 用字母表示同分母分数相加法则.

题3 在式子 $1, a, 6 \div 2, 2 + 3, \frac{s}{t}, v = \frac{S}{t}, a^2, a > b, 4a + b$ 中, 下列说法正确的是 ().

(A) 都是代数式

(B) 除了 1 以外, 都是代数式

(C) 除了 $v = \frac{s}{t}, a > b$ 外, 都是代数式

(D) 除了 $1, v = \frac{s}{t}, a > b$ 外, 都是代数式

【错解】 (B).

【辨析与解答】 单独的一个数或者单独的一个字母以及用运算符号(运算包括加、减、乘、除、乘方、开方)把数或表示数的字母连接而成的式子都叫做代数式. 而等号、不等号不是运算符号, 由它们连接而成的关系式 $v = \frac{s}{t}, a > b$ 不是代数式, 故应选 (C).

【练习】 5. 在式子 $0, m, \frac{1}{a^2}, a^2b - 1, a - b > 0, x^2 - x = 0$ 中, 代数式的个数为 ().

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

题4 说出下列代数式的意义:

(1) $\frac{a+b}{2}$; (2) $\frac{1}{a} - b$; (3) $a^3 + b^3$.

- 【错解】 (1) a 与 b 的 $\frac{1}{2}$ 的和; (2) a 与 b 的差的倒数;
(3) a 与 b 的和的立方.

【辨析与解答】 错解在于没能按运算的顺序,即先进行的运算先说.代数式的意义常可有多种说法,只求简明而又不致引起误会.

- (1) a 与 b 的和除以 2 的商;
(2) a 的倒数与 b 的差(或 $\frac{1}{a}$ 与 b 的差);
(3) a 、 b 两数的立方和(或 a 、 b 的立方的和).

【练习】 6. 说出下列代数式的意义:

- (1) $\frac{1}{3}x - 1$; (2) $\frac{1}{3}(x - 1)$; (3) $xy + z$;
(4) $x(y + z)$; (5) $3(a^3 - b^3)$.

题 5 用代数式表示:

- (1) x 与 y 的差的 5 倍; (2) a 、 b 两数的和除 c 的商;
(3) 1 减去 x 的平方的差的 $\frac{1}{3}$;
(4) b 的 2 倍的平方与 a 的倒数的和.

- 【错解】 (1) $x - 5y$; (2) $\frac{a+b}{c}$;
(3) $1 - \frac{x^2}{3}$; (4) $\frac{1}{2b^2 + a}$.

【辨析】 列代数式是全章的重点和难点.学习将“日常语言”翻译成“代数语言”,是学好本章的关键,也为学习列方程解应用题做好铺垫.

列代数式首先要正确分析数量关系,要掌握“和、差、积、商、

平方、立方；倍、分、大、小，增加、增加到、减少、减少到，倒数”等数学概念和其他有关知识. 用代数式表示数量关系时，一般是“先读的先写”，即根据文字叙述的顺序写出代数式. 如果文字叙述的顺序与混合运算顺序不一致时，应加上括号来改变运算顺序. 错解 (1)、(3)、(4) 均应加上括号，(2) “除”与“除以”概念相混淆.

$$\begin{aligned} \text{【正解】} \quad (1) & 5(x-y); & (2) & \frac{c}{a+b}; \\ (3) & \frac{1-x^2}{3}; & (4) & (2b)^2 + \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

【练习】 7. 用代数式表示：

- (1) x 的 3 倍减去 y 的 $\frac{1}{2}$ 倍的差；
- (2) 比 a 的倒数小 3 的数；
- (3) 2 除以 m 的平方的商与 3 的和；
- (4) 1 加上 a 的立方的和的 $\frac{1}{3}$ ；
- (5) a 的平方的 2 倍与 b 的平方的差；
- (6) a 、 b 、 c 三个数的积的 3 倍减去 3 的差.

题 6 用代数式表示：

- (1) 与 a 的和是 1 的数； (2) 与 a 的差的 2 倍等于 3 的数；
- (3) 与 a 、 b 两数和的积的 $\frac{1}{2}$ 等于 S 的数；
- (4) 与 a^2 的和除以 b 的商等于 b 的数.

【错解】 (1) $1+a$ ； (2) $3-2a$ ；

$$(3) \frac{1}{2}(a+b)S; \quad (4) \frac{b-a^2}{b}.$$

【辨析】 此类题的特点是,已知运算结果,反过来求参与运算的某数.可根据加法与减法互为逆运算,乘法与除法互为逆运算来解答.

【正解】 (1) $1-a$; (2) $a+\frac{3}{2}$;

(3) $\frac{2S}{a+b}$; (4) b^2-a^2 .

【练习】 8. 用代数式表示:

- (1) 与 a 的差是 2 的数; (2) 与 a 的积是 3 的数;
(3) 除以 a 的商是 4 的数.

题 7 用代数式填空:

(1) 一个车间要制造 a 个零件,原计划每天制造 b 个,则要 _____ 天完成,如果每天比原计划多制造 d 个,那么可提前 _____ 天完成;

(2) 甲、乙两车分别以每小时 a 千米和 b 千米($a > b$)的速度从相距 s 千米的 A 、 B 两地同时出发,若相向而行,则 _____ 小时相遇;若同向而行,乙在前,则甲 _____ 小时可追上乙;

(3) 船顺流航行的速度为 x 千米/时,逆流航行的速度为 y 千米/时,甲、乙两码头相距 100 千米,往返一次共需要 _____ 小时;往返一次的平均速度是 _____ 千米/时.

【错解】 (1) $\frac{a}{b}, \frac{a}{b+d} - \frac{a}{b}$; (2) $\frac{s}{a} + \frac{s}{b}; \frac{s}{a} - \frac{s}{b}$;

(3) $\frac{200}{x+y}, \frac{x+y}{2}$.

【辨析】 由实际问题列出代数式,关键要掌握问题中的基本数量关系,如行程问题中,若用 v 表示速度, t 表示时间, s 表

示路程,则有基本关系式: $s = vt$, 它可变形为 $v = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{v}$. 又如工程问题中,有基本关系式: 工作量 = 效率 $\times$ 时间, 其实效率、工作量就相当于行程问题中的速度和路程. 列代数式,首先要仔细审题,弄清各数量之间的关系,在用基本关系式表示时,关系式中各数量必须是相应的,切忌张冠李戴. (1) 中的原计划完成的天数应作被减数; (2) 中 $\frac{s}{a}$ 是甲车从 A 到 B 所需时间, $\frac{s}{b}$ 是乙车从 B 到 A 所需的时间; (3) 中因顺流速度 = 静水速度 + 水流速度, 而逆流速度 = 静水速度 - 水流速度, 可见 $\frac{x+y}{2}$ 刚好是静水速度, 而平均速度 = $\frac{\text{总路程}}{\text{总时间}}$; 必须先算出总时间 = 顺流所用时间 + 逆流所用时间.

【正解】 (1) $\frac{a}{b}, \frac{a}{b} - \frac{a}{b+d}$; (2) $\frac{s}{a+b}, \frac{s}{a-b}$;
 (3) $\frac{100}{x} + \frac{100}{y}, \frac{200}{\frac{100}{x} + \frac{100}{y}}$.

【练习】 9. (1) 做某件工作, 每个人的工效相等, m 个人做 d 天可以完成, 若增加 r 人, 则完成工作所需的天数为 ().

(A) $d + r$ (B) $d - r$ (C) $\frac{md}{m+r}$ (D) $\frac{d}{m+r}$

(2) a 千克盐和 b 千克水混和成的盐水的浓度为 ().

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{a}{a+b}$ (C) $\frac{a}{a+b}\%$ (D) $\frac{b}{a+b}$

(3) 甲、乙两人同时同地相背而行, 甲每小时行 a 千米, 乙每小时行 b 千米, x 小时后, 二人相距 () 千米.

(A) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b}$ (B) $\frac{a}{x} + \frac{b}{x}$ (C) $ax + bx$ (D) $ax - bx$

题8 用代数式表示：

(1) 三个连续的整数；

(2) 被3除余2的数 a ，被3除余1的数 b ；并说明数 $a+b$ 能被3整除。

【错解】 (1) $a-1, b, c+1$ ；

(2) $a=3n+2, b=3n+1$,

$$a+b=(3n+2)+(3n+1)=6n+3=3(2n+1).$$

$\therefore$ 能被3整除。

【辨析】 在同一个问题中，不同的数要用不同的字母表示，而同一个字母表示相同的数。(1) 连续两个整数相差1，若中间一个用 n 表示，则另外两个分别是 $n-1$ 和 $n+1$ ，其中字母必须仍是 n 。(2) 中数 a 与 b 被3除的余数相差1，并不是说 a 与 b 的差是1，因此必须用不同的整数 n, m 来表示。

【正解】 (1) $n-1, n, n+1$ ；

(2) $a=3n+2, b=3m+1$ (n, m 是整数)

$a+b=(3n+2)+(3m+1)=3(n+m+1)$ ，而 $n+m+1$ 是整数，所以能被3整除。

【练习】 10. 设 n 表示任意一个整数，用含有 n 的代数式表示：

(1) 三个连续偶数； (2) 三个连续奇数；

(3) 被7除余3的数； (4) 被 q 除余 r 的数。

题9 根据下面 x, y, z 的值，求代数式 $\frac{x^2y - xy^2}{x+z}$ 的值。

(1) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{4}$ ； (2) $x = 0.5, y = 0.2, z = 0.3$ 。