工 程 数 学

概率论与数理统计

萧亮壮 谭锐先 编

国防工業出版社

内容简介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的"工程数学"七个分册之一，本册着重介绍概率论的基础知识和数理统计的常用方法，对马尔科夫过程及平稳随机过程也作了初步介绍。内容包括排列组合、事件的概率、随机变量、分布函数、数字特征、极限定理、随机过程初步、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等。各章附有适量习题，并附习题答案。

本书可作为高等工科院校试用教材，也可供有关科技人员参考。

概率论与数理统计

萧亮壮　谭锐先　编

*

国防工业出版社　出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$787 \times 1092^{1}/_{32}$　印张 9　189千字

1980年6月第一版　1982年6月第二次印刷　印数：23,201—40,700册

统一书号：15034·2054　　定价：0.94元

前　　言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的“工程数学”教材之一。全套教材分七册出版：矢量分析、复变函数、积分变换、线性代数、计算方法、数学物理方程与特殊函数、概率论与数理统计。

本册着重介绍概率论的基本概念、基本理论以及常用的数理统计方法，内容有：排列组合，事件概率、随机变量、分布函数、数字特征、大数定律、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等。对于在自然科学与工程技术中用得很多的两类随机过程：马尔科夫过程、平稳随机过程也作了初步介绍。书中加有“*”号的内容是供参考的。各章均附有适量习题，书后附习题答案。阅读本书只需具备一般高等数学知识。

本册概率论和马尔科夫过程部分由北京航空学院萧亮壮编写，平稳随机过程和数理统计部分由北京航空学院谭锐先编写；概率论和随机过程部分由西北工业大学林世明主审，数理统计部分由西北工业大学朱燕堂主审。参加本书审稿的还有南京航空学院、沈阳航空工业学院、南昌航空工业学院等院校数学教研室的同志。我们对在本书编写过程中给予大力支持和提供宝贵意见的所有同志，在此一并致以衷心的感谢。

由于我们的水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编　　者

目　　录

第一章　排列与组合

§1.1　排　　列

在日常生活或科学实验中，我们常常需要把一些不同的事物按一定次序排列起来，例如我们要试验三个不同小麦品种 A_1、A_2、A_3 的好坏，需要安排在三块试验田上试种，这就有许多种不同的安排方法，可以把 A_1 安排在第一块试验田，A_2 安排在第二块试验田，A_3 安排在第三块试验田，并把这种安排方法简记为 $A_1A_2A_3$。也可以把 A_1 安排在第一块试验田，A_3 安排在第二块试验田，A_2 安排在第三块试验田，并记这种安排方法为 $A_1A_3A_2$，如此，还可以得到 $A_2A_1A_3$、$A_2A_3A_1$、$A_3A_1A_2$、$A_3A_2A_1$ 等种安排方法。又如有两个乒乓球队，每队各出三个队员进行对抗赛，赛前各自把出场比赛的队员按次序１、２、３排好，然后按同号码的队员进行对抗赛，这样，每个队对出场比赛的队员就有许多种安排方法。这就是排列问题，下面给出它的定义。

定义1.1　把 n 个不同的事物（以后称为元素），依某种次序排成一列，称为**排列**。

（一）全排列

有 n 个元素，将它进行排列，如果每个排列中所有 n 个元素全需出现且每个元素只出现一次，这样的排列称为**全排列**。

对于 n 个不同的元素，它一共有几种全排列？

容易知道，一个元素 A，只有一种排列。两个元素 A 和 B，共有 2 种全排列，它们是 AB 和 BA。三个元素 A、B、C 的全排列是 ABC、ACB、BAC、BCA、CAB、CBA，一共有 6 种全排列。对于三个元素的全排列，我们可以把每个排列看作有三个位置，第一个位置可以是这三个元素中的任何一个，共有 3 种放法；第二个位置可以是剩下的二个元素中的任何一个，共有 2 种放法；第三个位置放进剩下的一个，有 1 种放法，因此，三个元素共有 $3\times2\times1=3!$ 种不同的全排列。

一般地，n 个不同元素的全排列种数是 $n!$。因为每个全排列共有 n 个位置，第一个位置可以是这 n 个元素中的任何一个，共有 n 种放法；第二个位置可以放进剩下的 $n-1$ 个元素中的任何一个，共有 $n-1$ 种放法；……；最后一个位置放进剩下的一个，只有一种放法。因此，n 个不同的元素一共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$ 种不同的全排列。我们用 P_n 来表示 n 个不同元素的全排列种数，则 $P_n=n!$。

〔**例 1**〕 把 5 本不同的书放到书架上，问有几种不同的排法？

解 这是全排列问题，易知

$$P_5=5!=120$$

因此，共有 120 种排法。

〔**例 2**〕 10个人排成一排，问有几种不同的排法？

解 不同的排法一共有

$$P_{10}=10!=3628800\text{种}$$

（二）选排列

从 n 个不同的元素 A_1，A_2，……，A_n 中任取 m $(m\leqslant n)$ 个进行排列，称为**选排列**。

用 A_n^m 表示这样的排列种数。现在就来求 A_n^m。

同前面求 P_n 相类似，每个排列共有 m 个位置，第一个位置可以是 n 个不同元素中的任何一个，共有 n 种放法；第二个位置可以是剩下的 $n-1$ 个元素中的任何一个，有 $n-1$ 种放法；……；第 m 个位置可以是剩下的 $n-m+1$ 个元素中的任何一个，有 $n-m+1$ 种放法，因此，总共有

$$n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)$$

种排法，即

$$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

〔**例 3**〕 由 1～5 等 5 个数字能组成多少个不同的三位数(每个数字在每一个三位数中只用一次)？

解 这就是选排列的问题，故不同的三位数一共有

$$A_5^3=5\times4\times3=60\text{个}$$

〔**例 4**〕 由 0～9 等 10 个数字中能组成多少个不同的四位数(每个数字在每个四位数中只使用一次)？

解 由于四位数的第一个位置不能为 0，故第一个位置只能是 1～9 等 9 个数字中的任何一个，有 9 种选法；四位数字的后三个位置是剩下 9 个数字中任取 3 个的排列，共有 A_9^3 种选法，因此所求四位数的个数是

$$9A_9^3=9\times9\times8\times7=4536$$

（三）其它排列法

除了上面所讲的全排列和选排列以外，我们还会遇到其

它的一些排列法，对这些排列法，我们用下面的例子来说明。

〔**例 5**〕 某农场为了试验 3 个不同小麦品种的收获量，需将每个品种安排在 2 种不同的土质上试种，试问需用多少块试验田？

解 显然，每个品种需要 2 块试验田，因此 3 个品种共需要 $2\times3=6$ 块试验田。

如果我们安排第一件事情有 m 种方法，安排第二件事情有 n 种方法，那么安排这两件事情一共有 mn 种方法。

一般地，如果有 k 件事情 A_1，A_2，……，A_k，完成 A_1 的有 n_1 种方法，完成 A_2 的有 n_2 种方法，……，完成 A_k 的有 n_k 种方法，则依次完成这 k 件事情一共有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$ 种不同的方法。

〔**例 6**〕 问以 277 为首的 6 位电话号码，最多有多少个？

解 因为每一个电话号码的前三位数字已确定，所以从第四位起，每一位可以从 0～9 这 10 个数字中任选一个，每一位可以有 10 种选法，故共有 $10\times10\times10=1000$ 种选法，这就是说，以 277 为首的电话号码，最多有 1000 个。

§1.2 组　合

在排列中，我们不仅考虑排列中的元素，而且注意到它的次序，换句话说，在排列中，尽管元素相同，但只要次序不同，就认为是不同的排列。然而，在实际中，有时只需要考虑参加排列的元素，而不管它们的次序，例如，从 100 件产品中，任取 3 件，问有几种取法？这类问题就是组合问题。

定义1.2 从 n 个不同的元素 A_1，A_2，……，A_n 中，任取 m（$m\leqslant n$）个作成一组而不管它们的排列次序怎样，称

每个组为一个组合。

从定义中可知，两个组合只要有相同的元素，不论次序如何，都认为是一样的。例如，$A_1A_2\cdots A_{m-1}A_m$ 与 $A_mA_{m-1}\cdots A_2A_1$ 是同一个组合。

我们用 C_n^m 表示从 n 个元素中任取 m 个进行组合的数目。

从 n 个元素中取 m 个进行排列，可以看成是“先取 m 个元素进行组合”，“再对这 m 个元素进行全排列”这样两个步骤的合成，故这些排列的总数是 $C_n^m\cdot m!$。另一方面，由前面可知，这些排列的总数是 A_n^m，因此有

$$C_n^m\cdot m! = A_n^m$$

即

$$C_n^m = A_n^m/m! = n!/(m!(n-m)!)$$

我们还可以给组合以另一种解释：从 n 个不同元素中任取 m 个进行组合可看成是把 n 个元素分成两组，一组 m ($m \leqslant n$)个，另一组 $n-m$ 个，不同的分法共有 $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ 种。

显然，从 n 个元素取 m 个进行组合和从 n 个中取 $n-m$ 个进行组合，这两种组合的个数是一样的，即有

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

由上式，当 $m=1$ 时，得 $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$。而当 $m=n$ 时，得

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!}$$

但按实际情况，从 n 个元素取 n 个的组合，只能有一种，因而有 $C_n^n = 1$，这样，我们就规定 $0! = 1$。

〔例 1〕 有 10 个球队进行单循环比赛，问需安排几场比赛？

解 这是从 10 个球队中任选 2 个进行组合的问题，故有

$$C_{10}^{2}=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10!}{2!8!}=45$$

即需安排 45 场比赛。

〔例 2〕 在一批含有 95 件好品，5 件次品的产品中，任取 10 件，其中恰有 2 件次品，问有几种不同的取法？

解 取出的 10 件中的 8 件好品，必须是从 95 件好品中抽取，有 C_{95}^{8} 种方法；2 件次品必须是从 5 件次品中抽取，有 C_{5}^{2} 种方法，因此总共有

$$C_{95}^{8}\cdot C_{5}^{2}=\frac{95!}{8!87!}\cdot\frac{5!}{2!3!}$$

种取法。

习 题 一

1．将 8 个人排成一队，问有几种不同的排法？

2．有男女学生各 3 人，将其排成一队，要求女生都排在一起，问有几种不同的排法？

3．将 6 个人分成 2 组，每组 3 人，能有多少种分法？

4．某班有学生 20 人，将其排成 2 队，每队 10 人，问有几种不同的排法？

5．袋中装有白球 5 个，黑球 4 个，从中任取 2 个，问有几种不同的取法？

6．某批产品有合格品 100 件，次品 5 件，从中任取 2 件，问有几种不同的取法？

7．从 1，2，3，4，5 等 5 个数字中，可以组成多少个不同的四位

数（在每个四位数中的各个数字只能出现一次）？

8．从甲地到乙地有四条路径，从乙地到丙地有三条路径，问从甲地经乙地到丙地一共有多少条不同的路径？

9．将6个男孩和4个女孩分成两组，每组有3个男孩和2个女孩，问有多少种分法？

10．某篮球队有10名队员，其中只有2人能打中锋，4人能打左右锋，4人能打后卫，问能组成多少种不同的阵容？

11．人民币的七种纸币（每种一张）能组成多少种不同的金额？

12．在八边形中有多少条对角线？

第二章　事件和概率

§2.1　基 本 概 念

（一）必然事件和不可能事件

在自然界里，有一些现象，我们完全可以预先知道在一定的条件下必然会发生，如大家都很熟知的事实：

1．在标准大气压下，水加热到100℃时必然会沸腾。

2．在没有外力作用下，作等速直线运动的物体必然继续作等速直线运动。

3．在常温下，木头不能自燃。

4．从手上抛出的石块，必定要落到地上。

上述例子可以陈述为这样一种形式："在某一组条件 S 实现之下，某一事件 A 必然发生。"这种在一定条件下，必然发生的现象，我们称它为**必然事件**。

反之，在一定条件下，必然不发生的现象，称为**不可能事件**。例如："在标准大气压下，水加热到100℃不会沸腾"，"人能长生不死"，这类现象肯定是不会发生的。

必然事件的反面就是不可能事件。我们用 Ω 来表示必然事件，ϕ 表示不可能事件。

（二）随机事件

在生产斗争和科学实验中，除了遇到上面所说的必然事件和不可能事件以外，还常常遇到与必然事件和不可能事件

本质不同的另一类现象，这些现象在某一组条件 S 实现之下，可能发生，也可能不发生，例如：

1．投掷一枚匀称的硬币，出现正面。

2．在一分钟内，一个电话总机至少接到 10 次呼唤。

3．明年的五月一日，天晴。

4．在一批杂有次品的产品中，任意抽取一件，恰好是次品。

上述的各个事件："出现正面"，"至少接到 10 次呼唤"，"天晴"，"恰好是次品"等等在一定条件下都不是必然事件或不可能事件。显然，投掷匀称的硬币，可能会出现反面；一个电话总机在一分钟内也可能是接到少于 10 次的呼唤；明年的五月一日有可能是下雨或者阴天；随意抽取一个产品可能是正品。

这种在一定条件下，可能发生，也可能不发生的事件，称为**随机事件**，简称**事件**。今后用字母 A，B 等表示事件。

（三）随机试验

为了探索随机现象的规律性，常常需要对随机现象进行观察，这种观察总是在一定的条件下进行的，我们把每次观察看做是一个试验，观察的结果就是试验结果。对于某些事件来说，在同一组条件实现下，多次进行试验，必然得到同一的结果，例如："在标准大气压下，水加热到 100℃"这组条件实现之下，不管谁来做试验，每次试验都能得到同一的结果："水沸腾了"。但是对于另外一些试验，尽管条件一样，其结果却不会都一样，如投掷一枚匀称的硬币，它究竟出现正面还是反面，我们就不能肯定的回答了，它可能出现正面，也可能出现反面。如果在同一组条件实现下，不一定得到同

一的结果，但是每一个可能的试验结果（如掷硬币得正面或反面是两个可能的试验结果）都有一定的出现机会，我们就说这个试验是一个**随机试验**，简称**试验**。

用E表示一随机试验，以ω表示试验的一个可能结果，称ω为E的一个基本事件。用Ω表示基本事件的全体，并记为$\Omega=(\omega)$。

一般地说，基本事件的全体Ω可以是由有限个基本事件所组成，也可以是无限多个基本事件所组成，甚至是某范围内的全体实数所组成。例如：

1．E——掷一枚匀称的硬币而观察所出现的面。用ω_1表正面，ω_2表反面，于是Ω由两个基本事件ω_1和ω_2所组成，即$\Omega=(\omega_1, \omega_2)$。

2．E——计算某电话总机在一天内所接到呼唤的次数。用ω_i表一天内接到i次呼唤，则$\Omega=(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots)$。

3．E——测量某零件的直径尺寸。用a表零件直径尺寸可能值的下限，b表可能值的上限，则$\Omega=([a, b])$。

（四）事件间的关系及其运算

在某些问题的研究中，我们常常不只研究一个事件，而是研究好些事件，而且这些事件之间又有着一定的联系，例如在一批包含有正品、次品的产品中，任意抽取三个，则下列都是事件：

A_1（至少有一个次品），A_2（恰有一个次品），A_3（至少两个次品），A_4（三个都是次品），A_5（至多一个次品），A_6（没有次品），A_7（至少有一个正品）等等。

上述事件之间有着一定的联系，如A_1发生，则A_6不会发生；A_6发生，则A_1就不会发生；A_4和A_7不会同时发生；

A_2如果发生，则A_1也必定发生；当且仅当A_2和A_3至少一个发生时，则A_1发生；当且仅当A_1和A_5都发生时，则A_2发生，等等。

下面引进事件间的几种主要关系及对事件的运算。

1．如果事件A发生，必然导致事件B的发生，则称**事件A包含于事件B**，记作$A\subset B$（或$B\supset A$），如上面例中的事件“恰有一个次品”就包含于事件“至少有一个次品”，即$A_2\subset A_1$。

如果$A\subset B$和$B\subset A$同时成立，就说**事件A与事件B相等**，记作$A=B$。

2．设A、B是两个事件，“事件A与B至少有一个发生”也是一个事件，我们称这个事件为**事件A与B的和**，记做$A+B$。上面例中的事件A_1就是事件A_2与A_3的和，即$A_1=A_2+A_3$。

一般地，事件A_1，A_2，……，A_n，……中至少有一个发生的事件，称为事件A_1，A_2，……，A_n，……的和，记做$A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$。

3．“事件A发生而事件B不发生”的事件，称为**事件A与B的差**，记做$A-B$。上面例中的事件A_2便是事件A_1与A_3的差，即$A_2=A_1-A_3$。

4．由事件A与B同时发生而构成的事件，称为**事件A与B的积**（或称为交），记做AB。如上面例中的事件A_1与A_5的积便是A_2，即$A_2=A_1A_5$。

类似地，可以定义一系列事件A_1，A_2，……，A_n，……的积，记做$A_1A_2\cdots A_n\cdots$。

5．如果事件A的发生，必然导致事件B不发生（即A与