

科學史集刊

第六期

科



社

# 科學史集刊

## 6

科學出版社

## “科学史集刊”征稿簡約

1. 本刊暫定为半年刊, 欢迎投稿。
2. 本刊登載自然科学及技术史的有关論著, 并酌登譯稿。
3. 来稿請用稿紙繕写清楚。录用的稿件本刊編輯部有刪改权 (如不愿刪改者, 請来稿时声明), 譯稿請附原著。不用稿件, 負責退还。
4. 稿經发表后即寄稿酬。
5. 来稿請寄北京朝阳門大街 117 号中国科学院中国自然科学史研究室轉科学史集刊編輯部。

北  
京  
論  
試  
祖  
拉

### 科学史集刊 第六期

---

編輯者	科学史集刊編輯委员会 北京朝阳門大街 117 号
出版者	科 学 史 出 版 社 北京朝阳門大街 117 号 北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
印刷者	中国 科学院 印 刷 厂
总經售	新 华 书 店

---

(京) 1-1,750

1963 年 10 月出版

定价: 0.65 元

# 科学史集刊

第六期

目次

32006/19

刘徽《九章算术注》的伟大成就—— 纪念刘徽《九章算术注》创作 1,700 周年 .....	梅荣照 (1)
古代印章工艺中的金工技术初探 .....	王立兴 (11)
关于唐代有没有蒸馏酒的问题 .....	曹元宇 (24)
漏刻的迟疾与液体粘滞性 .....	李广申 (29)
华夷图和禹迹图的几个问题 .....	曹婉如 (34)
北京明永乐大铜钟铸造技术的探讨 .....	凌业勤 王炳仁 (39)
论徐光启《除蝗疏》 .....	邹树文 (46)
试论王锡闡的天文工作 .....	席泽宗 (53)
祖国清代杰出的医学家王清任 .....	馬堪温 (66)
拉馬克和他的主要著作 .....	吳德鐸 (75)

50.4  
410  
:6

# 刘徽《九章算术注》的伟大成就

——紀念刘徽《九章算术注》創作 1,700 周年——

梅 棻 照

31-2611

## 一、刘徽的时代及《九章算术注》的历史背景

刘徽是我国古代一位非常伟大的数学家，他所撰的《九章算术注》十卷与《九章重差图》一卷，是我国数学史上划时代的著作。《九章算术注》十卷到唐代演变为《九章算术注》九卷与《海岛算经》一卷而流传至今，《九章重差图》在宋代已经失传。

现传本《九章算术》方田章圆田术注和商功章圆囷求周术注都提到“晋武库中有汉时王莽所作铜斛”<sup>1)</sup>，并說此斛“与今律曆志同，亦魏晋所常用。”西晋王朝的武库于惠帝元康五年(公元 295 年)发生火灾<sup>2)</sup>，所藏古物多被烧毁或散失，因此刘徽《九章算术注》的完成当在西晋初年。《隋书律曆志》論历代量制引《九章算术》商功章注說“魏陈留王景元四年(公元 263 年)刘徽注九章”，可見他的注解工作可能早在魏代已经开始。根据这些，可以肯定刘徽是生活在魏晋时代。

东汉末年，农民暴动摧毁了汉王朝的封建統治以后，形成羣雄割据的局面。在曹魏統治下的北方地区施行屯田制，兴修水利，生产力得到恢复和发展。汉儒抱殘守缺的經学师法早已破产，代之而起的是社会名流崇尚清談。王弼的《易注》，何晏的《論語集解》都摆脱了汉儒經学的束縛，能直抒自己的見解，为当世学者所重視。也在这个时期，科学文化有显著的进步。机械工程师馬鈞，天文学家楊伟，地图学家裴秀，唯物主义思想家傅玄、楊泉等，对自然科学都有光輝的貢獻。数学大师刘徽造就于这个时代并不是偶然的。

《九章算术》(約公元 100 年)是我国現有传本的数学著作中最早的一本，它收集了东汉初年以前的 246 个数学問題，并按照問題的性質分成方田、粟米、衰分、少广、商功、均輸、盈不足、方程、勾股九章。这部著作不仅对当时从事于河道、灌溉、手工业生产的工程技术人員以及收稅制历的官員有很大帮助，而且在世界数学史上也作出了許多有意义的貢獻。但遺憾的是，由于編者可能受到当时儒家传统思想的影响，特别是对于名詞、概念采取“約定俗成”的办法，认为对一切理論的認識沒有尽头，学者应该有适可而止的态度，认为对理論不知也無害于事的观点，在批駁邏輯思維作为詭辯武器的同时摒弃了邏輯推理的方法等一系列思想的影响，使《九章算术》只满足于問題的解法，对解法依据的理論便

1) 圆田术注，传刻术无“有”字和“所”字。

2) 《晋书》五行志。



不再加以討論。这种思想严重地阻碍了数学理論的发展。

生活在魏晉时代的刘徽沒有完全为这种“适可而止”的思想所束縛。他在《九章算术注》自序說：“徽幼习九章，长再詳覽。观阴阳之割裂，总算术之根源，探蹟之余，遂悟其意。是以敢竭頑魯，采其所見为之作注。”在少广章开立圓术注中，刘徽批判了张衡关于計算球体积的唯心主义理論，他說：“衡說之自然，欲协其阴阳奇偶之說而不顾疏密矣。虽有文辞，斯乱道破义，病也。”对于邏輯推理的方法，刘徽也給予应有的重視，他主张“析理以辞，解体用图，庶亦約而能周，通而不黷。”刘徽在《九章算术注》中就是以这种敢想、敢做、敢于和唯心主义作斗争的精神以及用“析理以辞、解体用图”的科学方法，闡明了《九章算术》中每一个解題方法的道理。他的工作使我国古代数学理論迈出了非常有意义的一步，对世界数学史有很大的貢獻，值得我們紀念。

## 二、刘徽《九章算术注》

“就人类認識运动的秩序說来，总是由認識个别的和特殊的事物，逐步地扩大到認識一般的事物。人們总是首先認識了許多不同事物的特殊的本质，然后才有可能更进一步地进行概括工作，認識諸种事物的共同的本质。”<sup>1)</sup>刘徽就是在《九章算术》中許多特殊解法的基础上，进一步抽出它們共同的特性，从而認識到各种解法的共同的本质。他在自序中說：“事类相推，各有攸归。故枝条虽分而同本幹者，知发其一端而已。”因此刘徽的《九章算术注》并不是一般的注释，他不仅給出各个解法以正确的解释，指出近似解法的精确程度以及个别解法的錯誤，而且还提出許多超出原来著作的新理論。在刘徽的注解中，主要是运用齐同术、今有术、图驗法、棊驗法等四种方法，現分別叙述如下：

### (1) 齐同术

所謂齐同术是刘徽从《九章算术》中关于分数的加減法与方程組的解法中概括出来的一种方法。不同分母的分数相加或相減时，必須先化各分数为同分母的分数，然后将分子相加或相減。这就是方田章合分术和減分术所說的“母互乘子并以为实，母互乘为法”以及“母互乘子以少減多为实，母互乘为法。”刘徽注指出，“母互乘子謂之齐，羣母相乘謂之同。同者，相与通同共一母也；齐者，子与母势不可失本数也。”这就說出了不同分母分数相加相減的根本道理。同样，两个代数等式要消去某一項时，必須要使被消去項的系数相同，其他各項和它相齐。盈不足章盈不足术說：“置所出率，盈不足各居其下，令維乘所出率，并以为实，并盈不足为法。”設  $a_1, a_2$  为所出率， $b_1, b_2$  为盈与虧， $x$  为人数， $y$  为物价，則

$$y = a_1x - b_1 \quad (1)$$

$$y = a_2x + b_2 \quad (2)$$

1) 《毛泽东选集》第一卷，298頁。

以  $b_2$  乘(1)式加  $b_1$  乘(2)式,經化簡即得盈不足术的公式

$$\frac{y}{x} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 + b_2}$$

刘徽注指出,“盈朒維乘兩設者,欲為同齊之意。”又指出,“齊其假令(所出率),同其盈朒”就是为了消去常數項。在方程章方程术中,為了要消去方程組中某一方程式的未知數,先將另一方程式這一未知數的係數偏乘該方程式,然後直除(多次相減)。刘徽認為,用係數乘就是“齊同之意”,而“齊同”是為了能夠達到直除的目的。他還指出,用齊同术與直除法得到的新方程是一個同解方程,“不害余數之課”。

### (2) 今有术

今有术是解决算术中有关比例問題的方法。粟米章今有术曰:“以所有數乘所有率,為實,所有率為法,實如法而一。”刘徽注說:“此都术也”,這句話的意思是認為許多比例問題都可以用這個方法來解釋。兩個相似勾股形的對應邊成正比例,因此勾股章里勾股測望問題的解法,刘徽注是用今有术來說明的。衰分章的比例分配,刘徽注也是用今有术來解釋,它說:“列衰各為所求率,副并為所有率,所分為所有數。”均輸章有反比、復比和連鎖比的問題,刘徽注都是用今有术說明它們的解法。例如第十七題:“今有客馬日行三百里。客去,忘持衣。日已三分之一,主人乃覺,持衣追及,與之而還至家,視日四分之三。問主人馬不休,日行幾何。”刘徽注說:“主人用日率者,客馬行率也。客用日率者,主人馬行率也。母同則子齊,是為客馬行率五,主人馬行率十三。于今有數三百里為所有數,十三為所求率,五為所有率,而今有之,即得也。”這就是說,用日率與馬行率成反比。主人用日率為  $\frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{24}$  日,客人用日率為  $\frac{5}{24} + \frac{1}{3} = \frac{13}{24}$  日,因此客人馬行率與主人馬行率之比為 5:13,故得主人馬日行  $300 \times 13 \div 5 = 780$  里。這就是用今有术解釋反比例的問題。

### (3) 圖驗法

圖驗法就是應用面積圖形驗證平面幾何學公式與定理的方法。這個方法雖然不能說是創自刘徽,然而他確實竭力提倡與應用。刘徽著的《九章重差圖》一卷已經失傳,了解他的方法只能凭借留下來文字。

方田章圭田(三角形田)术是:“半廣以乘正从”,刘徽注說:“半廣,知以盈補虛,為直田(長方形田)也,亦可半正从以乘廣。”所謂“以盈補虛”就是將三角形變成長方形以原三角形的部分補償增加的部分,這種方法顯然有兩種(見圖 1)。對於斜田(直角梯形田)、箕田(梯形田)、環田的面積公式,刘徽都是用“以盈補虛”的方法來證明的。

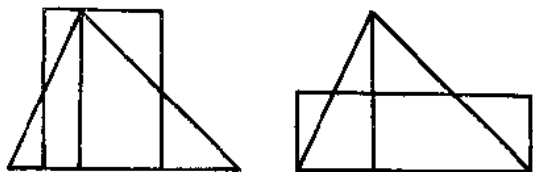


圖 1

在勾股章第五題、第十一題、第十二題中,刘徽採用了趙爽的勾股圓方圖來證明原本

中所应用的定理,但对勾股定理他没有采用赵爽的方法。刘徽注说:“勾自乘为朱方,股自乘为青方,令出入相补,各从其类,因就其余不移动也,合成弦方之幂。”清代数学家对此作了許多补图,但很难指出究竟是那一个能够符合刘徽的原意。这种“出入相补,各从其类”的证明方法在勾股章勾股容方题与勾股容圆题都可以看到。

在方田章中,刘徽利用图形来验证近似公式的正确程度。圆田术注指出:“圆中容六觚之一面,与圆径之半,其数均等,合径率一而外周三也。”晓田(球冠形田)原本是“以径乘周,四而一”,刘徽注证明了这是圆锥表面积公式后说:“今晓田上径圆穹,而与圆锥同术,则幂失之于少矣。”弧田术是“以弦乘矢,矢又自乘,并之,二而一”,刘徽认为,半圆也是圆弧之一,应用弧田术计算半圆面积,则嫌太小,他主张用勾股章第十题弦矢求径的方法,先求出圆径,然后分割圆弧,方能得到较为精密的公式。

此外,在少广章中,刘徽依靠图形的帮助,说明了开方术的原理。

#### (4) 棊驗法

棊就是基本的立体模型。用基本的立体模型验证立体几何学公式与定理的方法称为棊驗法。商功章阳馬(直角方錐)术刘徽注说:“斜解立方得两壘堵(正三角柱)。斜解壘

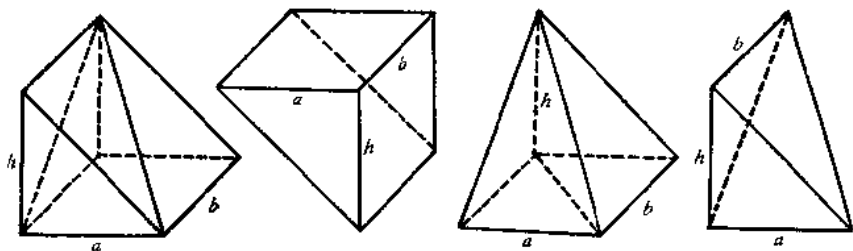


图 2

堵,其一为阳馬,一为鬣鬮(直角三角錐)”又“合两鬣鬮成一阳馬,合三阳馬成一立方,故三而一,驗之以棊,其形露矣。”他还补充说:“其棊或脩短,或广狭,立方不等者,亦割分以为六鬣鬮,其形不悉相似,然兒数同,积实均也。”

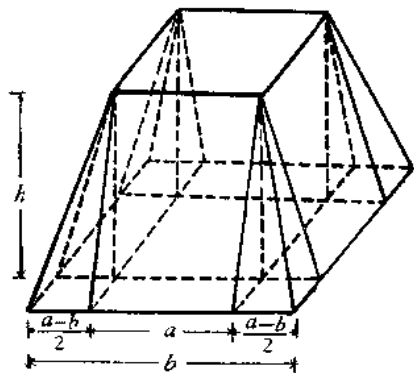


图 3

設  $a$ ,  $b$ ,  $h$  为方体的长,闊,高,則壘堵的体积为  $\frac{1}{2}abh$ ,阳

馬的体积为  $\frac{1}{3}abh$ ,鬣鬮的体积为  $\frac{1}{6}abh$ 。这些就是

刘徽所用的基本立体模型(见图 2)。他利用这些基本模型证明了方錐(正方錐),方亭(正方稜台),刍童(长方稜台),羨除(楔形体)等体积公式。例如方亭是分解为一正方柱体、四壘堵和四阳馬(见图 3)。

設上下底边各为  $a$ ,  $b$ , 高为  $h$ , 則  $V = a^2h + 4 \times$

$$\frac{1}{2} \frac{b-a}{2} ah + 4 \times \frac{1}{3} \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 h = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + ab)h。此外刘徽还提出方亭的体积的$$

另一个公式： $V = abh + \frac{1}{3}(b-a)^2h$ 。

在少广章，刘徽还用棊的方法说明开立方术与开立圆术的原理。

### 三、刘徽《九章算术注》的几个创作

#### (1) 圆面积与圆周率

《九章算术》计算圆形物体的面积和体积都是采用“径一周三”的方法，西汉末刘歆造“律嘉量斛”用到圆周率 3.1547，第二世纪初张衡曾取  $\sqrt{10}$  与 3.1466 为圆周率，三国吴王蕃则用  $\pi = \frac{142}{45} = 3.1556$ 。所有这些，都没有说出它们的理论根据，疑是来自经验的近似公式。

刘徽在方田章圆田术注首先指出，“径一周三”只是内接正六边形周径的比率，由此计算出来的面积只是内接正十二边形的面积。为了精密地计算圆的面积，他创造了割圆术。刘徽认为，只要内接正多边形的边数愈多，则它的面积愈近于圆的面积。他说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆(周)合体而无所失矣。”这种用正多边形面积来逼近圆面积的极限思想还可在弧田术注看到。接着又说：“觚面(正多边形的周)之外又有余径(边心距与圆半径之差)。以面乘余<sup>1)</sup>径，则纂出弧表。若夫觚之细者与圆合体，则表无余径。表无余径则纂不外出矣。”如图 4，设觚面为  $P_n$ ，余径为  $e_n$ ，圆面积为  $S$ ，内接正  $n$  边形面积为  $S_n$ 。根据注文，则有下列不等式

$$S_n < S < S_n + P_n e_n$$

当觚面小到与圆相合( $n$  无限增大)时，则“表无余径”( $e_n \rightarrow 0$ )，而“纂不外出矣”( $S_n + P_n e_n \rightarrow S$ )。在具体计算中，刘徽假定半径为一尺，从内接正六边形开始，算出内接正 12, 24, 48, 96

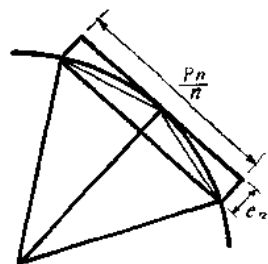


图 4

边形的边长，得到正 96 边形的面积  $S_{96} = 313 \frac{584}{625}$  方寸，正 192 边形的面积  $S_{192} = 314 \frac{64}{625}$

方寸。因  $S_n + P_n e_n = S_n + 2(S_{2n} - S_n)$ ，故

$$S_{192} < S < S_{96} + 2(S_{192} - S_{96})$$

$$\text{即} \quad 314 \frac{64}{625} < S < 314 \frac{169}{625}$$

刘徽将“余分”略去，以 314 方寸作为半径是 10 寸的圆的面积，以  $\frac{314}{100} = \frac{157}{50}$  为圆周率。

并且指出，“差纂六百二十五分寸之一百五，以十二觚之纂为率消息，当取此分寸之三十六以增于一百九十二觚之纂以为圆纂三百一十四寸，二十五分寸之四。”这就是说，圆面积等

1) 传刻本无余字。



于  $314 \frac{64}{625} + \frac{36}{625} = 314 \frac{4}{25}$  方寸, 用 100 方寸除得到  $\pi = \frac{3927}{1250} = 3.1416$ 。接着又说: “当求一千五百三十六觚之一面, 得三千七十二觚之纂而裁其微分, 数亦宜然, 重其验耳。” 据此可见, 刘徽还求出圆内接正 3072 边形的面积来证实  $\pi = \frac{3927}{1250}$  的正确性。

### (2) 圆锥、圆台和球的体积

《九章算术》商功章求圆锥和圆台的体积公式, 在假定  $\pi = 3$  的条件下是正确的。为了说明这些公式的来源, 刘徽应用了一条有名的法则: 圆锥、圆台的体积和它的外切方锥、方台的体积之比等于圆面积和外切正方形面积之比。圆亭(圆台)术注说: “从方亭求圆亭犹方纂求圆纂”; 委粟依垣(其形成半圆锥)术注也说: “从方锥中求圆锥之积亦犹方纂求圆纂。” 已知上下底边为  $a, b$ , 高为  $h$  的方台体积是  $\frac{1}{3}(ab + a^2 + b^2)h$ , 底边为  $a$  高为  $h$  的方锥体积是  $\frac{1}{3}a^2h$ , 所以圆台的体积是  $\frac{\pi}{12}(ab + a^2 + b^2)h$ , 圆锥的体积是  $\frac{\pi}{12}a^2h$ 。在方田章畹田术注也用到了类似的法则, 即是: 圆锥侧面积和它的外切方锥侧面积之比等于圆周和外切方周之比。

少广章开立圆术曾经提到, 圆柱体积是外切立方体积的  $\frac{3}{4}$ , 而球的体积又是外切圆柱体积的  $\frac{3}{4}$ , 所以球的体积是外切立方体积的  $\frac{9}{16}$ 。东汉张衡认为不是  $\frac{9}{16}$  而是  $\frac{5}{8}$ 。刘徽指出, 球体积不是外切圆柱体积的  $\frac{3}{4}$ , 张衡的意见也只是“欲协其阴阳奇偶之说。” 他在注文中说: “取立方棊八枚, 皆令立方一寸。积之为立方二寸。规之为圆囿(圆柱)二寸, 高二寸, 又复横规之则形有似牟合方盖矣, ……按合盖者, 方率也, 丸(球)居其中, 即圆率也。推此言之, 谓夫圆囿为方率, 岂不闕哉?” 在这里, 刘徽认为球体积和相互垂直且同径同高的两个圆柱的共同部分(牟合方盖, 见图 5) 的体积之比才等于圆面积与外切正方形面积之比, 这是完全正确的。可惜他没有具体算出牟合方盖的体积, 只是说: “欲陋形措意, 惧失正理, 敢不闕疑, 以俟能言者。”

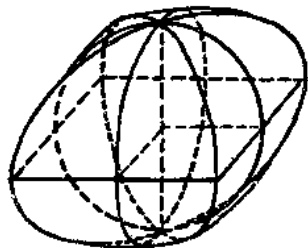


图 5

### (3) 上进分数

少广章开平方术说: “若开之不尽者, 当以面命之。” 设被开方数为  $N$ , 根的整数部分为  $a$ ,  $N - a^2 = r$ , 则  $\sqrt{N} = a + \frac{r}{a}$ 。刘徽注指出, 当时也有数学家用  $a + \frac{r}{2a+1}$  来表示  $\sqrt{N}$  的近似值, 虽较九章方法为近, 但也是不可用的。他认为  $\sqrt{N}$  应在  $a + \frac{r}{2a+1}$  和  $a + \frac{r}{2a}$  二数之间。为了计算  $\sqrt{N}$  的精密值, 刘徽主张: “加定法如前, 求其微数。微数无

名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细。”在这一段话中，刘徽清楚地指出：（一）开得整数部分后，余数 $r$ 仍可以继续开方；（二）继续开方得到的微数，如有名的可用名数表示，如无名的则用十进分数表示；（三）微数的位数愈多，所得的平方根值也愈精密。这种方法和我们现在开平方求无理根的十进小数近似值方法是完全一致的。

同样，在开立方不尽时，刘徽亦认为：“术亦有以定法命分者，不如故纂开方以微数命分也。”

#### （4）一次方程组解法

在方程章直除消元法的基础上，刘徽根据齐同术的原则，创立了互乘相消法。所谓互乘相消法是将两方程式中要消去的未知数的系数，相互偏乘该方程式，然后相减。这和我们现在解一次方程组所用的加减消去法是一致的。例如方程章第七题：

$$2x + 5y = 10 \quad (1)$$

$$5x + 2y = 8 \quad (2)$$

其中 $x$ 表牛数， $y$ 表羊数。刘徽注说：“假令为同齐，头位为牛，当左右行（即(1)(2)式）相乘定，……，以少行减多行，则牛数尽。”这即是以5乘(1)式，以2乘(2)式，相减得

$$21y = 34$$

在方程章第九题与最末一题，刘徽注还提出用比例分配的方法来解一次方程组的问题。这种方法对某些题目说来，无疑是较为简便的。

#### （5）等差级数

盈不足章有这样一个题目（倒数第三题）：良马初日行193里，日增13里，驽马初日行97里，日减半里。现良马先行3,000里，复还迎驽马，问多少日相逢及各行多少里。原术：“假令十五日，不足三百三十七里半，令之十六日，多一百四十里，以盈不足维乘假令之数，并而为实，并盈不足为法，实如法而一，得日数。”其中不足里数与多出里数的求法是一个已知首项、公差、项数求和的等差级数问题。刘徽注指出，“求良马行者，十四乘益疾里数而半之，加良马初日之行里数，以乘十五日，得十五日之凡行<sup>1)</sup>”“求驽马行者，以十四乘半里，又半之，以减驽马初日之行里数，乘十五日得驽马<sup>2)</sup>十五日之凡行。”设初日行里数为 $a$ ，每日增加或减少之里数为 $d$ （减少时 $d$ 为负），所行日数为 $n$ 。根据注文得共行里数

$$S = \left( a + \frac{n-1}{2} d \right) n$$

刘徽还指出，以二马初日所行里数乘15日为“平行数”，以14乘15折半再乘益疾减迟里数为“中平里”，“中平里”加“平行数”即得15日“定行里”。这相当于

$$S = an + \frac{(n-1)n}{2} d$$

1) “以乘十五日，得十五日之凡行”为脱文，据戴震校注补上。

2) “乘十五日得驽马十五日之凡行”一句是参考戴震校注改正。

## (6) 勾股容圆公式的证明

勾股容圆公式求圆径的公式是：勾股弦之和除以2乘勾股之积。设 $a$ 为勾， $b$ 为股， $c$ 为弦，则圆径  $D = \frac{2ab}{a+b+c}$ 。对于这个公式，刘徽注除了用图验法证明外，还提出一个新的方法。他说：“又画中弦以观其会，则勾股之面中央（各有）小勾股弦。勾面之小股，股面之小勾，皆小方之面，皆圆径之半。其数故可衰。以勾股弦为列衰，副并为法，以勾乘未并者各自为实，实如法而一，则勾面之小股可知也。以股乘列衰为实，则股面之小勾可知。”所谓中弦是过中心与原勾股形之弦平行的弦。如图6，设勾上小勾股形的勾、股、弦为 $a'$ 、 $b'$ 、 $c'$ ，股上小勾股形的勾、股、弦为 $a''$ 、 $b''$ 、 $c''$ ，则有

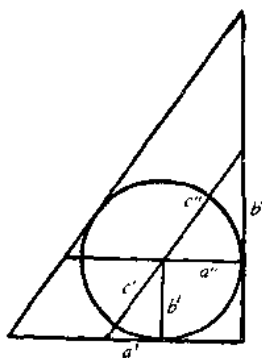


图 6

$a': b': c' = a: b: c$   
 $a'': b'': c'' = a: b: c$

根据衰分术，得到

$$b' = \frac{D}{2} = \frac{a' + b' + c'}{a + b + c} \times b = \frac{ab}{a + b + c}$$

$$a'' = \frac{D}{2} = \frac{a'' + b'' + c''}{a + b + c} \times a = \frac{ab}{a + b + c}$$

这个证法，比之移补图形的方法无疑是更为先进的。此外，刘徽又添上  $D = a + b - c$  和  $D = \sqrt{2(c-a)(c-b)}$  两个公式。

## (7) 重差术

在《周髀算经》(约公元前100年)中，天文学家为了测量夏至日太阳离地面的高度，创立了两次测量日影的方法，东汉数学家称它为重差术。刘徽总结了这种方法，举出九个例题说明它的应用。他在《九章算术注》自序说：“辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下。度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。”在这一章里，刘徽大大地扩充了这种方法的应用范围。现将《海岛算经》第二题求山上松高的方法叙述于下：

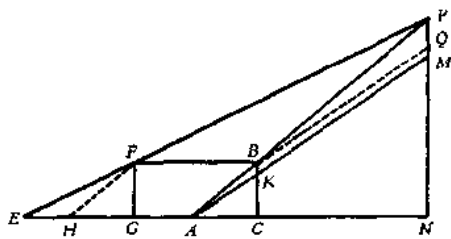


图 7

如图7，设 $MN$ 为山高， $PM$ 为松高，于 $C$ 处立一表 $BC$ ，退到 $A$ 点，人目着地，令松顶 $P$ 与表顶 $B$ 相齐，又望松根 $M$ ，与表交于 $K$ ；再将表移到 $G$ ，人退到 $E$ ，令 $P$ 与 $F$ 相齐。作 $BQ \parallel KM$ ， $FH \parallel BA$ ，则

$$\triangle PQB \sim \triangle BKA$$

$$\triangle PFB \sim \triangle FEH$$

$$\frac{PQ}{BK} = \frac{PB}{BA}, \quad \frac{PB}{FH} = \frac{FB}{EH}$$

$$PQ = \frac{FB}{EH} \times BK$$

$$PM = \frac{FB \times BK}{EG - AC} + BK$$

#### 四、刘徽的工作在数学发展史上的地位

《九章算术》在整理数学材料的工作中是有贡献的，它在“以类合类”的思想指导下，将 246 个复杂的数学问题，按其性质与解题方法分成九类，为我国数学向更高更细的方向发展打下基础。但正如前面已经指出，由于受到时代思潮的影响，它的整理工作也只是停留在这一点上，没有进入较为理论性的讨论。这一艰巨的理论工作，刘徽在《九章算术注》中勇敢地担当起来，他以许多卓越的成就获得我国各时期的数学家的高度评价。唐代数学家王孝通称赞他“篇好斯言，博综纤隐”“思极毫芒，触类增长”；清代数学家焦循说“刘徽注《九章》与许叔重《说文解字》同有功于六艺。”

刘徽注解《九章算术》的“析理以辞，解体用图”的方式方法，对我国数学的发展有着非常深远的影响。在他以后，南齐祖冲之，北周的甄鸾以及唐代的李淳风等都先后曾给《九章算术》作过注。尤其值得提出的是祖冲之的“缀术数十篇”，可以想象是非常精采的，可惜已经失传。其他大多数的注释者由于没有真正领会刘徽“同条牵属，共理相贯”的原则，往往限于对个别问题或个别字义的解释，因而没有作出很大的贡献。

刘徽在《九章算术注》的创作大都得到我国数学家的继承和发展。祖冲之可能就是在刘徽割圆术理论的基础上，以圆径一丈为 100,000,000 微，算出内接正 12,288 边形面积，从而得到具有世界意义的圆周率。祖冲之的儿子祖暅在刘徽计算球体积方法的启发下，终于完成了刘徽未竟之业；也是在刘徽“从方亭求圆亭犹方幂求圆幂”法则的基础上，提出了比卡伐里早 1000 年的“幂势既同则积不容异”的公理。其他如勾股容圆、级数、十进分数、方程等项目，后来都有很大的发展，这些发展虽不象圆周率和球体积那样直接地受到刘徽的影响，但首创之功，应该是属于刘徽的。

应该指出，由于刘徽对数学理论的描述采用注疏的体例，缺乏系统的讨论，以致有些理论研究中相当重要的推论，失之交臂。例如用辗转相减法得到的“等数”（最大公约数）为 1 时，他没有指出这两个数是互素的；在开方不尽时，他没有说明无理数与有理数的区别；对两个不可公约量能够相比或相乘，他认为理所当然，不必讨论。这些缺点也影响到我国数学的发展。

刘徽的工作在世界数学史上也占有重要的地位。刘徽从事于数学理论研究比希腊学者为迟，但他的成就却超过同时代的数学家。对于圆周率的计算，他的结果比阿基米得

(公元前第三世紀)精密,方法也比阿基米得优越。在欧洲,直到公元十四世紀,法国数学家蒙尔才提出用十进分数表示开方根的奇零数,比刘徽迟一千多年。其他如极限概念、一次方程組的消元法以及求圓錐体积的方法,在当时也是居于先进地位的。

有些国内外学者曾认为我国古代数学在解决具体問題上有許多独创的成就,但在理論研究方面,特别是邏輯推理方面却是十分落后,这完全是一种誤解。事实上,任何科学,特别是数学的发展,如果缺乏科学理論的指导是不可能有很大进步的。我国古代数学所以能获得許多輝煌的成就,是有科学理論指导的,只是这种理論具有我国传统的特色而不同于希腊的理論系統而已。刘徽《九章算术注》的伟大历史意义也正是由于它为这种独特风格的理論系統打下了坚实的基础。

# 古代印章工艺中的金工技术初探

王立兴

(中国科学院北京天文台筹备处)

## 一、印章工艺与仿汉篆刻

印章工艺的起源甚早。春秋战国之际,封建领主们厚敛暴夺,“鑄金以为钩,珠玉以为珮,”役使“女工作文采,男工作刻鏤,以为身服。”(《墨子》辞过第六)刻鏤印题的事,日渐普遍。战国时期的剥削阶级“皆以金、银、铜、犀(角)、象(牙)、为方寸璽,各服所好。”(《渊鉴类函》卷368引《汉旧仪》)璽起初用来“封泥”,作为凭信,稍后有了代表政治权力的象征意义。地方守令免职时,就要“收其璽”。盗璽的就要处死刑。大官僚首领则佩带相印。(杨宽《战国史》第五、六章)后来,秦始皇的“秦璽”甚至取得“周鼎”的地位,称做“传国璽”,为后世野心家们所垂涎。秦汉以前,虽已逐步重视印章,但数量尚少,由一般“刻鏤”男工兼造,也就满足了需要。到了汉朝,全国大量官印由政府统一颁给,显然需要有隶属于“官府的”专业印章工人来鑄造刻凿。这时候,还有大量私印,包括一些“某某千万”、“某某万匹”、“某某长富”、“某某日利”之类祈求暴利的吉语印(《十钟山房印举》吉语),表明了另有“民间的”专业印章工人,供应着广泛的、包括新兴工商业富豪阶层在内的私人印章需要。可以相信,专业化的印章工人,开始出现于公私印章都已大盛的汉朝。汉朝印章手工艺和印章艺术都有了很高的成就。

汉朝印章工人们,按照印章整体美化的需要,常常对单字形体进行大胆的艺术加工,并不墨守秦篆或汉隶的通行写法。他们敢于增减笔划,挪移部位,替个别印章创造群众识得的美术字。这种由汉朝工人们,群众性陆续创造的美术字,后世称为“摹印篆”或“繆篆”。汉朝人识得汉隶,所以汉朝工人就创用接近汉隶的摹印篆入印;近代人识得楷书,所以近代工人就创用楷书和接近楷书的“分、隶”入印。除开后世统治者故意刻造使人不识的“九迭篆”官印之类外,民间的印章工人始终在“群众易识”的原则下,“推陈出新”美化“实用印章”。所以历代印章的形制、章法、字体、笔势都具备时代特征,既是小小的艺术品,也是历史文物。从宋朝晁克一《集古印格》开始(本《四库提要》宣和集古印史条),一千年间,不断有收集印章的赏鉴家和考订家,编谱著书,形成“印学”。但是他们受了好古的毒,只收六朝以前的古印及后世文人仿古的印章。唐宋以来的官印有谱;明清以来的书画题款印、收藏印、也有谱;而各朝的工商业、银钱业等民间经济活动的实用印章尚未有印谱。这些印章有关经济史的研究,应该收集考订。

宋元以来,谈印的专书和刻印的文人,都日见其多。封建文人们一方面以书法技巧丰

富了印章艺术,一方面以复古倾向束缚了印章艺术。他们尊汉印(实际包括六朝以前的各朝古印)为正统,提倡“宗汉”。所谓“宗汉”,首先是摹写汉印文字,万不得已,才改用小篆或籀文。但是,随着生产力的发展,人事日繁,新字日多,汉印文字,或篆、籀的字数都不够用。文人们遇见查不到篆籀的新字,有人就干脆不刻这个印,有人却想出用“古有字”代替“新造字”的办法。如古无“獅”字,改用“师”字代替,又如古无“菴”字,改用“盦”字代替,叫做“通假”。必须懂得文字学,才能保证通假确当,并保证一枚印中,印文的篆体,同属一类,免为“識者”所笑。他们说:“学摹印者……莫如习熟篆文,精究许叔重之《说文解字》,……则……为士君子之手笔,非剗工人之末事。”(《印述》语)

明清文人以为能篆而自高。文人印谱的署名,常作“某某篆”。印章艺术也就叫做“篆刻”。而且以“篆不配不刻”作为他们的陆贽增订到“十不刻”的清规戒律中主要条文。他们轻视工人不知篆籀,划分开“工人之印”与“文人之印”,却忘了所崇拜的汉朝摹印篆,正是工人们集体创作。文人也有创用“分、隶”入印的(如莆田派),就被斥为“不合于古”。由于他们只肯“篆”出群众不易识的印文,就失去了群众,沦为少数人的“文房雅玩”。

自从元朝末年,王冕创用花乳石刻印(《七修类稿》),文人们不再费力流汗去刻铜印或玉印了,能写篆字,就能刻石章,成为“篆刻家”。所以明清的“篆刻家”人数大增。(《印人传》;《续印人传》;《广印人传》。)他们提倡“仿汉”。这种“仿汉”,并非仿汉朝工人真正地刻铜刻玉,而是在石章上,比照汉印谱式,仿刻出貌似汉朝铜印或玉印的印文。但是,刻石“仿汉,必须熟悉攻玉凿铜之法。”(《篆刻针度》自序)才能仿得逼真。就有人研究汉印加工方法。

汉印计有:(一)在铜印上凿字;(二)在铜印上刻字;(三)在鑄模上刻字,再鑄出有字的铜印;(四)在玉印上用砂碾鋼輪碾字;(五)在玉印上用刀刻字等五种加工方法。五种印文的肥瘦刚柔,起止转折,笔势神态,也都各有特征。(参看《印述》)文人研究这些特征来仿铜仿玉,甚且仿刻古印的缺损剗蚀,自夸“直逼秦汉”的错误方向,有人不以为然,如明末的黄周星就说:“夫先秦两汉纵佳,亦不可施之今日。”指明这条路綫是走不通的。可是古代工人刻鑄印章的一部分工艺,却因此受到几位文人注意而被记录下来,散见于少数谈印书中。虽然文人所“熟悉”的工艺,只占了汉朝以来工人所“熟习”的一小部分,又多半是记述疏略和传写脱误的资料,然而,作为我国工艺史料的一部分“印章工艺史料”来看,仍然是可珍贵的文献。下文对这方面资料作些初步的探讨。

古代“男工作刻鑄”的内容很广泛,至少有金银饰物、晶玉玩好、鼎彝铜器和符节璽印等等项目。后世虽已分化成银匠、铜匠、碾玉工人、印章工人以及刻书版工人等专业,而刻鑄工艺则同出一源。因此,有些工具是几个专业通用的,有些技术也是彼此都共同的。唯有研究好各个专业的工艺史,才能写出比较全面的一般工艺史。印章工艺中的“鑄印术”与冶鑄技术史有关,“炼刀术”与热处理技术史有关,而摸清古代工人为了加速“刻鑄”过程,曾经考虑过那些方面,也可供今天从事金工切削研究的人员作参考。现在分述于下。

## 二、鑄印法

上面說过,汉印共有玉印两种,銅印三种,其传世数量,各有多寡不同。“大約刻玉者十一,冶金者十有九。”(《云庄印話》引清朱彝尊語)“冶金”有鑄字、刻字、凿字三种銅印,其数量是“鑄者多”。(《古印考略》語)“鑄印”再分“翻砂法”、“拔蜡法”两种,其数量是“多拔蜡”。(清桂馥《續三十五举》引张埴語)按刻銅印則工整而費力,凿銅印則簡便而草率,鑄銅印則既工整又省力,所以鑄印多。翻砂鑄印法,先要从砂型中取出原刻“底模”,才可灌銅;拔蜡鑄印法,用火融化蜡模,不需取出;而姓名印并不需要多鑄复制品,可以放弃底模,用拔蜡法。印章頂部的拱手执持的部分,叫做“印鈕”。如果印鈕形状简单,容易从砂型取出底模的印,尚可用翻砂法;如果印鈕形状复杂,无法从砂型取出底模的印,只能用拔蜡法。“翻砂”要刻硬模,不及“拔蜡”刻蜡模省力。因此“汉印多拔蜡”了。

先引鑄銅印的拔蜡法。可与明末巨著《天工开物》卷八钟条对照<sup>1)</sup>。

(一) 明文彭《印史》：“拔蜡：以蜡为印，刻文制鈕于上。以焦泥涂之，外加熟泥，留一孔，令干，去其蜡，以銅鎔化入之。其文法鈕形，制俱精妙。辟邪、獅兽等鈕，多用拔蜡。”

(二) 清朱象賢《印典》：“拔蜡：以黃蜡和松香作印、刻文、制鈕。涂以焦泥，俟干，再加生泥。火煨，令蜡尽，泥熟。鎔銅，傾入之。則文字鈕形，俱清朗精妙。”

(三) 同书：“拔蜡之蜡：有二种。一用鑄素器(无紋)者。以松香鎔化，漚淨。入菜油，以和为度。(油量)春与秋同，夏則半，冬則倍。一用以起花(紋)者。將黃蜡亦加菜油，以軟为度。其(加油)法与制松香略同。凡鑄印，先将松香作骨，外(涂)以黃蜡，拔鈕、刻字，无不精妙。”

(四) 同书：“印范：用洁淨細泥，和以稻草，烧透。俟冷，搗如粉，漚生泥浆，調之，涂于蜡上。或晒干，或阴干，但不可近火。若生泥为范，銅灌不入，且要起窠(深空也——原注)。熟泥中粘糠粃、羽毛、米粃等物，其处必吸(銅不到也——原注)。大凡蜡上涂以熟泥，熟泥之外再加生泥。鑄过，作熟泥用也。”

(五) 清叶尔寬《摹印传灯》：“一法，以蜡为印，刻篆文，并制鈕。鈕下置一杆。以鎔細泥，和膏，涂蜡印外。候干，再极涂，以至厚为度。去杆，則鈕外有一孔，向火上炙之，蜡必由孔鎔出。然(后)化銅入之。此印之精不精，全在先刻之蜡。”

(六) 清汪启淑《續印人传》：“杜世柏……近复工拔蜡法，鑄銅章直逼秦汉。”

按拔蜡也称做刻蜡、失蜡。“拔”字指雕塑印鈕，“刻”字指刻鑲印文，“失”字指鎔去蜡模。各从一道工艺过程立名。

1) 《天工开物》钟条(摘录)

凡造万鈞鍾，与鑄鼎法同，荆坑，深丈几尺，燥筑其中如房舍。埴泥作模骨，其模骨用石灰三和土筑，不使有丝毫隙拆，干燥之后，以牛油、黄蜡，附其上数寸。油蜡分两：油居什八，蜡居什二。其上高蔽，抵晴雨。(夏月不可为，油不冻结。)油蜡埴定，然后雕鑿书文物象，丝毫不就。然后春篩絕細土与炭末，为泥，涂埴以漸而加厚，至数寸。使其内外透体干坚，外施火力，炙化其中油蜡，从口上孔隙，鎔流淨尽，則其中空处，即鍾鼎托体之区也。



宋朝赵希鹄《洞天清录集》记载有蜡模铸铜器法：蜡模放置在漏水的木桶中间，每天灌进细泥浆，水由桶缝渗漏，细泥在蜡模四周沉淀，形成坚实的沙型。最后，拆除木桶，火烤去蜡，就可灌铜入沙型，铸造铜器。

这一类蜡模精密铸造术的运用，从“方寸小印”起，一直到“万斤大钟”，真是历史悠久，经验丰富。所以能够根据铸件的大小、表面的光毛、季节的寒暑，分别对蜡模配方和沙型制法作出适当的调整。并且对防止铸件缺陷，如“沙眼”、“缺肉”、“缩孔”等病，也都有精到的见解。是我国古代劳动人民在冶铸技术上的光辉贡献之一。

再看铸铜印的翻砂法，可与《天工开物》卷八钱条对照<sup>1)</sup>。

(一) 明文彭《印史》：“翻砂：以木为印，复于沙中，如铸钱之法。”

(二) 清陈克恕《篆刻针度》：“翻砂：如铸钱之法。将砂泥锤熟，做成二方。以已就之印，夹合砂泥中间，先印其式在内，留一小孔，以铜溶化入之。”

(三) 清董洵《多野斋印说》：“汉阳有陈老翁者，自称陈道人，名铨，能仿古铸铜器。其铸印得翻砂法。雕锡为钮，以薄石刻文，嵌印面，复于沙中，作范，如铸钱法。铸成，涂以青绿（绿青或作青碌即孔雀石），宛然自土中出也。庚子（公元1780年）夏，予稽留汉上，与巴雋堂、胡韵涛，手刻印模，囑其铸‘子母印’及‘两面印’。”

按古代有“两面印”：一枚印上下两个平面都铸有印文，如钱。有“子母印”：大印的顶部或侧面，开有凹穴或狭槽，嵌藏小印在内。子母印的镶嵌，必须宽紧适中，要求的手艺较高。宋朝王文盛设计过一种装配式的日期印，可以拨转月份字盘，由外围印文和中央“正”字，指示用印月份，要求的技术水平更高。

《文献通考》卷115：“（宋）景祐三年（公元1036年）篆文官王文盛，言于少府（掌山海地泽之税）监曰：‘在京粮料院印，多伪倣之以募卷历者。’谓：‘宜铸三印。圆其制，而面阔二寸五分。于外围周匝，篆‘纪年’及‘粮料院’名，凡十二字。（第一枚外围环状印）以围（按当作内围），篆‘十二辰’（子丑寅卯……），凡十二字。（第二枚内围环状印）中央篆‘正’字，上连印钮。（第三枚中心圆面印）令可旋转，以机穴定之。用时，‘月份’对‘年中互建十二月，自‘寅’（正月）至‘丑’（腊月），终始循环。每改元，即更铸之。’云：‘若此，使奸人无复措其巧矣。’少府监以奏。诏三司详定。请如文盛言。”

按在宋朝，铸造天文仪器的风气，在官府与在民间都很盛。当时工艺水平已很高，要求这三枚印都很圆正，套合松紧也恰到好处，是能够做到的。此印当是今天的邮戳之祖了。

1) 《天工开物》钱条（摘录）

凡铸钱模，以木四条为空匡，（木长一尺一寸，阔一寸二分，）土炭末筛令极细，填实匡中。微洒杉木炭灰，或柳木炭灰，于其面上。或熏模，则用松香与清油。然后以母钱百文（用锡铸成）或字、或背、布置其上。又用一匡，如前法填实，合盖之。既合之后，已成面背两匡，随手复转，则母钱尽落后匡之上。又用一匡填实，合上后匡。如是反复，只合十余匡，然后以绳捆定。其木匡上弦，原留入铜眼孔，铸工……倾（铜）入孔中。冷定，解绳开匡，则磊落百文，如花果附枝，模中原印空梗，走铜如树枝样。挾出，逐一摘断，以待磨铄成钱。