三点一测丛书

（第五次修订版）

高二数学

◎岑志林 主编

科学出版社

龍門書局

2001

三点一测丛书

(第五次修订版)

高二数学

岑志林　主编

责任编辑　王　敏

科学出版社
龙门书局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国人民解放军第1201工厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

1996年7月第　一　版　开本：850×1168　1/32

2001年6月第五次修订版　印张：14 1/2

2001年8月第三十四次印刷　字数：390 000

印数：825 001－835 000

ISBN 7-80111-612-7/G·527

定　价：15.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

相约成功　再创辉煌

——《三点一测丛书》(第五次修订版)序言

当你打开扉页,看到的已是《三点一测丛书》的第五次修订本了。

正当新版就要付梓之时,《中国新闻出版报》于2月20日,以《教辅图书谁主沉浮》为题发表了署名文章,对当前教辅书市场的现状作了评述。文中称现在以出版文教图书为主的出版社,在激烈的竞争中,涌现出“文教新六家”,龙门书局位列“新六家”之榜首,而龙门书局出版的《三点一测丛书》,则“堪称教辅‘王牌’”……

面对“王牌”之誉,我们不禁诚惶诚恐,思绪万千……

六年前,当我们看到广大中学生在知识的原野上艰难跋涉,在题海中苦苦求索时,便想尽我们微薄之力,为他们编一套既实用、准确、翔实,又能指点迷津的教辅读物,让学习者、应试者一看,就心明眼亮,避开误区,不走弯路。我和我的同行们是这样想的,也是这样努力去做的。

《三点一测丛书》一出版,便在全国中学生中出现了奔走相告、竞相购阅的动人场面。以后它年年修订再版,年年畅销,每次都有千百万的读者为它鼓掌,为它喝彩。其销量,十万套、三十万套……八十万套,一时间铺天盖地,洛阳纸贵。而今已突破百万套大关,出现了“哪里有中学生,哪里就有《三点一测》”的壮观景象。

这真是我们所始料不及的。

六年前它的问世,在教辅书市场上引起了一场小小的波澜:尊敬的雷老称赞我们“为孩子们做了一件好事”;中学生读者称我们是“雪中送炭”,称它为“迈向知识天堂的一架云梯”;不少老师赞扬此书“纵有深度,横有跨度,内容厚重,讲法生动,贴近教材,精要实用”;但批评指责者亦有之、“克隆者”亦有之,盗版更为猖獗……真可谓“毁誉并存,甘苦互见”。

我们坚信读者是上帝,走我们自己的路……

六年过去了,如今它成长为教辅书园地的一棵常青树。六年

来，它伴着一批批中学生从初中走向高中，从高中走向大学，有的已成为研究生、博士生，成为国家的栋梁之才；六年过去了，一批又一批的读者接踵而至，加入浩浩荡荡的读者队伍。这是我们最大的欣慰。

有人问我们凭什么赢得读者？我们可以坦诚相告：

——凭我们对读者的爱心；

爱读者，想读者之所想，急读者之所急，为读者排忧解难，与读者心心相通，是我们不变的心。

——凭我们的责任感；

追求卓越，奉献精品，是我们的永恒守则。它的每字每句都是我们的心血与汗水凝成的。作为读书人，我常记着俞平伯先生的两句诗："不敢妄为些儿事，只因曾读数行书。"我们凭的是读书人的良知与责任心。

——凭我们的集体智慧；

《三点一测丛书》的成功，乃厚积薄发，熔百家于一炉，集大成于一身。我们有一个来自全国名校名师组成的写作班子；有一个在教坛上辛勤耕耘几十年又熟悉市场的策划中心；特别是由有远见卓识、人杰地灵的龙门书局编辑出版发行。更值得大书特书一笔的是，与世纪同行的百岁老人、敬爱的雷老为本书的名誉主编，给我们以指导与鼓励，我们是"大树底下好乘凉"。

还可以举出一些……。

回顾历程，赞誉并未冲昏我们的头脑，批评使我们更为清醒，困难与阻力促使我们更加奋力前行。目前，《三点一测丛书》的销量已越过 100 万套。而我们是冷静地把 100 万套倒着看的——即 001，从零开始，谨慎迈出新世纪的第一步，再创辉煌。

也许早该打住了，但我还想以两句话作结，以明心志：

与书结缘，以身相许，呕心沥血终不悔；

年过花甲人未老，与少年共舞，如醉如痴！

希　扬

2001.6

前　言

《三点一测丛书·高二数学》的第五次修订版是根据教育部的教育改革的最新精神，并紧跟最新现行教材，在本书第四次修订版的基础上做了全面修订而成，增加了一些新题型．本书编写和修订宗旨是巩固和提高基础知识、基本技能、基本方法和运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力，以及运用所学数学知识和方法提高分析问题和解决问题的能力．编写和修订的指导思想是在狠抓“三基”、发展智力、培养能力的前提下，紧紧抓住教材中的“知识点”，对其进行精辟的阐述，再通过精选的习题，认真剖析，重在应用，着力于突出重点，突破难点．

各章中的每节都是由**重点难点提示**、**知识点精析**、**知识点应用**和**综合能力测试题**四部分组成，所选的训练题，紧紧抓住知识点，特别是重点、难点，结合高考题型分选择题、填空题、解答题三种，每单元都选有一套典型的验收题，供检查测验用(带 * 号的为选学内容或选作题)，以利于巩固、加深和活用，并达到逐步提高学生分析问题与解决问题能力的目标．**参考答案**放在各章之后，供读者参考．

参加本书编写工作的有詹运达、曾放、陈莹、李京秋、岑志林，由岑志林主编．第五次修订版由岑志林执笔．本书尽管进行了认真的修订，但难免还有不足和错误之处，望广大读者批评、指正．并对向本书提出建议的广大读者致谢．

编　者

2001 年 3 月

SAN DIAN YI CE CONG SHU

责任编辑　王　敏　　　封面设计　东方上林工作室

雷老会见希扬主编

三点一测丛书

高一数学
高一物理
高一化学
高一语文(上、下)
高一英语
高一政治
高一数学试验本(上、下)
高一物理试验本
高一化学试验本
高一历史试验本

高二数学
高二物理
高二化学
高二语文(上、下)
高二英语
高二政治
高二历史
高二数学试验本(上、下)
高二物理试验本
高二化学试验本

高三数学总复习
高三物理总复习
高三化学总复习
高三语文总复习
高三英语总复习
高三政治总复习
高三历史总复习
高中生物试验本

ISBN 7-80111-612-7

0 1>

9 787801 116123

ISBN 7-80111-612-7/G·527

定价：15.00 元

目 录

代 数 部 分

解析几何部分

代数部分

第五章　不等式

本章主要内容有不等式、不等式的性质、不等式的证明、不等式的解法及含有绝对值的不等式，以及不等式知识的综合应用.

5.1～5.2　不等式的概念和性质

重点难点提示

重点　掌握不等式的性质及其证明.

难点　不等式性质成立的条件及它的应用.

知识点精析

对不等式的每条性质要会证明，对性质的条件要掌握确切.

（一）实数 a,b 具有以下关系：

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b,$$
$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b,$$
$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b.$$

(二) 不等式有下面一些性质:

1. $a > b \Leftrightarrow b < a$;

2. $a > b, b > c \Rightarrow a > c$;

3. $a > b \Rightarrow a + c > b + c$;

4. $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$;

5. $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$; $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$;

6. $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$;

7. $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$ ($n \in \mathbf{Z}$, 且 $n > 1$);

8. $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ($n \in \mathbf{Z}$, 且 $n > 1$).

如性质 3 中, $a > b$ 是 $a + c > b + c$ 的充分且必要条件, 但性质 4 中 $a > b, c > d$ 是 $a + c > b + d$ 的充分不必要条件, 因此解不等式组时不能做如下变形.

【例】 解不等式组

$$\begin{cases} x - 2 > 1 & ① \\ 2x > 1 & ② \end{cases}$$

解 ① + ② 得 $3x - 2 > 2$, $\therefore \quad x > \frac{4}{3}$.

这种解法是错误的, 因为原不等式组与 $3x-2>2$ 不等价.

正确的解法是 由 ① 得 $x > 3$, 由 ② 得 $x > \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 不等式组的解集为 $\{x \mid x > 3\}$.

知识点应用

【例 1】 设 $60 < a < 84, 28 < b \leqslant 33$, 求 $a + b, a - b$, 及 $\frac{a}{b}$ 的范围.

解 $\left.\begin{matrix} 60 < a < 84 \\ 28 < b \leqslant 33 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 88 < a + b < 117$,

$\therefore a + b$ 的范围是 $(88, 117)$.

$\left.\begin{matrix} 60 < a < 84 \\ 28 < b \leqslant 33 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 60 < a < 84 \\ -33 \leqslant -b < -28 \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow 27 < a - b < 56$,

$\therefore$ $a - b$ 的范围是$(27, 56)$.

$$\left.\begin{array}{l}60 < a < 84 \\ 28 < b \leqslant 33\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}60 < a < 84 \\ \dfrac{1}{33} \leqslant \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{28}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{60}{33} < \frac{a}{b} < \frac{84}{28}$$

$\Rightarrow \dfrac{20}{11} < \dfrac{a}{b} < 3$. $\therefore$ $\dfrac{a}{b}$ 的范围是$\left(\dfrac{20}{11}, 3\right)$.

【例2】 求证:若 $a > b$, $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$, 则 $a > 0, b < 0$.

证明 $\because$ $a > b$, $\therefore$ $a - b > 0$,

又 $$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \therefore \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0,$$

即 $$\frac{b-a}{ab} > 0, \text{而} \quad b - a < 0,$$

$\therefore$ $ab < 0$, $\therefore a, b$ 异号,且 $a > b$.

$\therefore$ $a > 0, b < 0$.

【例3】 已知 $a > 0$, $a^2 - 2ab + c^2 = 0$, $bc > a^2$, 试比较 a, b, c 的大小.

解 $\because$ $a > 0$, $bc > a^2 > 0$, $\therefore b, c$ 同号,

又 $\because a^2 + c^2 > 0$, $\therefore$ $b = \dfrac{a^2 + c^2}{2a} > 0$, 且 $c > 0$,

由 $(a - c)^2 = 2ab - 2ac = 2a(b - c) \geqslant 0$, 则$(b - c) \geqslant 0$.

当 $b - c > 0$ 时, $b > c$,

由 $$\left.\begin{array}{l}b = \dfrac{a^2 + c^2}{2a} \\ bc > a^2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a^2 + c^2}{2a} \cdot c > a^2$$

$\Rightarrow a^2c + c^3 > 2a^3 \Rightarrow (a^3 - a^2c) + (a^3 - c^3) < 0$

$\Rightarrow (a - c)(2a^2 + ac + c^2) < 0$, $\because a > 0, b > 0, c > 0$,

$\therefore$ $2a^2 + ac + c^2 > 0$, 则 $a - c < 0$,

$\therefore$ $a < c$, 则 $a < c < b$,

当 $b - c = 0$, $b = c$ 时, $\because bc > a^2$,

$\therefore$ 有 $b^2 > a^2$, 即 $b \neq a$,

又 $\because a^2 - 2ab + c^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$,

与 $a \neq b$ 矛盾. $\therefore$ $b-c \neq 0$.综合可知:$a<c<b$.

综合能力测试题

(一) 选择题

1. 若 $a>b, c>d$,则下列结论中不成立的是 ( )

(A) $a-c>b-c$ (B) $a-d>b-c$

(C) $a+d>b+c$ (D) $a-c<a-d$

2. 若 $a>b$,则 ( )

(A) $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$ (B) $\sqrt{a}>\sqrt{b}$

(C) $a^3>b^2$ (D) $a^2>b^3$

3. 若 $a \geqslant b$,则 ( )

(A) $(ac)^2 \geqslant (bc)^2$ (B) $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$

(C) $ac^2 \geqslant bc^2$ (D) $\frac{c^2}{a}>\frac{c^2}{b}$

4. 若 $-1<\alpha<\beta<1$,则下列各式中恒成立的是 ( )

(A) $-2<\alpha-\beta<0$ (B) $-2<\alpha-\beta<-1$

(C) $-1<\alpha-\beta<0$ (D) $-1<\alpha-\beta<1$

5. 若 a, b 为实数,则下列命题正确的是 ( )

(A) 若 $a>b$,则 $a^2>b^2$

(B) 若 $|a|>b$,则 $a^2>b^2$

(C) 若 $a>|b|$,则 $a^2>b^2$

(D) 若 $a^2>b^2$,则 $a>b$

6. $a, b \in \mathbf{R}$,两个不等式 $a>b$, $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 同时成立的充要条件是 ( )

(A)$a>b>0$ (B)$a>0>b$

(C) $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$ (D) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

7. 下列命题正确的是 ( )

(A) 若 $ac>bc$,则 $a>b$ (B) 若 $ac=bc$,则 $a=b$

(C) 若 $a>b$,则$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$　　(D)$ac^2>bc^2$,则 $a>b$

8. 若 $a>b>c$,则下列结论正确的是　　(　　)

(A)$a|c|>b|c|$　　(B)$ab>ac$

(C)$a-c>b-c$　　(D) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$

(二) 填空题

1. 若 $a>b, c>d$,且 $a<0, d<0$,则 ac ____ bd.

2. 设 $x>1, -1<y<0$,试将 $x, y, -y, -xy$ 按由小到大的顺序排列起来________________.

3. 若 $d>c, a+b=c+d, a+d<b+c$,则 a, b, c, d 的大小关系是____________________.

4. 若 $a^2>b^2$,且 $ab>0$,则$\frac{1}{a}$ ________ $\frac{1}{b}$.

(三) 解答题

1. 证明:若 a, b, c 为一个三角形的三边,则$\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 也可以作为一个三角形的三边.

2. 若 $a>b, c>d$, a, b, c, d 中至少有三个同号,试比较 ac 与 bd 的大小,并说明理由.

5.3　不等式的证明

重点难点提示

重点　由定理 1、2 及推论给出的常用的不等式;证明不等式的常用方法.

难点　不等式证明常用方法与技巧的综合运用.

知识点精析

本节由定理 1、2 及其推论给出了几个基本不等式,这是证明

不等式的理论根据. 由几个例题给出证明不等式的基本方法：比较法、综合法、分析法，其中例 3 给出了用不等式知识求最大、最小值的方法.

不等式证明的方法主要是：比较法（差比法，商比法）、综合法、分析法、反证法、数学归纳法，另外还有换元法、放缩法、判别式法等. 不等式证明的题目涉及到的知识点很多，综横联系广泛，方法灵活，技巧性强.

1. 比较法（差比法、商比法）

(1) 差比法：欲证 $A > B$，即证 $A - B > 0$.

步骤：作差式；差式变形；证差式取正值.

关键是第二步，通常将差式变形为积、商形式或平方和形式，变形的方法常用的有分解因式、通分或配方等. 多项式不等式或分式不等式常用差比法证明.

(2) 商比法：若 $B > 0$，欲证 $A \geqslant B$，只需证$\frac{A}{B} \geqslant 1$.

步骤：作商式；商式变形；证商值大于等于 1.

指数不等式常用商比法证明，证商值大于 1 有时要用到指数函数性质，如若 $a > 1$，且 $x > 0$，则 $a^x > 1$ 等.

2. 综合法

从已知条件或基本不等式出发，运用不等式的有关性质、函数的单调性等推导出所要证明的不等式，这是"由因导果"的方法，其中常用的基本不等式有：

(1) $a^2 \geqslant 0 (a \in \mathbf{R})$；$(a \pm b)^2 \geqslant 0 (a, b \in \mathbf{R})$.

(2) $a, b \in \mathbf{R}$，$a^2 + b^2 \geqslant \pm 2ab$，即 $a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$.

(3) 当 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ 时，有

$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$（当且仅当 $a = b$ 时，等号成立）；

$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$（当且仅当 $a = b = c$ 时，等号成立）；

$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$（当且仅当 $a = b = c$ 时，等号成立）.

(4) $a, b, c \in \mathbf{R}$ 时，有 $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a + b + c)^2 \geqslant ab + bc + ac$（当且仅当 $a = b = c$ 时，等号成立）.

3. 分析法

从求证的不等式出发，寻求此不等式成立的充分条件，只要使不等式成立条件具备，就可断定此不等式成立.这是一种“执果索因”的方法，运用时注意书写格式.要证不等式 A，只需证 B，即证 C.要证 C，又只需证 D，即不等式 M 成立.

$\because$ 不等式 M 成立，$\therefore$ 原不等式 A 成立.

4. 反证法

从否定结论出发，推出与已知或与公理、定理等相矛盾的结果，从而断定原不等式成立.如，若 $a>b>0$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$）的证明即是此种方法.

此外，最大值和最小值定理：

若 $x, y\in\mathbf{R}^{+}$，

(1) 当 $xy=p$ 为定值时，则 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$，当且仅当 $x=y$ 时取得此最小值.

(2) 当 $x+y=s$ 为定值时，则 xy 有最大值 $\frac{s^2}{4}$，当且仅当 $x=y$ 时取得此最大值.

要注意三点：① $x, y\in\mathbf{R}^{+}$；② 和或积为定值；③ 当且仅当 $x=y$ 时，才能取得相应的最值.三者缺一不可.

另外，若当 $x^2+y^2=Q$ 为定值时，由 $(x+y)^2\leqslant 2(x^2+y^2)=2Q$，$xy\leqslant\frac{Q}{2}$，$x+y$ 或 xy 按上述相应条件也可取得最大值，这是应用不等式知识求最值问题的一个重要方法.

知识点应用

【例 1】 用比较法证明

已知：$a>b>c$，求证：$a^2b+b^2c+c^2a>ab^2+bc^2+ca^2$.

证法 1　$a^2b+b^2c+c^2a-(ab^2+bc^2+ca^2)$

$$=(b-c)a^2+(c^2-b^2)a+b^2c-bc^2$$
$$=(b-c)[a^2-(b+c)a+bc]$$

$$= (b-c)(a-b)(a-c) > 0,$$

$\because \quad a > b > c, \therefore \quad b-c>0, a-b>0, a-c>0,$

$\therefore \quad a^2b+b^2c+c^2a > ab^2+bc^2+ca^2.$

证法2 $\because a > b > c$,设$a=b+x, c=b-y(x,y\in \mathbf{R}^+)$,则

$$a^2b+b^2c+c^2a-(ab^2+bc^2+ca^2)$$
$$= ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$$
$$= (b+x)bx+b(b-y)y-(b+x)(b-y)(x+y)$$
$$= xy(x+y) > 0.$$

【例2】 已知 $a > b > c > 0$,则 $a^ab^bc^c > (abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$.

证法1 $\because \lg(a^ab^bc^c)-\lg(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

$$= a\lg a+b\lg b+c\lg c-\frac{1}{3}(a+b+c)(\lg a+\lg b+\lg c)$$

$$= \frac{1}{3}[(a-b)+(a-c)]\lg a+\frac{1}{3}[(b-a)+(b-c)]\lg b+\frac{1}{3}[(c-a)+(c-b)]\lg c$$

$$= \frac{a-b}{3}\lg\frac{a}{b}+\frac{b-c}{3}\lg\frac{b}{c}+\frac{a-c}{3}\lg\frac{a}{c} > 0,$$

这是 $\because a > b > 0, \therefore a-b > 0, \frac{a}{b} > 1,$

$\therefore \lg\frac{a}{b} > 0, \frac{a-b}{3}\lg\frac{a}{b} > 0.$

同理可证 $\quad \frac{b-c}{3}\lg\frac{b}{c} > 0, \quad \frac{a-c}{3}\lg\frac{a}{c} > 0,$

即 $\quad \lg a^ab^bc^c > \lg(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)},$

$\therefore \quad a^ab^bc^c > (abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}.$

证法2 $\because \dfrac{a^ab^bc^c}{(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}} = a^{\frac{2a-b-c}{3}}b^{\frac{2b-a-c}{3}}c^{\frac{2c-a-b}{3}}$

$$= a^{\frac{a-b}{3}+\frac{a-c}{3}}b^{\frac{b-a}{3}+\frac{b-c}{3}}c^{\frac{c-a}{3}+\frac{c-b}{3}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} > 1,$$