经济数学

微积分

JING JI SHU XUE

学习指导

2

◎主　编　李晋明
◎副主编　李朝阳

经济管理出版社

《经济数学(微积分)》学习指导

主　编　李晋明
副主编　李朝阳

经济管理出版社

责任编辑 贾晓建
版式设计 蒋 方
责任校对 郭虹生

图书在版编目(CIP)数据

经济数学(微积分)学习指导/李晋明主编. -北京:经济管理出版社,2001
ISBN 7-80162-247-2

Ⅰ.经… Ⅱ.李… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教学参考资料 ②微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 053263 号

《经济数学(微积分)》学习指导

主 编 李晋明
副主编 李朝阳

出版:经济管理出版社
(北京市新街口六条红园胡同 8 号 邮编:100035)
发行:经济管理出版社总发行 全国各地新华书店经销
印刷:北京交通印务实业公司

787×1092 毫米 1/16 23 印张 530 千字
2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月北京第 1 次印刷
印数:1—7000 册

ISBN 7-80162-247-2/F·235
定价:34.00 元

通讯地址:北京阜外月坛北小街 2 号 邮编:100836
联系电话:(010)68022974

前　言

本书是为了贯彻落实教育部《面向21世纪教育振兴行动计划》，为了帮助不同层次的同学更好地学习、掌握《微积分》课程，根据教育部针对普通高等院校经济、管理类专业核心课程颁布的经济数学教学大纲，结合长期从事经济、管理类各专业《微积分》课程教学的丰富经验与体会，并参考近年来大量国内外的相关教材与参考书的内容集体编写而成的.

本书以李晋明、李朝阳主编的《经济数学(微积分)》教材为主要蓝本，同时又兼顾了现行的其他相近教材的内容. 因此，不论使用哪本教材，均可采用本书作为其参考用书.

本书各章包含以下几部分内容：主要内容，基本要求，重要的概念、定理、公式、方法，例题分析，习题解答，阶段测验.

在每章中，除了教学大纲规定的主要内容，基本要求以外，编者还针对学生们在学习中的难点与疑点，对重要的概念、定理、公式、方法进行了较为深入系统地分析、研究，使学生们能够正确地理解与辨别，对规律性的内容，加以总结. 并通过大量丰富的典型例题，分门别类地指明其解题思路、解题方法，力求解题的规范化、标准化. 这些例题既有介绍基本概念和基本运算方法的填空题或计算题；又有初学者容易在计算中经常出现的错误或不易理解的概念澄清题；还有一题多解的开拓思路题；更有不少较为灵活的综合题与证明题.

本书不仅配置了上千道习题，还对其进行了较为详细的解答. 并在每章后，都安排了一个相应的阶段测验，以考查学生们对所学内容掌握的程度.

本书最后除了附有经济学、管理学门类各学科专业全国硕士研究生试卷分类及适用专业的介绍，以及《微积分》考试科目的考试内容、考试要求，还附有2000年、2001年全国硕士研究生入学考试数学三、数学四试卷参考解答及评分标准.

本书主要是为初学《微积分》课程的同学们提供的一本辅导教材，编者由衷地希望初学的同学一定要在独立思考、独立解题的前提条件下，再参考本解题指导的提示与解答，千万不要盲目地照搬照抄. 否则就有违编者的初衷与意愿.

书中“*”的内容，可以不作为基本要求.

全书共分十章，由李晋明担任主编，李朝阳担任副主编.参加编写的教师有李晋明(第一章、第二章)，李业隆(第三章、第四章)，李朝阳(第五章、第六章)，丁莉(第七章、第八章)，施明存(第九章)，柏金群(第十章).最后，由李晋明负责全书的审核、整理与加工.

全书由黄先开负责审订.

由于时间仓促，加上编者的水平有限，书中难免有不妥之处，希望读者批评指正，以便今后修改，使其趋于完善.

编　者

2001年8月

目　　录

第一章　函　数

一、主要内容

函数的概念及表示法,常见的函数类型,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,经济学中的常见函数.

二、基本要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法.
2. 了解常见的函数类型.
3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念.
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.

三、重要的概念、定理、公式、方法

(一)概念

函数的定义:设 D 与 Z 是两个非空的实数集,f 是某一规则.如果对每一个数 $x\in D$,f 惟一地确定出 Z 中一个相对应的数 y,则称变量 y 是变量 x 的函数,记成

$$y=f(x)$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,集合 D 称为定义域,集合 Z 称为值域.

函数的两要素:定义域和对应规则.

函数的三种表示法:解析(公式)表示法、表格表示法、图形(图示)表示法.

常见的函数:

1. 单调函数

设函数 f 的定义域为 D,如果对 D 中任意两数 $x_1<x_2$ 都有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)[\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)],$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的增函数(或减函数).

2. 有界函数

设函数 f 的定义域为 D,如果存在两个数 $m\leqslant M$,使得对 D 中的任意 x 都有

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数,其中 m 为其下界,M 为其上界.

3. 奇、偶函数

设函数 f 的定义域为 D,如果对 D 中的任意 x,恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数;如果对 D 中的任意 x,恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数.

4. 周期函数

设函数 f 的定义域为 D,如果存在实数 $T \neq 0$,使得对 D 中的一切 x,恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的周期函数,数 T 为 $f(x)$ 的一个周期.

5. 分段函数

设函数 f 的定义域为 D,如果在自变量 x 的不同变化范围内,对应规则用不同的式子来表示,则称 $f(x)$ 为 D 上的分段函数.

几种常见的分段函数:

(1)绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

(2)符号函数 $y=sgnx=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

(3)狄利克雷(Dirichlet)函数 $y=\begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

(4)取整函数 $y=[x]$

6. 数列

设函数 f 的定义域为 D,如果 D 为全体自然数的集,即 $D=N$,则称 f 为一个数列.

常见的数列:

(1)等差数列

$a, a+d, a+2d, \cdots, a+(n-1)d, \cdots$($d$ 为公差,是常数)

(2)等比数列

$a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}, \cdots$($q$ 为公比,是常数)

7. 初等函数

$$\text{初等函数}\begin{cases} \text{代数函数}\begin{cases} \text{有理函数}\begin{cases} \text{有理整函数(多项式)} \\ \text{有理分式函数(多项式的商)} \end{cases} \\ \text{无理函数(有理函数的根式)} \end{cases} \\ \text{超越函数}\begin{cases} \text{指数函数}(a^x) \\ \text{对数函数}(\log_a x) \\ \text{三角函数}(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x) \\ \text{反三角函数}(\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \text{arc}\cot x) \end{cases} \end{cases}$$

常见的经济函数：

1. 总成本函数

$$C = C_F + C_V$$

其中 C_F 为固定成本，C_V 为可变成本.

2. 总收益(收入)函数

$$R = Qp$$

其中 Q 为产量或销售量，p 为产品的价格.

3. 总利润函数

$$L = R - C$$

4. 需求函数

$$Q_d = f(p)$$

其中 Q_d 表示需求量，p 表示价格.

5. 供给函数

$$Q_s = g(p)$$

其中 Q_s 表示供给量，p 表示价格.

(二)定理

如果函数 $y = f(x)(x \in D)$ 是单调的，则一定存在反函数 $x = f^{-1}(y)(y \in Z)$，且反函数也是单调的.

(三)公式

1. 三角函数的基本关系式

(1)乘积的关系

$$\sin x \cdot \csc x = 1, \cos x \cdot \sec x = 1, \tan x \cdot \cot x = 1$$

(2)商的关系

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

(3)平方和的关系

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

2. 三角函数的基本公式

(1)加法公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$$

(2)和差化积公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\cot\alpha\pm\cot\beta=\pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\tan\alpha\pm\cot\beta=\pm\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

(3)积化和差公式

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

(4)倍角公式

$$\sin2x=2\sin x\cdot\cos x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2x}$$

$$\cos2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x=\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}$$

$$\tan2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}$$

$$\cot2x=\frac{\cot^2x-1}{2\cot x}$$

(5)半角公式

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$\cot\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

(6)降幂公式

$$\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos2x)$$

$$\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos2x)$$

3. 反三角函数的相互关系

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arc}\tan x+\operatorname{arc}\cot x=\frac{\pi}{2}$$

四、例题分析

(一)如何判别两个函数是相同(等价)的

解题思路:要想确定两个函数是否相同,其关键是定义域和对应规则是否相同.

例 1 判断下列各对函数是否相同:

(1)$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,$g(x)=-\ln(x-\sqrt{x^2-1})$

(2)$f(x)=\sqrt{1+\cos 2x}$,$g(x)=\sqrt{2}\cos x$

解 (1)$f(x)$与$g(x)$的定义域都是$[1,+\infty)$,且由

$$g(x)=\ln\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\ln\left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

可见$f(x)$与$g(x)$的对应规则也相同,故$f(x)$与$g(x)$是相同的.

(2)$f(x)$与$g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,当$x=\frac{2}{3}\pi$时,对应的函数值分别为

$$f(\frac{2}{3}\pi)=\sqrt{1+\cos 2\cdot\frac{2}{3}\pi}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g(\frac{2}{3}\pi)=\sqrt{2}\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

可见$f(x)$与$g(x)$的对应规则不相同.因此,$f(x)$与$g(x)$是两个不相同的函数.

(二)如何判别函数$f(x)$的单调性

解题思路:根据单调性的定义.

例 2 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内有定义,x_1、$x_2>0$,试证:

(1)若$\frac{f(x)}{x}$单调上升,则$f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$

(2)若$\frac{f(x)}{x}$单调下降,则$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$

证 (1)设任意的$x_1<x_2\in(0,+\infty)$,由条件$\frac{f(x)}{x}$单调上升,则

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\geqslant\frac{f(x_1)}{x_1}$$

即$x_1f(x_2)\geqslant x_2f(x_1)$.同理,$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\geqslant\frac{f(x_2)}{x_2}$,即

$$x_2f(x_1+x_2)\geqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)\geqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2)$$

所以,

$$f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2).$$

(2)完全类似的可以证明.

(三)如何判别函数$f(x)$的奇偶性

解题思路:判别函数$f(x)$的奇偶性主要有以下三种方法:

1. 根据奇偶性的定义.

2. 利用 $f(x)+f(-x)=0$ 来判别函数 $f(x)$ 为奇函数.

3. 利用函数 $f(x)$ 的定义域是否对称于坐标原点.

例 3 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1},(a>1)$ (2) $y=2^x$

解 (1)因为

$$y(-x)=(-x)\frac{a^{(-x)}-1}{a^{(-x)}+1}=-x\cdot\frac{1-a^x}{1+a^x}=x\frac{a^x-1}{a^x+1}=y(x)$$

所以,函数 y 是偶函数.

(2)因为

$$y(-x)=2^{-x}=\frac{1}{2^x}\neq\pm y(x)$$

所以,函数 y 是非奇非偶的.

例 4 设 $f(x)=(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2})\varphi(x)$,其中 $a>0,a\neq1,\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且恒有 $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$,判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

解 令 $g(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$,因为

$$\begin{aligned}g(x)+g(-x)&=\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)\\&=\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{a^x}{a^x-1}-\frac{1}{2}\right)=0\end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 为奇函数.

又因为 $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$,令 $y=0$,则 $\varphi(x)=\varphi(x)+\varphi(0)$,从而 $\varphi(0)=0$. 由此

$$0=\varphi(0)=\varphi[x+(-x)]=\varphi(x)+\varphi(-x)$$

说明 $\varphi(x)$ 也是奇函数,故 $f(x)=g(x)\varphi(x)$ 是偶函数.

(四)如何判别函数 $f(x)$ 的周期性

解题思路:

1. 利用函数周期性的定义;

2. 利用周期函数的运算性质:

(1)若函数 $f(x)$ 的周期为 T,则函数 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

(2)若函数 $f(x)$、$g(x)$ 的周期均为 T,则 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$ 的周期也为 T.

(3)若函数 $f(x)$、$g(x)$ 的周期分别为 T_1、T_2,且 $T_1\neq T_2$,则 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$ 是以 T_1、T_2 的最小公倍数为周期的函数(即 T_1 与 T_2 之比是一个有理数).

(4)周期函数的定义域应具有如下特性:若 $x\in D$,则 $x\pm T\in D$,从而 $x\pm nT\in D$,即 D 应既无上界又无下界.

例 5 判断下列函数是否为周期函数:

(1) $y=\sin\pi x$ (2) $y=|\sin x|+\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$

(3) $y=\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{2}x$　　　　　　　　(4) $y=\sin(\sqrt{x})^2$

解　(1)设有正数 T 使得

$$\sin\pi(x+T)=\sin\pi x \qquad (※)$$

即

$$\sin\pi x\cdot\cos\pi T+\cos\pi x\cdot\sin\pi T=\sin\pi x.$$

此式成立的充分必要条件是:

$$\cos\pi T=1,\sin\pi T=0.$$

由此可得

$$T=2k,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

因为 T 是使(※)式成立的最小正数,故取 $k=1$,得 $T=2$.因此,函数 $y=\sin\pi x$ 是周期函数,且周期为 2.

注　若已知函数 $y=\sin\pi x$ 是周期函数,则由

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\pi}=2$$

立即可得函数 $y=\sin\pi x$ 的周期.

(2)因为 $|\sin x|$ 的周期为 π, $\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$ 的周期为 2π,它们的最小公倍数为 2π,故函数 y 是以 2π 为周期的周期函数.

(3)因为 $\sin x$ 的周期为 $T_1=2\pi$, $\cos\frac{\pi}{2}x$ 的周期为 $T_2=4$,而 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{\pi}{2}$ 为无理数,故函数 y 不是周期函数.

(4)因为函数 y 的定义域为 $[0,+\infty)$,有下界,故函数 y 不是周期函数.

例 6　设函数 $y=f(x)$ 的图形与直线 $x=a$、$x=b$ 均对称 $(a\neq b)$, $x\in(-\infty,+\infty)$.求证: $y=f(x)$ 是周期函数,并求其周期.

证　因为

$$f(a+x)=f(a-x),f(b+x)=f(b-x)$$

所以

$$\begin{aligned}f(x)&=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)\\&=f[b+(2a-x-b)]=f[b-(2a-x-b)]\\&=f[x+2(b-a)]\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数,其周期为 $T=2(b-a)$.

例 7　设 $f(x)$ 为周期函数,且对任意的 x,有

$$f(\frac{1}{2}+x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$$

求函数 $f(x)$ 的周期 T.

解　因为 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$,由

$$\begin{aligned}f\left[\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+x)\right]&=\frac{1}{2}+\sqrt{f(\frac{1}{2}+x)-f^2(\frac{1}{2}+x)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}\\&=\frac{1}{2}\pm\left[\frac{1}{2}-f(x)\right]=f(x)\end{aligned}$$

得 $f(1+x)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 的周期为 1.

（五）如何求解反函数

解题思路：先将 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出来，再将 x 与 y 对换，即得所求函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 8 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ (2) $y=\begin{cases}x^2-1, & -1\leqslant x<0\\ x^2+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$

解 (1) 令 $u=\sqrt{1+4x}$，则 $y=\dfrac{1-u}{1+u}$，得 $u=\dfrac{1-y}{1+y}$，即 $\sqrt{1+4x}=\dfrac{1-y}{1+y}$，故

$$x=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\frac{y}{(1+y)^2}$$

所以，反函数 $y=-\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

(2) 当 $-1\leqslant x<0$ 时，$y=x^2-1$，其值域为 $-1<y\leqslant 0$. 由 $y=x^2-1$ 得 $x=\pm\sqrt{y+1}$. 因为 $-1\leqslant x<0$，故取负号，即 $x=-\sqrt{y+1}\ (-1<y\leqslant 0)$.

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=x^2+1$，其值域为 $1\leqslant y\leqslant 2$. 由 $y=x^2+1$ 得 $x=\pm\sqrt{y-1}$. 因为 $0\leqslant x\leqslant 1$，故取 $x=\sqrt{y-1}\ (1\leqslant y\leqslant 2)$.

因此，所求反函数为

$$y=\begin{cases}-\sqrt{x+1}, & -1<x\leqslant 0\\ \sqrt{x-1}, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

（六）如何求解复合函数

解题思路：将两个或两个以上函数进行复合，一般有三种方法：

1. 代入法（适用于初等函数的复合）；
2. 分析法（适用于初等函数与分段函数的复合，或两个分段函数的复合）；
3. 图示法（适用于两个分段函数的复合）.

例 9 设 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$，$g(x)=\sqrt{1-x^2}$，求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

解 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域与值域分别为：

$$D_1=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty),Z_1=[0,+\infty)$$
$$D_2[-1,1],Z_2=[0,1]$$

因为 $f[g(x)]$ 是 $f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的复合，且 $D_1\cap Z_2=\{1\}$，于是 $f[g(x)]$ 的定义域为 $\{x\mid g(x)=1\}=\{0\}$. 因此，

$$f[g(x)]=0,x\in\{0\}.$$

又因为 $g[f(x)]$ 是 $g(u)$ 与 $u=f(x)$ 的复合，且 $D_2\cap Z_1=[0,1]$，于是 $g[f(x)]$ 的定义域为

$$\{x\mid f(x)\in[o,1]\}=\{x\mid 0\leqslant\sqrt{x^2-1}\leqslant 1\}=\{x\mid 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}\}.$$

因此，$g[f(x)]=\sqrt{1-(x^2-1)}=\sqrt{2-x^2}$，$1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}$.

例 10 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & 1<x\leqslant 3,\end{cases}$ $g(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$，求 $f[g(x)]$ 及

$g[f(x)]$.

解 因为 $f(x)$是分段函数,设两段中的函数分别记成 $f_1(x)$与 $f_2(x)$,则 $f_1(x)$、$f_2(x)$、$g(x)$的定义域与值域依次为

$$D_1=[-1,1],D_2=(1,3],D_3=[0,4];$$

$$Z_1=[-2,2],Z_2=(1,9],Z_3=[-\frac{\pi}{4}、\frac{\pi}{4}].$$

由于 $f_1[g(x)]$的定义域

$$\{x \mid g(x)\in D_1\cap Z_2\}=\{x \mid g(x)\in Z_3\}=D_3,$$

$f_2[g(x)]$的定义域

$$\{x \mid g(x)\in D_2\cap Z_3\}=\Phi,$$

即 $f_2(u)$与 $u=g(x)$不能复合.因此,

$$f[g(x)]=f_1[g(x)]=\arcsin(\frac{x}{2}-1),x\in[0,4].$$

又由于 $g[f_1(x)]$的定义域

$$\begin{aligned}\{x \mid f_1(x)\in D_3\cap Z_1\}&=\{x \mid f_1(x)\in[0,2]\}=\{x \mid x\in D_1 \text{ 且 } 0\leqslant 2x\leqslant 2\}\\&=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}.\end{aligned}$$

$g[f_2(x)]$的定义域

$$\begin{aligned}\{x \mid f_2(x)\in D_3\cap Z_2\}&=\{x \mid f_2(x)\in[1,4]\}=\{x \mid x\in D_2 \text{ 且 } 1<x^2\leqslant 4\}\\&=\{x \mid 1<x\leqslant 2\}.\end{aligned}$$

因此,

$$g[f(x)]=\begin{cases}\frac{1}{2}\arcsin(x-1), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1}{2}\arcsin(\frac{x^2}{2}-1), & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

(七)如何求解函数的表达式

解题思路:求解函数的表达式,一般有两种方法:

1. 将已知表达式凑成 $f(\quad)$内的中间变量的表达形式;

2. 作变量替换,通过联立方程组,得出 $f(x)$的表达式.

例 11 求解下列各题中函数 $f(x)$的表达式:

(1)$f(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x,0<x<1$

(2)$f(x+\frac{1}{x})=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\sin(x^2+\frac{1}{x^2})+2,|x|>1$

解 (1)因为

$$f(\sin^2 x)=1-2\sin^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-1=-2\sin^2 x+\frac{1}{1-\sin^2 x}$$

所以

$$f(x)=-2x+\frac{1}{1-x},0<x<1.$$

(2)因为

$$f(x+\frac{1}{x})=\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-1}+\sin[(x+\frac{1}{x})^2-2]+2$$